II. НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

ЗАДАЧА О КРУГЕ ЮНГА ДЛЯ СФЕРЫ

Ю. Д. Бураго

(Ленинград)

1. Будем рассматривать фигуры (произвольные множества точек) на сфере единичного радиуса. Расстоянием между двумя точками назовем длину кратчайшего пути по сфере от одной точки до другой. Точная верхняя граница расстояний (по сфере) между точками фигуры Φ называется диаметром этой фигуры. Вопрос, которым мы здесь займемся, формулируется так:

Каково наименьшее возможное R, такое, что кругом (точнее, круглой «шапочкой») [1] *радиуса R можно покрыть любую расположенную на сфере фигуру диаметра d?*

2. Аналогичный вопрос для плоскости был решен в 1901 г. английским математиком Юнгом [2]. В случае сферы вопрос значительно сложнее, и общее решение пока не найдено. Задача остается простой только до тех пор, пока фигура Φ лежит в одной полусфере.

Фигура Φ называется *связной*, если любые две ее точки можно соединить не выходящей из Φ кривой. Оказывается, что в отличие от плоскости при некоторых значениях d радиус R может быть существенно уменьшен, если ограничиться только связными фигурами.

Поэтому вопрос целесообразно решать отдельно для связных и для не обязательно связных фигур.

3. Сформулируем полученные результаты. Их доказательству будет посвящен п. **4.**

---

[1]) Под «кругом» радиуса R с центром A на сфере мы понимаем геометрическое место точек сферы, удаленных от A не больше чем на R. При $R > \frac{\pi}{2}$ такой «круг» покрывает более полусферы.

[2]) Юнг доказал, что на плоскости $R = \frac{d}{\sqrt{3}}$. См., например, И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М., 1951, задачи 16 и 67.

Теорема 1. *Если фигура Ф диаметра d лежит в одной полусфере, то* $R=\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{d}{2}\right)$.

Теорема 2. *Если* $d<\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{3}$ (т. е. меньше расстояния между вершинами вписанного в сферу правильного тетраэдра), *то фигура Ф целиком лежит в одной полусфере* [1]).

Теорема 3. *Если фигура Ф связная и ее диаметр* $d\leqslant\frac{2\pi}{3}$, *то Ф лежит в одной полусфере.*

Теорема 4. *Если* $d_n=\frac{2\pi n}{n+1}$, *где n — произвольное натуральное число, то* $R=d_n$.

Теоремы 1—4 исчерпывают всё, что мы можем сказать о величине R. Их содержание поясняется следующей таблицей, содержащей достаточное число нерешенных вопросов, которые можно рекомендовать вниманию читателя.

d	Произвольные фигуры	Связные фигуры
$0\leqslant d<\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{3}$	$R=\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{d}{2}\right)$	
$d=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{3}$	$R=d$	
$\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{3}<d\leqslant\frac{2\pi}{3}$	?	
$\frac{2\pi n}{2n+1}<d<\frac{2\pi(n+1)}{2n+3}$, $n=1, 2, 3, \ldots$	?	?
$d=\frac{2\pi n}{2n+1}$, $n=1, 2, 3, \ldots$; $d=\pi$	$R=d$	

4. Доказательство теоремы 1 вполне аналогично доказательству теоремы Юнга на плоскости. Не представляет трудностей и доказательство теоремы 2, которое, так же как и доказательство теоремы 1, можно получить из рассмотрения (наименьшего) описанного круга фигуры Ф.

---

[1]) В то же время ясно, что если $d=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{3}$, то фигура Ф может не лежать в одной полусфере, и что в этом случае $R=d$; для доказательства достаточно принять за Ф четверку вершин правильного тетраэдра.

Для доказательства теоремы 4 достаточно рассмотреть множество Φ_n ($n=1, 2, 3, \ldots$), состоящее из точки O и концентрических окружностей (на сфере) с центрами в O и радиусами

$$r_k=\frac{2\pi k}{2n+1}, \qquad k=1, 2, \ldots$$

Наибольший интерес представляет теорема 3. Она показывает, что, в то время как для произвольных фигур значение R при переходе от значений меньших $\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{3}$ к $d=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{3}$ претерпевает скачок, для связных фигур дело обстоит не так, и тем самым дает ответ на вопрос, предложенный на геометрическом семинаре Варшавского университета.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим минимальный замкнутый круг K, содержащий фигуру Φ (описанный круг фигуры Φ); в условиях теоремы 3 его радиус r заведомо не превосходит $\frac{2\pi}{3}$. Нетрудно доказать, что в случае замкнутой фигуры на границе минимального круга K может оказаться либо две точки фигуры (и тогда они делят окружность минимального круга пополам), либо больше (и тогда найдутся три точки, являющиеся вершинами остроугольного треугольника).

Для каждой точки O фигуры Φ построим открытый круг $K(O)$ радиуса $\frac{\pi}{3}$ с центром в точке O', диаметрально противоположной по отношению к точке O. Этот круг $K(O)$ мы назовем *кругом, соответствующим точке* O; он, очевидно, не содержит точек фигуры.

Идея доказательства заключается в следующем. Предположив, что Φ не умещается в полусфере $\left(\text{и следовательно, } R \text{ заведомо больше } \frac{\pi}{2}\right)$, мы сумеем разделить круг K на изолированные части кругами, соответствующими некоторым точкам фигуры Φ (т. е. кругами, не содержащими точек Φ), притом так, что в каждой части заведомо будут иметься точки нашей фигуры. Так как это невозможно для связной фигуры Φ, то мы заключим, что *связная фигура* Φ *диаметра* d *умещается в одной полусфере.*

Итак, мы считаем, что $\frac{\pi}{2}<r\leqslant\frac{2\pi}{3}$. Далее рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Пусть $\frac{\pi}{2}<r<\frac{2\pi}{3}$. В этом случае на окружности описанного круга K не может быть двух противоположных точек, принадлежащих Φ $\left(\text{ибо расстояние между такими точками больше } \frac{2\pi}{3}\right)$. Значит, на этой окружности найдутся три точки A, B, C фигуры Φ, являющиеся вершинами остроугольного треугольника.

Возьмем какие-то две из них, скажем A и B; они удалены друг от друга менее чем на $\frac{2\pi}{3}$. Заметим, что точка C лежит между концами A_1, B_1 диаметров AA_1 и BB_1 круга K. Круги $K(A)$ и $K(B)$ содержат точки A_1 и B_1, они пересекут круг K по разные стороны от точки C и пересекутся между собой внутри K (рис. 1).

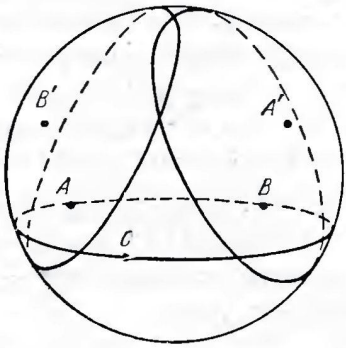


Рис. 1.

Таким образом, $K(A)$ и $K(B)$ разделят круг K на две изолированные области, причем, скажем, точки A и C лежат в разных областях. Но это противоречит связности Φ.

Случай 2. Пусть $r=\frac{2\pi}{3}$. Возьмем любую точку O фигуры Φ и построим круг $K(O)$. Дополнительный к нему круг K будет иметь радиус $\frac{2\pi}{3}$ и будет содержать Φ, т. е. он будет (минимальным) описанным кругом. Если бы на окружности круга K имелись три точки фигуры Φ, являющиеся вершинами остроугольного треугольника, то соответствующие им (открытые!) круги отделили бы точку O от остальных точек фигуры Φ (рис. 2), что противоречит связности Φ.

Остается предположить, что на окружности круга K лежат две точки A и B фигуры Φ, делящие эту окружность пополам. Построим круги $K(A)$ и $K(B)$. Три круга $K(A)$, $K(B)$ и $K(O)$ будут попарно касаться друг друга в точках O, B, A. Они разбивают оставшуюся часть сферы на две «треугольные» области U и V, общими точками которых являются лишь «вершины» A, B, O (рис. 3). Ясно, что каждая из этих областей целиком лежит в замкнутой полусфере (ограниченной большим кругом AOB). Докажем, что фигура Φ целиком лежит в одной из этих областей.

Рис. 2.

Предположим, что это не так. В таком случае могут иметь место три случая.

а) Фигура Φ содержит внутреннюю точку C_1 области U и внутреннюю точку C_2 области V. Точки C_1 и C_2 удалены от A, B, O менее чем на $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому центры кругов $K(C_1)$ и $K(C_2)$ удалены от центров кругов $K(A)$, $K(B)$, $K(O)$ также менее чем на $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, круги $K(C_1)$ и $K(C_2)$ пересекут каждый из кругов $K(A)$, $K(B)$, $K(O)$. Поэтому, выбросив из областей U и V их пересечение с кругами $K(C_1)$ и $K(C_2)$, мы получим три изолированные части

сферы, в каждой из которых лежит одна из точек A, B, O фигуры Φ. Но это также противоречит связности Φ.

б) Фигура Φ содержит внутреннюю точку C_1 области U и граничную точку C_2 области V, скажем, точку C_2 дуги OB, отличную от O и от B (рис. 3). В таком случае пять кругов $K(A)$, $K(B)$, $K(O)$, $K(C_1)$ и $K(C_2)$ разделят дополнительную к ним часть сферы на две изолированные области, в одной из которых лежит точка A, а в другой точки O и B (рис. 4).

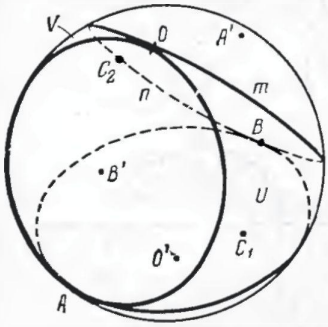


Рис. 3.

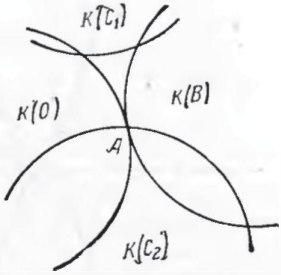
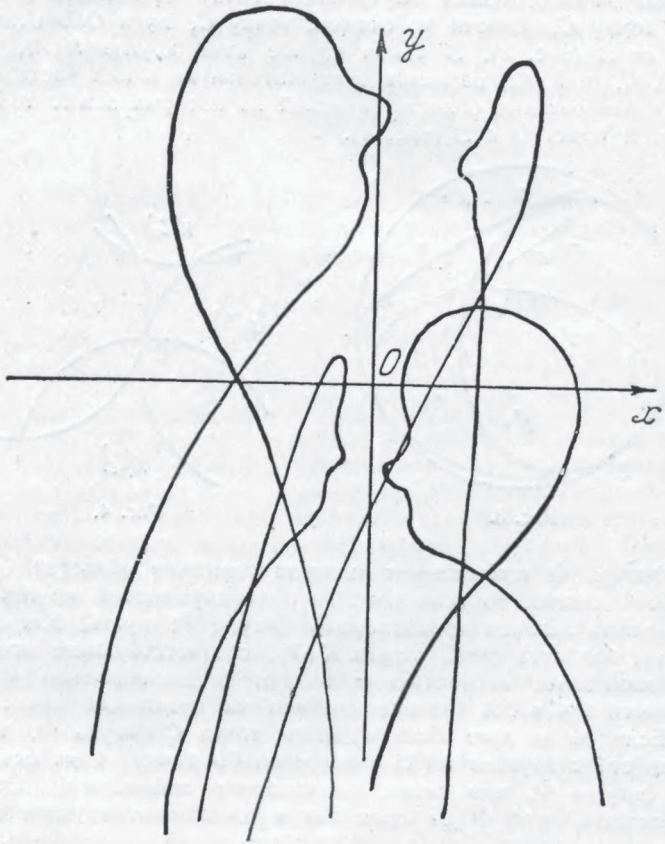


Рис. 4.

в) Фигура Φ принадлежит целиком границам областей U и V. Так как Φ связна, то хоть одна из полуокружностей кругов $K(A)$, $K(B)$ должна целиком принадлежать фигуре Φ; пусть, для определенности, это дуга OmB. Круги $K(X)$, соответствующие всем точкам X этой дуги, полностью покрывают ограничивающие V полуокружности OA и BA (за исключением их граничных точек A, B и O). Если бы на дуге OnB нашлась точка C фигуры Φ, то круг $K(C)$ вместе с кругами $K(X)$ изолировал бы точку A от остальных точек фигуры Φ, что снова противоречит связности Φ. Остается предположить, что Φ не содержит и точек полуокружности OnB, т. е. целиком лежит в U, а вместе с тем в одной полусфере.

Тем самым теорема 3 полностью доказана.



Семейство кривых

«Mathematics Magazine» 33, 1959 г.