

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.321

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-196-214

**О среднем значении функций, родственных функции делителей, в кольце многочленов над конечным полем**

В. В. Юделевич

**Виталий Викторович Юделевич** — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: vitaliiyudelevich@mail.ru*

**Аннотация**

Пусть  $\mathbb{F}_q[T]$  — кольцо многочленов над конечным полем  $\mathbb{F}_q$ . Далее, пусть  $g: \mathbb{F}_q[T] \rightarrow \mathbb{R}$  — мультипликативная функция, значения которой на степенях неприводимого многочлена зависят лишь от показателя степени, то есть  $g(P^k) = d_k$  для любого неприводимого многочлена  $P$  и некоторой фиксированной последовательности вещественных чисел  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ . В работе исследуется сумма

$$T(N) = T(N; g) = \sum_{\deg F=N} g(F),$$

где  $F$  пробегает многочлены степени  $N$  со старшим коэффициентом, равным 1 (унитарные многочлены). Для суммы  $T(N)$  находится точная формула, а также вычисляется асимптотика при  $q \rightarrow \infty$  и  $N$  фиксированном; при  $N \rightarrow \infty$  и  $q \rightarrow \infty$ ; при  $q^N \rightarrow \infty$ . В частности, доказаны следующие асимптотические формулы:

$$\sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ унитарен}}} \tau(F^k) = \binom{k+N}{N} q^N + O_{N,k}(q^{N-1}), \quad N \geq 1, \quad q \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ унитарен}}} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{q^N}{4^N} \left( \binom{2N}{N} - \frac{2}{3} \binom{2N-4}{N-2} q^{-1} + O\left(\frac{4^N}{\sqrt{N}} q^{-2}\right) \right), \quad N \rightarrow \infty, \quad q \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ унитарен}}} \frac{1}{\tau(F)} = C_1 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_1 = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( \sqrt{q^{2l} - q^l} \ln \frac{q^l}{q^l - 1} \right)^{\pi_q(l)}, \quad q^N \rightarrow \infty;$$

где  $\tau(F)$  — число унитарных многочленов, делящих  $F$ , и  $\pi_q(l)$  — число неприводимых унитарных многочленов степени  $l$ . Последние две формулы представляют собой аналог для многочленов над конечным полем одного результата Рамануджана

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{d(n)} = \frac{x}{\sqrt{\ln x}} \left( a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \dots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\ln x)^{N+1}}\right) \right),$$

где  $d(n)$  — классическая функция делителей,  $a_i$  — константы, в частности

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \ln \frac{p}{p-1} \sqrt{p(p-1)}.$$

*Ключевые слова:* кольцо многочленов над конечным полем, функция делителей.

*Библиография:* 7 названий.

**Для цитирования:**

В. В. Юделевич. О среднем значении функций, родственных функции делителей, в кольце многочленов над конечным полем // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 196–214.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.321

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-196-214

## On the mean value of functions related to the divisors function in the ring of polynomials over a finite field

V. V. Iudelevich

**Vitaly Viktorovich Iudelevich** — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: vitaliiyudelevich@mail.ru*

**Abstract**

Let  $g : \mathbb{F}_q[T] \rightarrow \mathbb{R}$  be a multiplicative function which values at the degrees of the irreducible polynomial, depends only on the exponent, such that  $g(P^k) = d_k$  polynomial  $P$  and for some arbitrary sequence of reals  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ . This paper regards the sum

$$T(N) = \sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ is monic}}} g(F),$$

where  $F$  ranges over polynomials of degree  $N$  with leading coefficient equal to 1 (unitary polynomials). For the sum  $T(N)$ , an exact formula is found, and various asymptotics are calculated in cases of

$q \rightarrow \infty$ ;  $q \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ;  $q^N \rightarrow \infty$ . In particular, the following asymptotic formulas are obtained

$$\sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ is monic}}} \tau(F^k) = \binom{k+N}{N} q^N + O_{N,k}(q^{N-1}), \quad N \geq 1, \quad q \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ is monic}}} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{q^N}{4^N} \left( \binom{2N}{N} - \frac{2}{3} \binom{2N-4}{N-2} q^{-1} + O\left(\frac{4^N}{\sqrt{N}} q^{-2}\right) \right), \quad N \rightarrow \infty, \quad q \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ is monic}}} \frac{1}{\tau(F)} = C_1 \cdot \frac{q^N}{4^N} + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_1 = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( \sqrt{q^{2l} - q^l} \ln \frac{q^l}{q^l - 1} \right)^{\pi_q(l)}, \quad q^N \rightarrow \infty;$$

where  $\tau(F)$  is a number of monic divisors of  $F$ , and  $\pi_q(l)$  is a number of monic irreducible polynomials of degree  $l$ . The second and third equalities are analogous for polynomials over a finite field of one of Ramanujan's results

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{d(n)} = \frac{x}{\sqrt{\ln x}} \left( a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \dots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\ln x)^{N+1}}\right) \right),$$

where  $d(n)$  is a classical divisor function, and  $a_i$  are some constants. In particular,

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \ln \frac{p}{p-1} \sqrt{p(p-1)}.$$

*Keywords:* the ring of polynomials over a finite field, divisor function.

*Bibliography:* 7 titles.

**For citation:**

V. V. Iudelevich, 2020, "On the mean value of functions related to the divisors function in the ring of polynomials over a finite field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 196–214.

**1. Введение**

Пусть  $q$  — степень простого числа,  $\mathbb{F}_q$  — конечное поле порядка  $q$ ,  $\mathbb{F}_q[T]$  — кольцо многочленов над полем  $\mathbb{F}_q$ . Как известно,  $\mathbb{F}_q[T]$  является евклидовым кольцом. Как следствие, в нём справедлива теорема об однозначном разложении на множители. Именно, каждый многочлен  $F$ , отличный от постоянной, представляется в виде

$$F = a \cdot P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_k^{e_k}, \quad (1)$$

где  $a \in \mathbb{F}_q^*$ ,  $P_1, P_2, \dots, P_k$  — различные неприводимые над полем  $\mathbb{F}_q$  многочлены с единичными старшими коэффициентами (унитарные многочлены), а  $e_1, e_2, \dots, e_k$  — положительные целые числа. Такое разложение единственно с точностью до порядка следования множителей.

Приведённая теорема позволяет рассматривать в кольце  $\mathbb{F}_q[T]$  аналоги известных из элементарной теории чисел мультипликативных функций.

Напомним, что для унитарного многочлена  $F$  функция делителей  $\tau(F)$  определяется равенством

$$\tau(F) = \sum_{D|F} 1,$$

где суммирование ведётся по всем унитарным многочленам, делящим  $F$ . Другими словами,  $\tau(F)$  есть число решений в унитарных многочленах уравнения  $F_1 F_2 = F$ . Обобщённая функция делителей  $\tau_m(F)$ ,  $m \geq 2$ , определяется аналогично — как число решений уравнения  $F_1 F_2 \dots F_m = F$ .

Символом  $\omega(F)$  будем обозначать число неприводимых сомножителей в разложении  $F$  без учёта кратности. Так, если (1) есть разложение многочлена  $F$  на неприводимые, то  $\omega(F) = k$ .

Для многочлена  $F$  степени  $n$  его норма  $N(F)$  определяется равенством  $N(F) = q^n$ . Ясно, что для любых многочленов  $F$  и  $G$  справедливо

$$N(FG) = N(F)N(G).$$

Арифметику кольца  $\mathbb{F}_q[T]$  описывает дзета-функция  $\zeta_q(s)$  этого кольца.

Если  $s = \sigma + it$ ,  $\sigma > 1$ , то  $\zeta_q(s)$  задаётся равенством

$$\zeta_q(s) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ F \text{ унитарный}}} \frac{1}{N^s(F)}. \quad (2)$$

Собирая многочлены одинаковой степени в сумме (2), получим

$$\zeta_q(s) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ F \text{ унитарный}}} \frac{1}{N^s(F)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{q^{ns}} = \frac{1}{1 - q^{1-s}}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что функция  $(1 - q^{1-s})^{-1}$  является аналитическим продолжением  $\zeta_q(s)$  на всю комплексную плоскость за исключением точек вида

$$s_k = 1 + \frac{2\pi k}{\ln q} i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

в каждой из которых  $\zeta_q(s)$  имеет простой полюс с вычетом равным  $(\ln q)^{-1}$ .

Из теоремы о единственности разложения следует, что  $\zeta_q(s)$  обладает эйлеровским произведением, то есть в области  $\operatorname{Re} s > 1$  справедливо равенство

$$\zeta_q(s) = \prod_{P \in \mathbb{F}_q[T]} (1 - N^{-s}(P))^{-1}, \quad (4)$$

в котором произведение распространено на все неприводимые унитарные многочлены.

Представляет интерес исследование средних значений мультипликативных функций над кольцом  $\mathbb{F}_q[T]$ . Впервые подобные задачи были рассмотрены Л. Карлитцем. В работе [1] им были получены точные формулы для средних значений некоторых мультипликативных функций.

Возможность получения точных (а не асимптотических) формул в задачах такого рода объясняется тем, что аналог дзета-функции для кольца  $\mathbb{F}_q[T]$  имеет очень простой вид, указанный в (3), и тем обстоятельством, что соответствующий производящий ряд Дирихле  $\Phi(s)$  представляется в виде

$$\Phi(s) = (\zeta_q(n_1 s))^{m_1} \dots (\zeta_q(n_k s))^{m_k},$$

где  $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \geq 1$  — целые числа. Так, задача нахождения величины

$$\sum_{\deg F=n} \tau_m(F) \quad (5)$$

сводится к подсчёту коэффициента при  $q^{-ns}$  ряда

$$\zeta_q^m(s) = \frac{1}{(1 - q^{1-s})^m}.$$

Величина (5) является аналогом суммы

$$\sum_{n \leq x} d_m(n), \quad (6)$$

исследование которой составляет предмет обобщённой проблемы делителей Дирихле (здесь  $d_m(n)$  — классическая функция делителей, равная числу решений уравнения  $x_1 x_2 \dots x_m = n$  в натуральных числах  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ). Наряду с (6) исследуются и суммы

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{d_m(n)}, \quad (7)$$

(см.: Рамануджан [2]), для которых получаются асимптотические выражения вида

$$\frac{x}{(\ln x)^{1-\frac{1}{m}}} \left( a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \dots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N \left( \frac{1}{(\ln x)^{N+1}} \right) \right),$$

где  $x \rightarrow +\infty$ ,  $N \geq 0$  — произвольное фиксированное число,  $a_0, a_1, \dots, a_N, \dots$  — некоторые постоянные.

Пусть  $g : \mathbb{F}_q[T] \rightarrow \mathbb{R}$  — мультипликативная функция, значения которой на степенях неприводимых многочленов зависят лишь от показателей степеней, то есть

$$d_k = g(P^k) \quad (8)$$

для некоторой фиксированной последовательности  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Будем предполагать также, что ряд

$$f(t) = f_g(t) = 1 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots + d_k t^k + \dots \quad (9)$$

сходится в некотором круге с центром в нуле. Пусть далее,

$$\ln f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \quad (10)$$

а последовательность  $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$  определена по правилу

$$f(t)(1-t)^{h_1}(1-t^2)^{h_2} \dots (1-t^k)^{h_k} = 1 + h_{k+1}t^{k+1} + \dots \quad (11)$$

Легко видеть, что  $h_1 = d_1$ . Положим, наконец,

$$T(N) = T(N; g) = \sum_{\deg F=N} g(F),$$

где  $F$  пробегает унитарные многочлены степени  $N$ . Основными результатами работы являются следующие утверждения.

**ТЕОРЕМА 1.** *Имеет место равенство*

$$T(N) = A_0(N)q^N + A_1(N)q^{N-1} + \dots + A_{N-1}(N)q,$$

где

$$A_l(N) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+(l+1)k_{l+1}=N \\ k_2+2k_3+\dots+l k_{l+1}=l}} \binom{-h_1}{k_1} \binom{-h_2}{k_2} \dots \binom{-h_{l+1}}{k_{l+1}} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{l+1}}, \quad (12)$$

а величины  $h_i$  определены в (11).

В частности, при любом фиксированном  $N$ , любом  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , и  $q \rightarrow \infty$

$$T(N) = A_0(N)q^N + A_1(N)q^{N-1} + \dots + A_{n-1}(N)q^{N-n+1} + O_N(q^{N-n}).$$

**ТЕОРЕМА 2.** *Пусть  $N \geq 190$ ,  $0 < d_1 < 1$  и при всех  $k \geq 1$*

$$k|a_k| \leq 1, \quad (13)$$

где числа  $d_k$  и  $a_k$  определены в (8) и (10) соответственно.

Тогда при  $h \in [1, \frac{N}{36 \ln N}]$  и  $q \geq (17h)^{12h+9}$  имеет место равенство

$$T(N) = A_0(N)q^N + A_1(N)q^{N-1} + \dots + A_{h-1}(N)q^{N-h+1} + O\left(d_1 p(h) \frac{q^{N-h}}{N^{1-d_1}}\right), \quad (14)$$

где величины  $A_l(N)$ ,  $0 \leq l \leq h-1$  определены в (12), причём

$$|A_l(N)| \leq \frac{3d_1 p(l)}{N^{1-d_1}},$$

$p(l)$  — число разбиений  $l$ , и константа под знаком  $O$  не превосходит 3.1.

В частности, равенство (14) справедливо при  $q \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$  и  $h$  фиксированном, а также при  $q \rightarrow \infty$ ,  $N \geq 190$  фиксированном и  $h \in [1, \frac{N}{36 \ln N}]$ .

После доказательства этих утверждений мы приводим один технический результат из работы [4] Городецкого, откуда получается асимптотическое разложение  $T(N)$  при  $q^N \rightarrow \infty$ . Мы доказываем, что функции  $g$ , для которых  $d_1 \in (0, 1)$  и выполнено неравенство (13), удовлетворяют также и этому техническому утверждению. Как следствие, соответствующая сумма  $T(N)$  будет иметь асимптотическое разложение при  $q^N \rightarrow \infty$ . Работу мы завершаем приведением примеров функций  $g$  и разложений соответствующих им сумм  $T(N)$ .

Автор благодарит своего научного руководителя — д.ф.м.н. Максима Александровича Королёва, за постановку задачи и ценные обсуждения.

## 2. Доказательство теоремы 1

Положим

$$\Phi(s) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ F \text{ унитарен}}} \frac{g(F)}{N(F)^s} = \sum_{N=0}^{+\infty} T(N)q^{-Ns}.$$

В силу мультипликативности  $g$  имеем

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \prod_{\substack{P \text{ неприводим} \\ \text{и унитарен}}} \left( 1 + \frac{g(P)}{N(P)^s} + \frac{g(P^2)}{N(P^2)^s} + \dots \right) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{d_1}{q^{ls}} + \frac{d_2}{q^{2ls}} + \dots \right)^{\pi_q(l)} = \\ &= \prod_{l=1}^{+\infty} (f(q^{-ls}))^{\pi_q(l)}, \end{aligned}$$

где  $\pi_q(l)$  — число неприводимых над полем  $\mathbb{F}_q$  унитарных многочленов степени  $l$ . Положим также

$$f_{k+1}(t) = f(t)(1-t)^{h_1}(1-t^2)^{h_2} \dots (1-t^k)^{h_k}. \quad (15)$$

Тогда при  $k = n$  и  $t = q^{-ls}$  будем иметь

$$f(q^{-ls}) = f_{n+1}(q^{-ls})(1-q^{-ls})^{-h_1} \dots (1-q^{-nl})^{-h_n}.$$

Отсюда

$$\Phi(s) = (\zeta_q(s))^{h_1} (\zeta_q(2s))^{h_2} \dots (\zeta_q(ns))^{h_n} \prod_{l=1}^{+\infty} (f_{n+1}(q^{-ls}))^{\pi_q(l)}.$$

Положим теперь  $z = q^{1-s}$ ,  $T_0(N) = q^{-N}T(N)$ . Тогда для  $\xi(z)$ , определённой равенством

$$\xi(z) = \sum_{N=0}^{+\infty} T_0(N)z^N,$$

будем иметь

$$\xi(z) = (1-z)^{-h_1} \left( 1 - \frac{z^2}{q} \right)^{-h_2} \dots \left( 1 - \frac{z^n}{q^{n-1}} \right)^{-h_n} \prod_{l=1}^{+\infty} \left( f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) \right)^{\pi_q(l)}. \quad (16)$$

Положим

$$\Pi(z) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) \right)^{\pi_q(l)} = \exp \left\{ \sum_{l=1}^{+\infty} \pi_q(l) \ln f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) \right\}.$$

Определим коэффициенты  $c_\nu$  из разложения

$$\ln f_{n+1}(t) = \sum_{\nu=n+1}^{+\infty} c_\nu t^\nu, \quad (17)$$

тогда из равенства

$$\ln f_{n+1}(t) = \ln f(t) + h_1 \ln(1-t) + \dots + h_n \ln(1-t^n)$$

сравнением коэффициентов при  $t^\nu$ ,  $\nu \geq n+1$  получим

$$c_\nu = a_\nu - \sum_{\substack{d|\nu \\ d \leq n}} \frac{dh_d}{\nu}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \ln \Pi(z) &= \sum_{l=1}^{+\infty} \pi_q(l) \ln f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l} \sum_{d|l} \mu(d) q^{\frac{l}{d}} \sum_{\nu \geq n+1} c_\nu \frac{z^{\nu l}}{q^{\nu l}} = \\ &= \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\delta=1}^{+\infty} \frac{q^\delta}{\delta} \sum_{\nu \geq n+1} c_\nu \frac{z^{\nu d \delta}}{q^{\nu d \delta}} = \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{q^k} \left\{ \sum_{\substack{\nu d \delta = k \\ \nu \geq n+1}} \frac{\mu(d) q^\delta c_\nu}{d \delta} \right\} z^k = \sum_{k \geq n+1} A_k z^k, \end{aligned}$$

где

$$A_k = \frac{1}{q^k} \left\{ \sum_{\substack{\nu d \delta = k \\ \nu \geq n+1}} \frac{\mu(d) q^\delta c_\nu}{d \delta} \right\}. \quad (18)$$

Определим коэффициенты  $B_k$  равенством

$$\prod_{l=1}^{+\infty} \left( f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) \right)^{\pi_q(l)} = \exp \left\{ \sum_{k \geq n+1} A_k z^k \right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k. \quad (19)$$

Легко видеть, что  $B_0 = 1$  и  $B_1 = B_2 = \dots = B_n = 0$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \xi(z) &= (1-z)^{-h_1} \left( 1 - \frac{z^2}{q} \right)^{-h_2} \dots \left( 1 - \frac{z^n}{q^{n-1}} \right)^{-h_n} \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k = \\ &= \left( \sum_{k_1=0}^{+\infty} (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} z^{k_1} \right) \left( \sum_{k_2=0}^{+\infty} (-1)^{k_2} \binom{-h_2}{k_2} \frac{z^{2k_2}}{q^{k_2}} \right) \dots \\ &\quad \dots \left( \sum_{k_n=0}^{+\infty} (-1)^{k_n} \binom{-h_n}{k_n} \frac{z^{nk_n}}{q^{(n-1)k_n}} \right) \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k. \end{aligned}$$

Сравнением коэффициентов при  $z^N$  получим

$$T_0(N) = \sum_{\substack{k+k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k, k_i \geq 0}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n} B_k}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}}.$$

Разобьём эту сумму на 3 части:

$$T_0(N) = S_1 + S_2 + S_3. \quad (20)$$

В  $S_1$  войдут те слагаемые, для которых  $k = 0$  и

$$k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n \leq n-1.$$

В  $S_2$  войдут слагаемые, для которых  $k = 0$  и

$$k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n \geq n.$$

Наконец, в  $S_3$  войдут остальные слагаемые из  $T_0(N)$ , а именно те, для которых  $k$  отлично от нуля. Поскольку  $B_k = 0$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ , то в  $S_3$  войдут в точности те слагаемые, для

которых  $k \geq n + 1$ . Замечаем теперь, что

$$S_1 = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n \leq n-1}} \binom{-h_1}{k_1} \cdots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n}}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}} =$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} q^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+(l+1)k_{l+1}=N \\ k_2+2k_3+\dots+l k_{l+1}=l}} \binom{-h_1}{k_1} \cdots \binom{-h_{l+1}}{k_{l+1}} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{l+1}} = \sum_{l=0}^{n-1} A_l(N) q^{-l}.$$

Положив теперь  $n = N$  получим, что суммы  $S_2$  и  $S_3$  окажутся пустыми. Отсюда

$$T_0(N) = S_1 = \sum_{l=0}^{N-1} A_l(N) q^{-l},$$

и доказательство завершается домножением полученного равенства на  $q^N$ .

### 3. Доказательство теоремы 2

Логарифмируя равенство (15) и сравнивая коэффициенты при  $t^k$ , получим

$$a_k = \sum_{d|k} \frac{dh_d}{k},$$

откуда в силу формулы обращения Мёбиуса

$$h_k = \sum_{d|k} \frac{\mu(d)a_{k/d}}{d}.$$

В силу неравенства (13) при всех  $k \geq 1$  имеем

$$|h_k| = \left| \sum_{d|k} \frac{\mu(d)a_{k/d}}{d} \right| \leq \frac{\tau(k)}{k} \leq 1.$$

Далее, в силу только что доказанной оценки и неравенства (13) для величины  $c_\nu$ , определённой в (17), имеем следующую оценку

$$|c_\nu| = \left| a_\nu - \sum_{\substack{d|\nu \\ d \leq n}} \frac{dh_d}{\nu} \right| \leq \frac{1}{\nu} \left( 1 + \sum_{d \leq n} \tau(d) \right) \leq \frac{n \ln n + n + 1}{\nu} = \frac{b_1(n)}{\nu}.$$

Оценим теперь величины  $A_k$ , определённые в (18):

$$|A_k| = \frac{1}{q^k} \left| \sum_{\substack{d\delta\nu=k \\ \nu \geq n+1}} \frac{q^\delta \mu(d)c_\nu}{d\delta} \right| \leq \frac{b_1(n)}{kq^k} \sum_{\substack{\nu|k \\ \nu \geq n+1}} \sum_{d|\frac{k}{\nu}} q^{\frac{k}{\nu d}} \leq \frac{4b_1(n)}{kq^{\frac{n}{n+1}k}}, \quad k \geq n + 1. \quad (21)$$

Перейдём к оценке величин  $B_k$ , определённых в (19). При  $k \geq n + 1$  имеем

$$B_k = \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \geq n+1 \\ i_1 + \dots + i_r = k}} A_{i_1} \cdots A_{i_r}.$$

Пусть

$$I(k, r) = \#\{(i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{Z}^r : i_m \geq n+1, i_1 + \dots + i_r = k\},$$

тогда

$$I(k, r) = \binom{k - nr - 1}{r - 1} < \frac{k^r}{(r - 1)!}, \quad 1 \leq r \leq \frac{k}{n+1}.$$

Далее, при условиях  $i_m \geq n+1$  и  $i_1 + \dots + i_r = k$  выполнено неравенство

$$|A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}| \leq \left( \frac{4b_1(n)}{n+1} \right)^r \frac{1}{q^{\frac{n}{n+1}k}} = \frac{(b(n))^r}{q^{\frac{n}{n+1}k}},$$

где

$$b(n) = \frac{4(n \ln n + n + 1)}{n + 1} < 4(\ln n + 1).$$

Отсюда

$$|B_k| \leq \sum_{1 \leq r \leq \frac{k}{n+1}} \frac{I(k, r)}{r!} \max_{\substack{i_m \geq n+1 \\ i_1 + \dots + i_r = k}} |A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}| \leq \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(kb(n))^r}{r!(r-1)!} \frac{1}{q^{\frac{n}{n+1}k}} < \frac{e^{kb(n)}}{q^{\frac{n}{n+1}k}}. \quad (22)$$

Таким образом,

$$|B_k| \leq \frac{e^{kb(n)}}{q^{\frac{n}{n+1}k}} \quad (23)$$

Напомним, что

$$T_0(N) = \sum_{\substack{k+k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k, k_i \geq 0}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n} B_k}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}}$$

и

$$T_0(N) = S_1 + S_2 + S_3,$$

где величины  $S_i$  были определены ранее (см. стр. 202). В нашем случае сумма  $S_1$  даст вклад в главный член, а суммы  $S_2$  и  $S_3$  войдут в остаток.

Возьмём параметры  $q \geq (en)^{2n+9}$ ,  $6 \leq n \leq \frac{N}{6 \ln N}$ ,  $n = 6h$ ,  $h \geq 1$ . Рассмотрим сначала сумму  $S_1$ :

$$S_1 = \sum_{l=0}^{n-1} A_l(N) q^{-l},$$

где

$$A_l(N) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+(l+1)k_{l+1}=N \\ k_2+2k_3+\dots+l k_{l+1}=l}} \binom{-h_1}{k_1} \binom{-h_2}{k_2} \dots \binom{-h_{l+1}}{k_{l+1}} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{l+1}}.$$

Для любого  $m \geq 1$

$$0 < (-1)^m \binom{-h_1}{m} = (-1)^m \binom{-d_1}{m} = \frac{d_1}{m} \prod_{r=1}^{m-1} \left( 1 + \frac{d_1}{r} \right) \leq \frac{d_1}{m} \exp \left\{ d_1 \sum_{r=1}^{m-1} \frac{1}{r} \right\} \leq \frac{d_1 e^{d_1}}{m^{1-d_1}}.$$

С другой стороны, в силу условия  $d_1 \in (0, 1)$  справедлива оценка

$$(-1)^m \binom{-h_1}{m} \leq d_1. \quad (24)$$

Далее, в силу неравенства  $|h_i| \leq 1$  для каждого  $i$  имеет место следующая оценка

$$\left| \binom{-h_i}{k_i} \right| \leq 1.$$

Перейдём к оценке величины  $A_l(N)$ . Пусть  $l \geq 1$ , тогда определяя величину  $\theta$  из равенства

$$2k_2 + 3k_3 + \dots + (l+1)k_{l+1} = \theta l,$$

будем иметь  $1 \leq \theta \leq 2$ . Отсюда

$$k_1 = N - 2k_2 - \dots - (l+1)k_{l+1} = N - \theta l > N - 2n.$$

Поскольку  $n \leq \frac{N}{6 \ln N}$  и  $N \geq 190$ , то

$$\begin{aligned} 0 < (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} &\leq \frac{d_1 e^{d_1}}{(N-2n)^{1-d_1}} = \frac{d_1 e^{d_1}}{N^{1-d_1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{2n}{N}\right)^{1-d_1}} < \\ &\frac{d_1 e^{d_1}}{N^{1-d_1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3 \ln N}\right)^{1-d_1}} \leq \frac{d_1 e^{d_1}}{N^{1-d_1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3 \ln 190}\right)^{1-d_1}} < \frac{3d_1}{N^{1-d_1}}. \end{aligned}$$

Так как в сумме  $A_l(N)$  количество слагаемых равно  $p(l)$  — числу разбиений  $l$ , то получаем

$$|A_l(N)| \leq \frac{3d_1 p(l)}{N^{1-d_1}}.$$

Для  $l = 0$  эта оценка также выполнена, поскольку

$$A_0(N) = (-1)^N \binom{-h_1}{N} \leq \frac{d_1 e^{d_1}}{N^{1-d_1}} < \frac{3d_1 p(0)}{N^{1-d_1}}.$$

Оценим теперь сумму  $S_2$ :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n \geq n}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n}}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}} = \\ &\sum_{n \leq l \leq N} q^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n=l}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} (-1)^{k_1+\dots+k_n} = \\ &\left( \sum_{n \leq l \leq \frac{N}{3}} + \sum_{\frac{N}{3} < l \leq N} \right) q^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n=l}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} (-1)^{k_1+\dots+k_n} = W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Определяя в сумме  $W_1$  величину  $\theta_1$  из равенства

$$2k_2 + \dots + nk_n = \theta_1 l,$$

будем иметь  $1 \leq \theta_1 \leq 2$  и  $k_1 = N - \theta_1 l \geq N/3$ . Отсюда

$$0 < (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \leq \frac{d_1 e^{d_1} 3^{1-d_1}}{N^{1-d_1}} \leq \frac{3d_1}{N^{1-d_1}}.$$

Остальные множители  $|\binom{-h_i}{k_i}|$  в сумме  $W_1$  оценим единицей. Поскольку число решений уравнения  $k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n = l$  с неизвестными  $k_i$  не превосходит  $\frac{l^{n-1}}{(n-1)!}$ , то будем иметь

$$|W_1| \leq \frac{3d_1}{N^{1-d_1}} \sum_{n \leq l \leq \frac{N}{3}} \frac{l^{n-1}}{(n-1)!q^l} = \frac{3d_1}{N^{1-d_1}(n-1)!q^n} \sum_{l=0}^{\frac{N}{3}-n} \frac{(l+n)^{n-1}}{q^l}.$$

Так как неравенство  $(l+n)^{n-1} \leq q^{l/2}$  выполнено при  $q \geq (n+1)^{2n-2}$ , то

$$|W_1| \leq \frac{3d_1}{N^{1-d_1}(n-1)!q^n} \left( n^{n-1} + \sum_{l=1}^{+\infty} q^{-l/2} \right) = \frac{3d_1}{N^{1-d_1}(n-1)!q^n} \left( n^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{q}-1} \right) < \frac{3.1d_1n^n}{N^{1-d_1}q^{N/3}}. \quad (25)$$

В сумме  $W_2$  множители  $|\binom{-h_i}{k_i}|, i \neq 1$  оценим единицей, а для величины  $(-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1}$  воспользуемся оценкой (24). Тогда

$$|W_2| \leq \frac{d_1}{q^{N/3}} \sum_{N/3 < l \leq N} \frac{l^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{d_1N^n}{(n-1)!q^{N/3}}.$$

Докажем вспомогательное неравенство

$$\frac{3.1d_1n^n}{n!N^{1-d_1}q^n} > \frac{3 \cdot 6^5 d_1 N^n}{(n-1)!q^{N/3}}.$$

Для этой цели достаточно показать, что  $n < \frac{\frac{N \ln q}{3 \ln N} - 1}{1 + \frac{\ln q}{\ln N}}$ . При  $N \geq 190$  имеем

$$\frac{\frac{N \ln q}{3 \ln N} - 1}{1 + \frac{\ln q}{\ln N}} \geq \frac{\frac{N \ln 2}{3 \ln N} - 1}{1 + \frac{\ln 2}{\ln N}} \geq \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln 190}\right)^{-1} \frac{\ln 2}{3} \frac{N}{\ln N} - \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln 190}\right)^{-1} > \frac{N}{6 \ln N} \geq n.$$

Отсюда получаем

$$|S_2| \leq |W_1| + |W_2| \leq \frac{3.1d_1(1 + \frac{1}{3 \cdot 6^5})n^n}{n!N^{1-d_1}q^n} < \frac{3.2d_1n^n}{n!N^{1-d_1}q^n}.$$

Переходим к оценке суммы  $S_3$ .

$$|S_3| = \left| \sum_{\substack{k+k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k \geq n+1}} \binom{-h_1}{k_1} \cdots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n} B_k}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}} \right| \leq \sum_{k_1=0}^{N-n-1} (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \sum_{\substack{k+2k_2+\dots+nk_n=N-k_1 \\ k \geq n+1}} \frac{|B_k|}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}}.$$

Заметим теперь, что

$$k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n \geq \frac{N - k - k_1}{2}.$$

Отсюда с учётом оценки (23) будем иметь

$$|S_3| \leq \sum_{k_1=0}^{N-7} (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \sum_{\substack{k+2k_2+\dots+nk_n=N-k_1 \\ k \geq n+1}} \frac{1}{q^{\frac{N-k_1}{2}+k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{b(n)}{\ln q}\right)}.$$

Так как

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{b(n)}{\ln q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{4(\ln n + 1)}{(2n+9)\ln(en)} > \frac{1}{2} - \frac{1}{7} - \frac{4}{21} = \frac{1}{6},$$

то вспоминая, что  $n = 6h$ , будем иметь

$$k \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{b(n)}{\ln q} \right) > \frac{n+1}{6} > h.$$

Поскольку число решений уравнения  $k + 2k_2 + \dots + nk_n = N - k_1$  с неизвестными  $k, k_2, \dots, k_n$  не превосходит  $\frac{(N-k_1)^n}{n!}$ , то

$$|S_3| \leq \left( \sum_{0 \leq k_1 \leq N/2} + \sum_{N/2 < k_1 \leq N-7} \right) (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \frac{(N-k_1)^n}{n!q^{\frac{N-k_1}{2}+h}} = W_3 + W_4.$$

Из оценки (24) получаем

$$|W_3| \leq \frac{d_1 N^{n+1}}{n!q^{\frac{N}{4}+h}}.$$

В сумме  $W_4$

$$0 < (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \leq \frac{d_1 e^{d_1} 2^{1-d_1}}{N^{1-d_1}} \leq \frac{d_1 e}{N^{1-d_1}}.$$

Отсюда

$$|W_4| \leq \frac{d_1 e}{N^{1-d_1} n! q^h} \sum_{N/2 < k_1 \leq N-7} \frac{(N-k_1)^n}{q^{\frac{N-k_1}{2}}} = \frac{d_1 e}{N^{1-d_1} n! q^h} \sum_{7 \leq l \leq N/2} \frac{l^n}{q^{l/2}}.$$

Так как  $q \geq (en)^{2n+9} > e^{\frac{4n \ln 7}{7}}$  при  $n \geq 6$ , то при  $l \geq 7$  выполнено неравенство  $l^n \leq q^{l/4}$ , отсюда

$$|W_4| \leq \frac{d_1 e}{N^{1-d_1} n! q^h} \sum_{l=7}^{+\infty} \frac{1}{q^{l/4}} = \frac{d_1 e}{N^{1-d_1} n! q^h (q^{7/4} - q^{3/2})}.$$

При  $q \geq (en)^{2n+9}$  и  $N \geq 190$  выполнено неравенство

$$\frac{N^{n+1}}{q^{N/4}} < \frac{e}{N^{1-d_1} (q^{7/4} - q^{3/2})},$$

тогда

$$|S_3| \leq |W_3| + |W_4| \leq \frac{2ed_1}{N^{1-d_1} n! q^h (q^{7/4} - q^{3/2})}.$$

Отсюда с учётом доказанных оценок

$$|S_2| + |S_3| \leq \frac{3.2d_1 n^n}{n! N^{1-d_1} q^n} + \frac{2ed_1}{n! N^{1-d_1} q^h (q^{7/4} - q^{3/2})} < \frac{4ed_1}{n! N^{1-d_1} (q^{7/4} - q^{3/2}) q^h}.$$

Итак, при  $q \geq (en)^{2n+9}$ ,  $6 \leq n \leq \frac{N}{6 \ln N}$ ,  $n = 6h$ ,  $h \geq 1$  имеем:

$$T_0(N) = A_0(N) + A_1(N)q^{-1} + \dots + A_{n-1}(N)q^{-n+1} + \Theta_1(h) \frac{1}{N^{1-d_1} q^h},$$

где

$$|\Theta_1(h)| \leq \frac{4ed_1}{(6h)!(q^{7/4} - q^{3/2})}.$$

Теперь

$$\left| A_h(N)q^{-h} + A_{h+1}(N)q^{-h-1} + \dots + A_{6h-1}(N)q^{-6h+1} + \frac{\Theta_1(h)}{N^{1-d_1}q^h} \right| \leq \frac{d_1q^{-h}}{N^{1-d_1}} \left( 3p(h) + 3p(n) \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{q^l} + \frac{12}{6!(q^{7/4} - q^{3/2})} \right) \leq \frac{3.1d_1p(h)}{q^h N^{1-d_1}}$$

при  $q \geq (en)^{2n+9}$ . Таким образом, равенство

$$T_0(N) = A_0(N) + A_1(N)q^{-1} + \dots + A_{h-1}(N)q^{-h+1} + \frac{\Theta(h)}{N^{1-d_1}q^h}, \quad |\Theta(h)| \leq 3.1d_1p(h),$$

выполняется при  $q \geq (6eh)^{12h+9}$  и  $1 \leq h \leq \frac{N}{36 \ln N}$ . Доказательство завершается домножением обеих частей полученного равенства на  $q^N$ .

#### 4. Следствие из теоремы Городецкого

В работе [4] Городецкий доказывает следующее утверждение

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$a(x) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_k}{k} x^k \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$b(x) = \left( 1 - \frac{x}{\beta} \right)^{-c_1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad c_1 \in (0, 1)$$

степенные ряды с радиусами сходимости не меньше  $\alpha$  и ровно  $\beta$  соответственно. Пусть при этом  $\alpha > \beta > 0$  и  $r = \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , и для некоторого положительного  $c_2$  имеет место неравенство  $|\tilde{a}_k| \leq c_2 \alpha^{-k}$ . Тогда при любом фиксированном  $n \geq 0$  и  $N > n$  для коэффициента при  $x^N$  в произведении  $a(x)b(x)$  имеет место равенство

$$[x^N]a(x)b(x) = b_N \left( a(\beta) + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{k-c_1}{k}}{\binom{N+c_1-1}{k}} \frac{\beta^k}{k!} a^{(k)}(\beta) + E \right),$$

где  $E \ll_{n,c_1,c_2} \left( \frac{r}{N} \right)^{n+1}$ .

Применим эту теорему к функции  $g(F)$ , для которой выполнено неравенство (13). В формуле (16) положим  $x = zq^{-1} = q^{-s}$ ,  $n = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} T(N)x^N &= \left( 1 - \frac{x}{q^{-1}} \right)^{-d_1} \exp \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \pi_q(l) \ln f_2(x^l) \right\} = \\ &= \left( 1 - \frac{x}{q^{-1}} \right)^{-d_1} \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} A_k q^k x^k \right\} = \left( 1 - \frac{x}{q^{-1}} \right)^{-d_1} a(x). \end{aligned}$$

Положим  $\beta = q^{-1}$ ,  $c_1 = d_1$ . Пусть  $R$  — радиус сходимости ряда  $\sum_{k=2}^{\infty} A_k q^k x^k$ , тогда в силу оценки (18) будем иметь

$$R^{-1} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|A_k|q^k} \leq \sqrt{q},$$

отсюда  $R \geq \frac{1}{\sqrt{q}}$ . Положим  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{q}}$ , тогда  $\alpha > \beta > 0$  и

$$r = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{q}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далее, пусть  $\tilde{a}_k = kA_kq^k$ , тогда в силу оценки (21) имеем

$$|\tilde{a}_k| \leq c_2(\sqrt{q})^k, \quad c_2 = 4b_1(1) = 8.$$

Таким образом, все условия теоремы 3 выполнены, и мы имеем доказанным следующее

**СЛЕДСТВИЕ.** Пусть  $g$  — мультипликативная функция, такая что для любого неприводимого многочлена  $P$  и любого целого  $k \geq 1$  выполнено равенство  $d_k = g(P^k)$ , где  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$  — фиксированная последовательность вещественных чисел. Положим

$$f(x) = 1 + d_1x + d_2x^2 + \dots$$

Далее, пусть  $0 < d_1 < 1$  и при  $k \geq 1$  выполнено неравенство  $k|a_k| \leq 1$ , где числа  $a_k$  были определены в (10). Тогда при  $N \geq n + 1$  имеет место равенство

$$T(N) = (-1)^N \binom{-d_1}{N} q^N \left( a(q^{-1}) + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{k-d_1}{k}}{\binom{N+d_1-1}{k}} \frac{q^{-k}}{k!} a^{(k)}(q^{-1}) \right) + R_n, \quad (26)$$

где  $R_n \ll_n \frac{q^N}{N^{1-d_1}} \left( \frac{1}{\sqrt{q}N} \right)^{n+1}$ , и  $a(x)$  определяется бесконечным произведением

$$a(x) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left\{ f(x^l)(1-x^l)^{d_1} \right\}^{\pi_q(l)},$$

сходящемся в круге с центром в нуле и радиусом  $r = \frac{1}{\sqrt{q}}$ .

Соответствующий остаток, который получается из теоремы 2, имеет вид

$$R'_n \ll_n \frac{q^N}{N^{1-d_1}} \frac{1}{q^{n+1}}.$$

При выполнении условий теоремы 2 имеем  $R'_n = o(R_n)$  при  $q \rightarrow \infty$  и  $N \geq 190$  фиксированном. Далее, в случае если  $q \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$R'_n \ll_n R_n \quad \text{при } N^2 \ll q, \quad R_n \ll_n R'_n \quad \text{при } q \ll N^2.$$

Заметим, что

$$a(q^{-1}) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( f_2(q^{-l}) \right)^{\pi_q(l)} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} B_k = 1 + O\left(\frac{1}{q}\right).$$

Отсюда следует, что формула (26) даёт асимптотическое разложение  $T(N)$  при условии  $q^N \rightarrow \infty$  в отличие от формулы (14), в которой требуется, чтобы  $q \rightarrow \infty$ . В частности, формула (26) даёт разложение  $T(N)$  при фиксированном  $q$  и  $N \rightarrow \infty$ .

## 5. Примеры

Вычисления показывают, что

- $h_1 = d_1$ ;
- $h_2 = d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2}$ ;
- $h_3 = d_3 - d_1 d_2 + \frac{d_1(d_1^2 - 1)}{3}$ ;

Указанные величины  $h_k$  позволяют выписать первые три значения  $A_l(N)$ .

- $A_0(N) = \binom{d_1 + N - 1}{N}$ ;
- $A_1(N) = \binom{d_1 + N - 3}{N - 2} \left( d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2} \right)$ ;
- $A_2(N) = \binom{d_1 + N - 4}{N - 3} \left( d_3 - d_1 d_2 + \frac{d_1(d_1^2 - 1)}{3} \right) + \binom{d_1 + N - 5}{N - 4} \left( 1 + d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2} \right)$ ;

В свою очередь, указанные величины  $A_l(N)$ , позволяют выписать первые три слагаемых в главном члене асимптотики, получающейся из теорем 1 и 2. Именно, имеет место формула

$$T(N) = \binom{d_1 + N - 1}{N} q^N \left( 1 + \frac{\binom{N}{2}}{\binom{d_1 + N - 1}{2}} \left( d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2} \right) q^{-1} + \left\{ \frac{\binom{N}{3}}{\binom{d_1 + N - 1}{3}} \left( d_3 - d_1 d_2 + \frac{d_1(d_1^2 - 1)}{3} \right) + \frac{\binom{N}{4}}{\binom{d_1 + N - 1}{4}} \left( 1 + d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2} \right) \right\} q^{-2} \right) + R,$$

где  $R \ll_N q^{N-3}$  при выполнении условий теоремы 1 и  $|R| \leq 9.3 \cdot d_1 \frac{q^{N-3}}{N^{1-d_1}}$  при выполнении условий теоремы 2.

Нашей ближайшей целью будет установление легко проверяемых достаточных условий выполнения неравенства (13) теоремы 2. Для этого нам понадобится рекуррентное соотношение для последовательности  $a_k$ , определённой в (10). Для функции  $f$ , определённой в (9), имеем равенство

$$\frac{d \ln f(t)}{dt} f(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Раскладывая обе части равенства в ряд по степеням  $t$  и сравнивая коэффициенты при  $t^n$ , после несложных преобразований получим

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - \sum_{k=1}^n k a_k d_{n+1-k} \right), \quad n \geq 0,$$

в частности  $a_1 = d_1$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.** Пусть  $g$  — мультипликативная функция, такая что для любого неприводимого многочлена  $P$  и любого целого  $k \geq 1$  выполнено равенство  $d_k = g(P^k)$ , где  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  — фиксированная последовательность. Пусть при этом

- $d_1 \in (0, 1)$ ;
- $d_{k+1} \leq d_k$  при  $k \geq 1$ ;

- $kd_k \leq (k+1)d_{k+1}$  при  $k \geq 1$ .

Тогда для суммы  $T(N)$  имеют место разложения (14) и (26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что при  $k \geq 1$

$$0 < a_k < \frac{1}{k}. \quad (27)$$

Доказательство проведём индукцией по величине  $k$ . При  $k = 1$  имеем

$$a_1 = d_1 \in (0, 1).$$

Пусть теперь неравенство (27) выполнено при  $k = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 1$ . Докажем, что неравенство выполнено и при  $k = n + 1$ . В силу условий предложения и предположения индукции имеем

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - \sum_{k=1}^n ka_k d_{n+1-k} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - nd_n + nd_n - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k d_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k (d_{n-k} - d_{n+1-k}) - na_n d_1 \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - nd_n + (1-d_1)na_n + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k (d_{n-k} - d_{n+1-k}) \right) > 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу предположения индукции

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - nd_n + (1-d_1)na_n + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k (d_{n-k} - d_{n+1-k}) \right) < \\ &= \frac{1}{n+1} \left( n(d_{n+1} - d_n) + d_{n+1} + (1-d_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{n-k} - d_{n+1-k}) \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} ((n+1)(d_{n+1} - d_n) + 1) \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ В. Пусть  $g$  — мультипликативная функция, такая что для любого неприводимого многочлена  $P$  и любого целого  $k \geq 1$  выполнено равенство  $d_k = g(P^k)$ , где  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  — фиксированная последовательность. Тогда, если  $d_1 \in (0, 1)$  и для любого  $n \geq 1$  имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |d_k| + (n+1)|d_{n+1}| \leq 1, \quad (28)$$

то для суммы  $T(N)$  имеют место разложения (14) и (26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что неравенство (28) влечёт неравенство (13). Доказательство проведём индукцией по величине  $n$ . При  $n = 1$  имеем  $a_1 = d_1 \in (0, 1)$ . Отсюда  $|a_1| \leq 1$ .

Пусть теперь доказано, что  $|a_k| \leq \frac{1}{k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $n \geq 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq \frac{1}{n+1} \left( |d_{n+1}|(n+1) + \sum_{k=1}^n |ka_k d_{n+1-k}| \right) \leq \\ &= \frac{1}{n+1} \left( |d_{n+1}|(n+1) + \sum_{k=1}^n |d_{n+1-k}| \right) \leq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Приведём примеры функций  $g$ , удовлетворяющих условиям предложения А:

- $g_1(F) = (\tau(F))^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .
- $g_2(F) = c^{\omega(F)}$ ,  $0 < c < 1$ .
- $g_3(F) = \frac{\tau_m(F)}{\tau_{m+1}(F)}$ ,  $m \geq 2$ .
- $g_4(F) = \frac{1}{\tau(F^r)}$ ,  $r \geq 1$ .

Приведём также примеры функций  $g$ , для которых выполнено предложение В:

- $g_5(F) = (\tau(F))^{-\alpha}$ ,  $\alpha \geq 2$ .
- $g_6(F) = \frac{1}{\tau_m(F)}$ ,  $m \geq 3$ .
- $g_7(F) = \frac{1}{(\tau_{m_1}(F))^{\gamma_1} \dots (\tau_{m_k}(F))^{\gamma_k}}$ ,  $k \geq 2$ ,  $\gamma_i \geq 1$ .
- $g_8(F) = \frac{1}{\tau_m(F^r)}$ ,  $r \geq 1$ ,  $m \geq 3$ .

Для функции  $g_1$  условие  $kd_k \leq (k+1)d_{k+1}$  равносильно неравенству

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^\alpha \leq 1 + \frac{1}{k}.$$

Остальные условия для  $g_1$  очевидно выполнены. Для функций  $g_k$ ,  $k \in \{2, 3, 4\}$  условия предложения А легко проверяются.

Для функции  $g_5$  имеем  $d_k = g_5(P^k) = \frac{1}{(k+1)^\alpha}$ . Отсюда при  $\alpha \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} + \frac{n+1}{(n+2)^\alpha} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} = \\ &\frac{\pi^2}{6} - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} \leq \frac{\pi^2}{6} - 1 - \int_{n+2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} \leq \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1. \end{aligned}$$

Для функции  $g_6$  получаем

$$d_k = g_6(P^k) = \frac{1}{\binom{m+k-1}{m-1}} \leq \frac{2}{(k+1)(k+2)}, \quad m \geq 3.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)(k+2)} + \frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)} = 1 - \frac{4}{(n+2)(n+3)} < 1.$$

Для функций  $g_7$  и  $g_8$  предложение В выполнено в силу очевидных неравенств

$$g_7(P^k) \leq g_5(P^k) \text{ при } \alpha = 2, \quad g_8(P^k) \leq g_6(P^k).$$

Перейдём к конкретным примерам. Всюду ниже  $F$  пробегает унитарные многочлены степени  $N$ . Следующие два примера относятся к теореме 2. При  $q \rightarrow \infty$  и  $N \geq 710$  фиксированном и при  $q \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{2^{\omega(F)}} = \frac{q^N}{4^N} \left( \binom{2N}{N} + 2 \binom{2N-4}{N-2} q^{-1} + \left( 8 \binom{2N-6}{N-3} + 18 \binom{2N-8}{N-4} \right) q^{-2} \right) + R_1;$$

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{q^N}{4^N} \left( \binom{2N}{N} - \frac{2}{3} \binom{2N-4}{N-2} q^{-1} - \left( \frac{8}{3} \binom{2N-6}{N-3} + \frac{46}{9} \binom{2N-8}{N-4} \right) q^{-2} \right) + R_2;$$

где  $R_1, R_2 \ll \frac{q^{N-3}}{\sqrt{N}}$  и константа под знаком  $\ll$  не превосходит 5.

Следующие два примера относятся к следствию из теоремы 3. При  $q^N \rightarrow \infty$  имеем

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{2^{\omega(F)}} = C_0 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_0 = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( \frac{2q^l - 1}{2\sqrt{q^{2l} - q^l}} \right)^{\pi_q(l)};$$

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{\tau(F)} = C_1 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_1 = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( \sqrt{q^{2l} - q^l} \ln \frac{q^l}{q^l - 1} \right)^{\pi_q(l)}.$$

Следующие четыре примера относятся к теореме 1.

$$\sum_{\deg F=N} \tau_k(F^r) = \binom{\binom{k+r-1}{k-1} + N - 1}{N} q^N + O_{N,k,r}(q^{N-1}), \quad N \geq 1, \quad q \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{\deg F=3} \tau_3(F^2) = 56q^3 - 36q^2 + 8q;$$

$$\sum_{\deg F=3} \frac{1}{2^{\omega(F)}} = \frac{5q^3 + q^2 + 2q}{16};$$

$$\sum_{\deg F=3} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{15q^3 - q^2 - 2q}{48};$$

## 6. Заключение

Отметим в качестве заключения, что представляет интерес решение рассмотренных нами задач в кольце многочленов многих переменных над конечным полем  $\mathbb{F}_q$ .

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Carlitz, The arithmetic of polynomials in a Galois field. // *Amer. J. Math.* **54(1)** (1932), pp. 39-50.
2. S. Ramanujan, Some formulae in the analytic theory of numbers. // *The Messenger of Math.* **45** (1916), pp. 81-84.
3. M. Rosen 2002, *Number Theory in Function Fields*, New York: Springer.

4. O. Gorodetsky 2016, «A Polynomial Analogue of Landau's Theorem and Related Problems», [arXiv:1603.02890v1](#) [math.NT].
5. L. Bary-Soroker, Y. Smilansky, A. Wolf. 2016, «On the function field analogue of Landau's theorem on sums of squares», [arXiv:1504.06809v2](#) [math.NT].
6. Р. Лидл, Г. Нидеррайтер «Конечные поля» 1988: в 2-х т. Т.1. Пер. с англ. — Москва: Изд-во «Мир». — 430 с.
7. Карацуба А. А. 1975, «Основы аналитической теории чисел». — Москва: Изд-во «Наука». — 184 с.

## REFERENCES

1. L. Carlitz, The arithmetic of polynomials in a Galois field. // *Amer. J. Math.* **54(1)**, (1932), pp. 39-50.
2. S. Ramanujan, Some formulae in the analytic theory of numbers. // *The Messenger of Math.* **45** (1916), pp. 81-84.
3. M. Rosen 2002, «Number Theory in Function Fields», New York: Springer.
4. O. Gorodetsky 2016, «A Polynomial Analogue of Landau's Theorem and Related Problems», [arXiv:1603.02890v1](#) [math.NT].
5. L. Bary-Soroker, Y. Smilansky, A. Wolf. 2016, «On the function field analogue of Landau's theorem on sums of squares», [arXiv:1504.06809v2](#) [math.NT].
6. R. Lidl, H. Niederreiter 1996, «Finite fields», Cambridge University Press.
7. Karatsuba A.A. 1993, «Basic Analytic Number Theory», Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Получено 03.02.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.