ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 113 – 144

Н. С. КОШЛЯКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОГО И КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ. I

Работа посвящена изучению некоторых аналитических функций, связанных с дедекиндовой функцией $\zeta_\Omega(s)$ в тех случаях, когда Ω есть либо рациональное, либо квадратичное поле как с положительным, так и с отрицательным определителем Δ.

Вводя особую функцию $\sigma(z)$, автор строит ряд определенных общих закономерностей, которые для рационального поля переходят в классические формулы анализа. Для квадратичного поля эти закономерности представляют собою новые, еще неизвестные результаты.

§ 1. О функциях $\zeta_\Omega(s)$ и $\sigma(z)$

1°. Пусть Ω есть алгебраическое поле χ-го порядка с основным числом Δ и пусть r_1 есть число вещественных полей, сопряженных с Ω, а r_2 — половина числа мнимых сопряженных полей, так что

$$\chi = r_1 + 2r_2. \tag{1.1}$$

В настоящей работе мы ограничимся исследованием лишь случаев рационального и квадратичного поля, когда

$$\chi = 1 \text{ и } \chi = 2. \tag{1.2}$$

Обозначим через $F(n)$ число идеалов поля с нормой n и введем в рассмотрение функцию комплексной переменной $s=\tau+it$, определив ее посредством ряда Дирихле:

$$\zeta_\Omega(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}. \tag{1.3}$$

Так как

$$F(n) = O(n^\eta), \tag{1.4}$$

где положительное число η может быть сделано сколь угодно малым, то ряд (1.3) будет абсолютно сходящимся при $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Кронекер и Дедекинд первые изучили аналитический характер функции $\zeta_\Omega(s)$ и показали, что эта функция является регулярной на всей плоскости комплексного переменного s, за исключением точки $s=1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом, равным

$$-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}, \tag{1.5}$$

где

$$r = r_1 + r_2 - 1, \quad \zeta_\Omega^{(0)}(0) = \zeta_\Omega(0), \quad \zeta_\Omega^{(1)}(0) = \zeta_\Omega'(0) = \left.\frac{d\zeta_\Omega(s)}{ds}\right|_{s=0}.$$

Кроме того, ими установлено, что для функции $\zeta_\Omega(s)$ имеет место функциональное уравнение

$$A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\zeta_\Omega(s) = A^{1-s}\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)\zeta_\Omega(1-s), \qquad 1.6)$$

где для краткости положено:

$$A = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2^{r_2}\pi^{\chi/2}}. \qquad (1.7)$$

Из этого функционального уравнения и из выражения (1.5) следует, что $\zeta_\Omega(0) = -\frac{1}{2}$ для рационального поля; $\zeta_\Omega(0) = -1$ для мнимого квадратичного поля; $\zeta_\Omega(0) = 0$ для вещественного квадратичного поля.

В дальнейшем исследовании нам понадобится асимптотическая оценка функции $\zeta_\Omega(s)$ в полосе $s = \tau + it\,(\tau_1 < \tau < \tau_2)$ при больших значениях $|t|$. Этот вопрос был исследован Ландау, который показал, что

$$\zeta_\Omega(s) = O(|t|^{\chi(1-\tau)}), \quad \tau \leqslant 0, \qquad (1.8)$$

причем эта оценка равномерна относительно τ, изменяющегося в пределах $\tau_1 < \tau < \tau_2$.

2°. Введем в наше исследование основную функцию $\sigma(z)$, которая по своим свойствам окажется вполне аналогичной функции $\frac{1}{e^{2\pi z}-1}$, играющей фундаментальную роль в теории рационального поля. С этой целью рассмотрим определенный интеграл

$$\int_0^\infty K_{r_1, r_2}(xt)\,t^{s-1}\,dt = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\,\frac{G(1-s)}{x^s}, \quad x > 0, \quad \mathrm{Re}(s) > 0, \qquad (2.1)$$

где для краткости положено

$$G(s) = \frac{\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)}{\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}. \qquad (2.2)$$

Так как

$$\int_0^\infty K_0(xt)\,t^{s-1}dt = 2^{s-2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{x^s}, \quad x > 0, \quad \mathrm{Re}(s) > 0, \qquad (2.3)$$

где $K_0(x)$ обозначает макдональдову функцию, то мы можем заключить, что

$$K_{1,0}(x) = \sqrt{\pi}e^{-2x} \qquad (2.4)$$

для рационального поля ($r_1 = 1,\ r_2 = 0$);

$$K_{0,1}(x) = \frac{K_0(2\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) - K_0(2\varepsilon\sqrt{x})}{i} \qquad (2.5)$$

для мнимого квадратичного поля ($r_1 = 0,\ r_2 = 1$);

$$K_{2,0}(x) = 2\{K_0(4\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) + K_0(4\varepsilon\sqrt{x})\} \qquad (2.6)$$

для вещественного квадратичного поля ($r_1 = 2,\ r_2 = 0$), где

$$\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \bar{\varepsilon} = e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

Из асимптотический оценки при большом $|x|$:

$$K_0(x) = \vartheta \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}, \quad |\vartheta| < 1, \tag{2.7}$$

и дно, что интеграл (2.1) будет абсолютно сходящимся при $\operatorname{Re}(s) > 0$; поэтому его можно обратить по известной формуле Меллина, в результате чего получится формула:

$$K_{r_1, r_2}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}} \frac{G(1-s)}{x^s}\, ds, \quad \tau > 0, \quad x > 0. \tag{2.8}$$

Рассмотрим функцию

$$\sigma(x) = \sigma_{r_1, r_2}(x) = \frac{1}{A\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) K_{r_1 r_2}\left(\frac{nx}{A^2}\right), \quad x > 0, \tag{2.9}$$

где число A выражается формулой (1.7).

Докажем, что ряд (2.9) будет сходиться абсолютно и равномерно в области, определяемой неравенствами $x > x_0 > 0$, где через x_0 обозначено произвольное число, которое может быть выбрано сколь угодно малым.

Действительно, при $s = \tau + it$ и при большом $|t|$ имеет место оценка

$$\Gamma(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{\tau - 1/2}\right), \quad \tau_1 < \tau < \tau_2, \tag{2.10}$$

из которой вытекает, что

$$\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}} G(1-s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{\chi(\tau - 1/2)}\right). \tag{2.11}$$

Положим в формуле (2.8) $\tau > \tau_1 > 1$, тогда мы можем написать, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} F(n) K_{r_1, r_2}\left(\frac{nx}{A^2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tau_1 - i\infty}^{\tau_1 + i\infty} \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}} G(1-s) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} \frac{A^{2s} ds}{x^s}.$$

Произведенная здесь перестановка порядков суммирования и интегрирования совершена на законном основании, так как ряд (1.3) сходится абсолютно при $\tau_1 > 1$ и, кроме того, сходится абсолютно и интеграл (2.1), как это следует из оценки (2.11).

Далее, из оценок (1.8) и (2.11) вытекает, что

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} F(n) K_{r_1, r_2}\left(\frac{nx}{A^2}\right) \right| < \frac{M}{x_0^{\tau_1}} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\tau_1}}, \quad \tau_1 > 1, \tag{2.12}$$

где через M обозначена конечная, не зависящая от x величина.

Из последнего неравенства ясно, что ряд (2.9) сходится абсолютно и равномерно в области $x > x_0$.

Отметим еще, что из приведенных здесь рассуждений вытекает следующая важная для нас формула:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{A^{2s-1}}{2\cos\frac{\pi s}{2}} G(1-s) \zeta_\Omega(s) \frac{ds}{x^s}, \quad \alpha > 1, \quad x > 0. \tag{2.13}$$

3°. Найдем, пользуясь формулой (2.13), разложение функции $\sigma(x)$ на рациональные дроби. С этой целью возьмем за контур интегрирования прямоугольник с вершинами

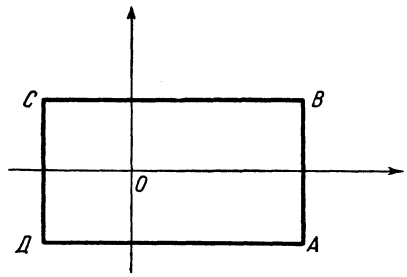

Рис. 1

$$A(\alpha - iT), \quad B(\alpha + iT),$$
$$C(\beta + iT), \quad D(\beta - iT),$$

где $\alpha > 1$, $-1 < \beta < 0$, и проинтегрируем по этому контуру функцию

$$\omega(s) = \frac{A^{2s-1} G(1-s)\zeta_\Omega(s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}\cdot x^s}.$$

Если принять во внимание оценки (2.11) и (1.8), то нетрудно убедиться, что на прямых BC и DA имеет место оценка

$$\omega(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^\lambda\right),$$

откуда ясно, что

$$\lim_{T\to\infty}\int_{BC}\omega(s)\,ds = 0, \qquad \lim_{T\to\infty}\int_{DA}\omega(s)\,ds = 0.$$

Применяя теорему Коши, найдем, что

$$\sigma(x) = R_0 + R_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\omega(s)\,ds, \qquad x > 0, \tag{3.1}$$

где через R_0 и R_1 обозначены вычеты функции $\omega(s)$ относительно ее простых полюсов $s = 0$ и $s = 1$.

Преобразуем интеграл, входящий в формулу (3.1), сначала при помощи функционального уравнения

$$\zeta_\Omega(s) = A^{1-2s}G(s)\zeta_\Omega(1-s), \tag{3.2}$$

а затем при помощи подстановки $s = 1 - \sigma$; тогда этот интеграл приведется к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\beta-i\infty}^{1-\beta+i\infty}\frac{\zeta_\Omega(\sigma)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{x^{1-\sigma}} = \frac{1}{x}\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\beta-i\infty}^{1-\beta+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\frac{d\sigma}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\left(\frac{n}{x}\right)^\sigma}.$$

Так как по условию $\beta < 0$, то мы имеем право переставить здесь порядки суммирования и интегрирования. Сделав это и приняв во внимание известное равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{\alpha^\sigma} = \frac{1}{1+\alpha^2}, \qquad \alpha > 0, \quad 0 < \tau < 2, \tag{3.3}$$

мы убедимся, что интеграл, стоящий в правой части равенства (3.1), приведется к сумме

$$\frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{x^2+n^2}.$$

Замечая, что

$$R_0 = \frac{2^r \pi^{r_2} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}, \quad R_1 = -\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\frac{1}{x},$$

мы получаем искомую формулу, дающую разложение функции $\sigma(x)$ на рациональные дроби, а именно:

$$\sigma(x) = \frac{2^r \pi^{r_2} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} - \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\frac{1}{x} + \frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{x^2+n^2}. \tag{3.4}$$

Для рационального поля эта формула переходит в классическое разложение Эйлера:

$$\frac{1}{e^{2\pi x}-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi x} + \frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2}. \tag{3.5}$$

Хотя разложение (3.4) доказано нами в предположении, что x вещественно и положительно, но нетрудно убедиться, пользуясь методом аналитического продолжения функций, что равенство (3.4) сохраняет свою силу и для комплексных значений x, но таких, что $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$. Укажем на некоторые следствия найденных формул.

Следствие 1. *Если положить* $z = x + iy$ $(x \geqslant 0)$, *то из соотношения* (3.4) *следует формула*:

$$2\pi i\sigma(iz) = i\frac{2^{r+1}\pi^{r_2+1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} - \frac{2\zeta_\Omega(0)}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}F(n)\left\{\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right\}. \tag{3.6}$$

Из этой формулы видно, что $2\pi i\sigma(iz)$ есть мероморфная функция, имеющая на плоскости z бесчисленное множество простых полюсов в точках $z = n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ с вычетами, соответственно равными $F(n)$; кроме того, из того же разложения видно, что

$$\sigma(iz) = -\sigma(-iz) + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}. \tag{3.7}$$

Следствие 2. *Если* $z = x + iy$ *и* $x > 0$, *то модуль произведения* $z^s\sigma(z)$ *может быть сделан сколь угодно малым при беспредельно растущем* x *и при любом вещественном* s.

Для доказательства достаточно обратиться к формуле

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{A^{2\sigma-1}}{2\cos\frac{\pi\sigma}{2}}G(1-\sigma)\zeta_\Omega(\sigma)\frac{d\sigma}{z^\sigma}, \quad \alpha > 1, \tag{3.8}$$

доказанной нами для вещественного и положительного z. Но эта формула сохраняет свою силу и для комплексных значений z с положительной вещественной частью, т. е. для

$$z = |z|e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Действительно, интеграл (3.8) будет в этом случае сходящимся, что следует из оценки подинтегральной функции:

$$O\left(e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)|t|}|t|^{\xi}\right). \tag{3.9}$$

Умножим обе части равенства (3.8) на z^s и выберем α бо́льшим s, что мы всегда можем сделать. В силу оценки (3.9), мы можем написать, что

$$|z^s\sigma(z)| < x^{s-\alpha}M\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)|t|}|t|^{\xi}dt,$$

где ограниченная величина M от x не зависит. Отсюда непосредственно следует, что

$$|z^s\sigma(z)| = O\left(\frac{1}{x^{\alpha-s}}\right),$$

а это равенство и доказывает наше следствие.

Следствие 3. *Если вещественная часть $z = x + iy$ растет неограниченно так, что ее дробная часть $\{x\} = [x] - x$ заключается между двумя произвольно взятыми дробями x_0 и x_1, то*

$$|\sigma(iz)| = O(|z|^{\eta}), \tag{3.10}$$

где положительное число η может быть взято сколь угодно малым.

Для доказательства достаточно воспользоваться формулой (3.6), разбив суммирование в правой части на интервалы $(1, n < x)$, $(n > x, \infty)$ и приняв затем во внимание оценку (1.4).

4°. Воспользуемся функциональным уравнением (3.2) для доказательства того, что при $\rho > 0$ имеет место формула преобразования:

$$\sqrt{\rho}\left\{2^{r_1}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0) - \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\,X_{r_1,r_2}\left(\frac{n\rho}{A}\right)\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\rho}}\left\{2^{r_1}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0) - \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\,X_{r_1,r_2}\left(\frac{n}{A\rho}\right)\right\}, \tag{4.1}$$

где $X_{r_1,r_2}(x)$ обозначает функцию, определяемую интегральным соотношением

$$\int_0^{\infty} X_{r_1,r_2}(xt)\,t^{s-1}dt = \frac{\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}{x^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \quad x > 0. \tag{4.2}$$

Для доказательства этой формулы заметим прежде всего, что

$$\left.\begin{aligned} &X_{1,0}(x) = 2e^{-x^2} \text{ для рационального поля;}\\ &X_{0,1}(x) = e^{-x} \text{ для мнимого квадратичного поля;}\\ &X_{2,0}(x) = 4K_0(2x) \text{ для вещественного квадратичного поля.}\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Отсюда ясно, что в силу оценки (2.7) интеграл (4.2) будет абсолютно сходящимся в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) > 0$, вследствие чего его можно обратить по формуле Меллина и написать, что

$$X_{r_1,r_2}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\frac{ds}{x^s}, \quad \alpha > 0, \quad x > 0. \tag{4.4}$$

Выберем $\alpha > 1$; тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) X_{r_1, r_2}\left(\frac{n\rho}{A}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \zeta_\Omega(s) \frac{ds}{\rho^s}, \quad \alpha > 1, \quad \rho > 0; \tag{4.5}$$

если теперь проинтегрировать функцию

$$\omega(s) = \frac{A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \zeta_\Omega(s)}{\rho^s}$$

по обводу четырехугольника $ABCD$ $(\alpha > 1, -1 < \beta < 0)$, то в пределе при $T \to \infty$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) X_{r_1, r_2}\left(\frac{n\rho}{A}\right) = R_0 + R_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \zeta_\Omega(s) \frac{ds}{\rho^s}, \tag{4.6}$$

где R_0 и R_1 обозначают вычеты функции $\omega(s)$ относительно ее полюсов $s = 0$ и $s = 1$.

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части (4.6), сначала при помощи функционального уравнения (3.2), а затем при помощи подстановки $s = 1 - \sigma$; тогда мы найдем, что этот интеграл будет равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} A^{1-s} \Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(1-s) \zeta_\Omega(1-s) \frac{ds}{\rho^s} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{2\pi i} \int_{1-\beta - i\infty}^{1-\beta + i\infty} A^\sigma \Gamma^{r_1}\left(\frac{\sigma}{2}\right) \Gamma^{r_2}(\sigma) \frac{d\sigma}{\left(\frac{1}{\rho}\right)},$$

вследствие чего формула (4.6) получает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) X_{r_1, r_2}\left(\frac{n\rho}{A}\right) = R_0 + R_1 + \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) X_{r_1, r_2}\left(\frac{n}{A\rho}\right). \tag{4.7}$$

Принимая во внимание, что

$$R_0 = 2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0), \quad R_1 = -2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0) \frac{1}{\rho},$$

мы из соотношения (4.7) выведем формулу (4.1).

Для рационального поля эта формула переходит в соотношение, известное из теории тэта-функций Якоби:

$$\sqrt{\rho}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \rho^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{\rho^2}}\right\}, \quad \rho > 0. \tag{4.8}$$

Для мнимого квадратичного поля получается формула Розенгайна:

$$\sqrt{\rho}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) e^{-\frac{2\pi n \rho}{\sqrt{|\Delta|}}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) e^{-\frac{2\pi n}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{1}{\rho}}\right\}, \quad \rho > 0, \tag{4.9}$$

а для вещественного квадратичного поля мы получаем соотношение:

$$\sqrt{\rho}\left\{\zeta_\Omega'(0) - \sum_{n=1}^{\infty} F(n) K_0\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \rho\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\{\zeta_\Omega'(0) - \sum_{n=1}^{\infty} F(n) K_0\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{\rho}\right)\right\},$$

$$\rho > 0, \tag{4.10}$$

установленное нами другим способом в работе ([1]).

5°. Покажем, как из формулы (4.1) получается функциональное уравнение (3.2).

Введем для краткости обозначение

$$\varphi_{r_1, r_2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) X_{r_1, r_2}\left(\frac{nx}{A}\right), \quad x > 0, \tag{5.1}$$

где $X_{r_1, r_2}(x)$ определяются формулами (4.3). Пользуясь интегралом (4.2), найдем, что

$$A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \zeta_\Omega(s) = \int_0^\infty \varphi_{r_1, r_2}(x) x^{s-1} dx = \int_0^1 \varphi_{r_1, r_2}(x) x^{s-1} dx +$$

$$+ \int_1^\infty \varphi_{r_1, r_2}(x) x^{s-1} dx, \quad s > 0.$$

Будем считать, что $0 < s < 1$, и преобразуем интеграл

$$\int_0^1 \varphi_{r_1, r_2}(x) x^{s-1} dx,$$

на основании формулы (4.1), следующим образом:

$$\int_0^1 \varphi_{r_1, r_2}(x) x^{s-1} dx = \int_0^1 \left\{ 2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0) - 2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0) \frac{1}{x} + \varphi_{r_1, r_2}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} \right\} x^{s-1} dx =$$

$$= \frac{2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{s} + \frac{2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{1-s} + \int_1^\infty \varphi_{r_1, r_2}(x) x^{-s} dx;$$

тогда мы получим:

$$A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \zeta_\Omega(s) = \frac{2^{s_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{s} + \frac{2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{1-s} + \int_1^\infty \varphi_{r_1, r_2}(x) \{x^{s-1} + x^{-s}\} dx. \tag{5.2}$$

Так как правая часть этого равенства инвариантна при замене s на $1-s$, то должна быть инвариантной и левая часть, т. е. мы можем написать:

$$A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \zeta_\Omega(s) = A^{1-s} \Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(1-s) \zeta_\Omega(1-s). \tag{5.3}$$

Ограничительное предположение $0 < s < 1$ может быть, очевидно, снято, и мы, таким образом, получаем функциональное уравнение (3.2).

В дальнейшем исследовании нам понадобится еще одна функция, которую, подобно функциям $K_{r_1, r_2}(x)$ и $X_{r_1, r_2}(x)$, мы выразим посредством определенного интеграла

$$\int_0^\infty Y_{r_1, r_2}(xt) t^{s-1} dt = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma^{r_1}\left(\frac{2-s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(2-s) x^s}, \quad x > 0, \tag{5.4}$$

сходящегося в области, заданной неравенствами

$$0 < \operatorname{Re}(s) < \frac{r_2 + 3}{\chi(\chi - 1)}, \tag{5.5}$$

как это видно из равенств:

$$\left.\begin{aligned} &Y_{1,0}(x) = e^{-x^2} \quad \text{для рационального поля;} \\ &Y_{0,1}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{для мнимого квадратичного поля;} \\ &Y_{2,0}(x) = J_0(2x) \quad \text{для вещественного квадратичного поля.} \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Здесь через $J_0(x)$ обозначена бесселева функция нулевого порядка, причем принята во внимание формула Вебера:

$$\int_0^\infty J_0(xt)\, t^{s-1} dt = \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)x^s}, \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < \frac{3}{2}, \quad x > 0. \tag{5.7}$$

Отметим, что между тремя функциями $X_{r_1, r_2}(x)$, $Y_{r_1, r_2}(x)$ и $K_{r_1, r_2}(x)$ существует интегральное соотношение, выражаемое формулой

$$\int_0^\infty X_{r_1, r_2}\left(\frac{a}{x}\right) Y_{r_1, r_2}(bx)\, dx = \frac{1}{b} K_{r_1, r_2}(ab), \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{5.8}$$

Действительно, из формулы

$$X_{r_1 r_2}\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \frac{x^s ds}{a^s}, \quad a > 0,$$

интегрированием по параметру найдем, что

$$\int_0^\infty X_{r_1, r_2}\left(\frac{a}{x}\right) Y_{r_1, r_2}(bx)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}} \frac{G(1-s)\, ds}{b^{s+1} a^s},$$

откуда, в силу соотношения (2.8), и вытекает формула (5.8).

Укажем еще на формулу

$$\int_0^\infty Y_{r_1, r_2}(ax) \frac{K_{r_1, r_2}(-ibx) - K_{r_1, r_2}(ibx)}{2i} x\, dx =$$
$$= \frac{\pi}{2} \frac{b}{a^3} Y_{r_1, r_2}\left(\frac{b}{a}\right), \quad a > 0, \quad b > 0, \tag{5.9}$$

которой мы воспользуемся в дальнейшем.

Для ее доказательства достаточно взять соотношение

$$\frac{K_{r_1, r_2}(-ibx) - K_{r_1, r_2}(ibx)}{2i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\pi}{2} \operatorname{tg}\frac{\pi s}{2} \frac{G(1-s)\, ds}{b^s x^s}, \quad b > 0,$$

и затем интегрированием по параметру установить, что

$$\int_0^\infty Y_{r_1, r_2}(ax) \frac{K_{r_1, r_2}(-ibx) - K_{r_1, r_2}(ibx)}{2i} x\, dx =$$
$$= \frac{\pi}{2} \frac{b}{a^3} \int_{\alpha+1-i\infty}^{\alpha+1+i\infty} \frac{\pi d\sigma}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2} \Gamma^{r_1}\left(\frac{2-\sigma}{2}\right) (\Gamma^{r_2}(2-\sigma)\left(\frac{b}{a}\right)^\sigma},$$

откуда, в силу формулы (5.4), и будет вытекать равенство (5.9).

В дальнейшем, во избежание излишней пестроты формул, мы часто будем опускать индексы r_1 и r_2 у букв X, Y и т. д.

В заключение настоящего параграфа приведем таблицу обозначений основных параметров и функций, которые постоянно будут встречаться в дальнейшем изложении:

I. Рациональное поле.

$$\chi = 1, \quad r = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2},$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{e^{2\pi x} - 1}, \quad X(x) = 2e^{-x^2}, \quad Y(x) = e^{-x^2}, \quad K(x) = \sqrt{\pi} e^{-2x},$$

$$L(x) = \sqrt{\pi} \cos 2x, \quad M(x) = \sqrt{\pi} \sin 2x, \quad N(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}.$$

II. Мнимое квадратичное поле.

$$\chi = 2, \quad r = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad A = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}, \quad \zeta(0) = -1,$$

$$X(x) = e^{-x}, \quad Y(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad K(x) = \frac{K_0(2\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) - K_0(2\varepsilon\sqrt{x})}{i},$$

$$L(x) = \frac{\pi}{2} J_0(2\sqrt{x}), \quad M(x) = K_0(2\sqrt{x}) + \frac{\pi}{2} Y_0(2\sqrt{x}),$$

$$N(x) = \sqrt{x}\,\frac{\varepsilon K_1(2\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) - \bar{\varepsilon} K_1(2\varepsilon\sqrt{x})}{i}, \quad \varepsilon = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \bar{\varepsilon} = e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

III. Вещественное квадратичное поле.

$$\chi = 2, \quad r = 1, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 0, \quad A = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}, \quad \zeta(0) = 0,$$

$$X(x) = 4K_0(2x), \quad Y(x) = J_0(2x), \quad K(x) = 2\{K_0(4\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) + K_0(4\varepsilon\sqrt{x})\},$$

$$L(x) = 2\left\{K_0(4\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} Y_0(4\sqrt{x})\right\}, \quad M(x) = \pi J_0(4\sqrt{x}),$$

$$N(x) = \sqrt{x}\,\{\varepsilon K_1(4\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) + \bar{\varepsilon} K_1(4\varepsilon\sqrt{x})\}.$$

§ 2. О различных интегральных представлениях функции $\zeta_\Omega(s)$

6°. В настоящем параграфе мы займемся вопросом о представлении дедекиндовой функции $\zeta_\Omega(s)$ и ее производных $\zeta'_\Omega(0)$ и $\zeta''_\Omega(0)$ через определенные интегралы.

В n° 2 мы доказали, что при $\alpha > 1$ и $\operatorname{Re}(x) > 0$ имеет место формула

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{1}{2\cos\frac{\pi s}{2}} A^{2s-1} G(1-s)\, \zeta_\Omega(s) \frac{ds}{x^s}. \tag{6.1}$$

Интеграл, стоящий здесь справа, сходится абсолютно, а подинтегральная функция голоморфна при $\alpha > 1$ и стремится равномерно относительно $\tau > 1$ к нулю, когда $|t|$ растет неограниченно, как это следует из оценки (3.9).

Известно, что при таких условиях мы можем обратить интеграл (6.1) по формуле Меллина и написать, что

$$\zeta_\Omega(s) = 2A^{1-2s}\cos\frac{\pi s}{2}\,G(s)\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{s-1}dx, \quad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{6.2}$$

Эта формула доказана нами в предположении, что $\mathrm{Re}(s) > 1$; но разложение (3.4) показывает, что для вещественного квадратичного поля, когда $\zeta_\Omega(0) = 0$, точка $x = 0$ не является полюсом функции $\sigma(x)$; поэтому для вещественного квадратичного поля формула (6.2) справедлива и при $s = 1$. Отсюда ясно, что в соотношении (6.2) мы можем считать, что

$$\mathrm{Re}(s) > 1 - r, \tag{6.3}$$

где $r = r_1 + r_2 - 1$.

Если принять во внимание функциональное уравнение

$$\zeta_\Omega(s) = A^{1-2s}G(s)\,\zeta_\Omega(1-s),$$

то интеграл (6.2) может быть переписан так:

$$\zeta_\Omega(s) = 2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^\infty \frac{\sigma(x)}{x^s}\,dx, \quad \mathrm{Re}(s) < r. \tag{6.4}$$

Формула (6.2) для случая рационального поля переходит в классическую формулу Римана:

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{2\pi x}-1}\,dx, \quad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{6.5}$$

Для квадратичного поля эта формула дает равенства:

$$\zeta_\Omega(s) = \frac{\pi\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^{2s-1}}{\Gamma^2(s)\sin\frac{\pi s}{2}}\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{s-1}dx, \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \tag{6.6}$$

для мнимого квадратичного поля,

$$\zeta_\Omega(s) = \frac{\pi\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2s-1}}{\Gamma^2(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{s-1}dx, \quad \mathrm{Re}(s) > 0, \tag{6.7}$$

для вещественного квадратичного поля.

Из последних формул видно, что

$$\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{2p-1}dx = 0, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \text{ для мнимого квадратичного поля,} \tag{6.8}$$

$$\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{2p}dx = 0, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \text{ для вещественного квадратичного поля.} \tag{6.9}$$

Кроме того, из соотношения (6.4) видно, что если в случае вещественного квадратичного поля продифференцировать обе части этого равенства по s и затем положить $s = 0$, то получатся следующие интегральные представления производных $\zeta'_\Omega(0)$ и $\zeta''_\Omega(0)$:

$$\zeta'_{\Omega}(0) = \pi \int_0^{\infty} \sigma(x)\,dx, \tag{6.10}$$

$$\zeta''_{\Omega}(0) = -2\pi \int_0^{\infty} \sigma(x) \log x\,dx. \tag{6.11}$$

Если обратиться к формуле (6.1) и проинтегрировать подинтегральную функцию по обводу прямоугольника с вершинами

$$A(\alpha - iT), \quad A(\alpha + iT), \quad C(\beta + iT), \quad D(\beta - iT), \quad 0 < \beta < 1,$$

то, рассуждая так же, как в n^0 3, мы придем к равенству:

$$\sigma(x) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{A^{2s-1} G(1-s)\,\zeta_{\Omega}(s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}} \frac{ds}{x^s}, \quad 0 < \beta < 1, \tag{6.12}$$

откуда вытекает формула:

$$\zeta_{\Omega}(s) = 2A^{1-2s} \cos\frac{\pi s}{2}\, G(s) \int_0^{\infty} \left\{ \sigma(x) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi x} \right\} x^{s-1} dx, \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < 1. \tag{6.13}$$

7^0. Обратимся к функциональному уравнению

$$\zeta_{\Omega}(s) = A^{1-2s} G(s)\,\zeta_{\Omega}(1-s) \tag{7.1}$$

и развернем его правую часть в ряд, расположенный по степеням разности $s - 1$; тогда, принимая во внимание, что

$$A^{1-2s} = \frac{1}{A} - \frac{2}{A} \log A \cdot (s-1) + \cdots,$$

$$G(s) = \frac{2^{r_1}}{\pi^{r_1/2}} \frac{1}{(1-s)^{r+1}} - \frac{\chi C + r_1 \log 2}{\pi^{r_1/2}} \frac{2^{r_1}}{(1-s)^r} + \cdots,$$

$$\zeta_{\Omega}(1-s) = \zeta_{\Omega}(0) - \zeta'_{\Omega}(0)(s-1) + \frac{1}{2}\zeta''_{\Omega}(0)(s-1)^2 + \cdots,$$

найдем, что

$$\lim_{s \to 1} \left\{ \zeta_{\Omega}(s) + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{1}{s-1} \right\} =$$

$$= \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}} \left\{ \frac{\zeta_{\Omega}^{(r+1)}(0)}{r+1} - \left[\chi C + \log \frac{(2\pi)^{\chi}}{|\Delta|} \right] \zeta_{\Omega}^{(r)}(0) \right\}, \tag{7.2}$$

где через C обозначена постоянная Эйлера.

Выражение, стоящее здесь справа, может быть представлено через определенные интегралы, содержащие функцию $\sigma(x)$.

Чтобы показать это, обратимся к формуле (6.12), которую на основании уравнения (7.1) можно представить так:

$$\sigma(t) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{1}{2\sin\frac{\pi s}{2}} A^{1-2s} G(s)\,\zeta_{\Omega}(1-s) \frac{ds}{t^{1-s}}, \quad 0 < \beta < 1. \tag{7.3}$$

Интегрируя по параметру t и принимая во внимание, что

$$\int_0^{\infty} K(xt)\, t^{\sigma-1} dt = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\sigma}{2}} \frac{G(1-\sigma)}{x^{\sigma}}, \quad \operatorname{Re}(\sigma) > 0, \quad x > 0,$$

убедимся, что

$$\int_0^\infty \left\{\sigma(t) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\} K\left(\frac{xt}{A^2}\right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{A\pi\zeta_\Omega(1-s)}{2\sin\pi s} \frac{ds}{x^s}, \quad 0<\beta<1. \quad (7.4)$$

Докажем, что, несмотря на наличие бесконечных пределов интегрирования, произведенная здесь перестановка порядков интегрирования оказывается законной. Для этой цели покажем, что здесь выполняются все условия, позволяющие применить известную теорему Жордана, устанавливающую возможность такой перестановки.

Положим для краткости

$$g(x, t, a) = \frac{\zeta_\Omega(a+it)\, x^{-a-it}}{\sin\frac{\pi}{2}(a+it)} + \frac{\zeta_\Omega(a-it)\, x^{-a+it}}{\sin\frac{\pi}{2}(a-it)}$$

и воспользуемся асимптотическими оценками функции $\zeta_\Omega(a+it)$ при большом $|t|$ и функции $K\left(\frac{xy}{A^2}\right)$ при большом y; тогда мы найдем, что

$$\left|\int_{A_0}^\infty g(y, t, \beta) K\left(\frac{xy}{A^2}\right) dy\right| < \varepsilon_{A_0} \varphi(t),$$

где

$$\varepsilon_{A_0} = L_0 e^{-pA_0} A_0^\lambda, \quad p>0; \ \varphi(t) = e^{-\frac{\pi}{2}t} t^\mu, \quad t>0,$$

причем постоянное число L_0 от A_0 не зависит.

Равным образом

$$\left|\int_{B_0}^\infty g(y, t, \beta) K\left(\frac{xy}{A^2}\right) dt\right| < \varepsilon_{B_0} \psi(y),$$

где

$$\varepsilon_{B_0} = L_1 e^{-\frac{\pi}{2}B_0} B_0^\nu, \quad \psi(y) = e^{-qy} y^k, \quad q>0,$$

причем постоянное число L_1 от B_0 не зависит.

Так как функции $\varphi(t)$ и $\psi(y)$ конечны и интегрируемы в пределах $(t_0, +\infty)$ и $(y_0, +\infty)$, где через t_0 и y_0 обозначены достаточно большие величины, то мы вправе утверждать, что

$$\int_{t_0}^{+\infty} dt \int_{y_0}^{+\infty} G(y, t, \beta) K\left(\frac{xy}{A^2}\right) dy = \int_{y_0}^{+\infty} dy \int_{t_0}^{+\infty} G(y, t, \beta) K\left(\frac{xy}{A^2}\right) dt,$$

откуда, в силу теоремы Жордана, вытекает законность произведенной перестановки порядков бесконечного интегрирования.

Возвратимся к формуле (7.4) и будем считать, что

$$0<x<1. \quad (7.5)$$

Проинтегрируем при этом условии функцию

$$\omega(s) = \frac{A\pi\zeta_\Omega(1-s)}{2\sin\pi s x^s}$$

по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta - iT), \quad B(\beta + iT), \quad C(-h+iT), \quad D(-h-iT),$$

где через h обозначено произвольно взятое положительное нецелое число.

Применяя теорему Коши, найдем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-iT}^{\beta+iT}\omega(s)\,ds = R_0 + \sum_p R_p + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-h-iT}^{-h+iT}\omega(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-h+iT}^{\beta+iT}\omega(s)\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta+iT}^{-h-iT}\omega(s)\,ds, \tag{7.6}$$

где R_0 обозначает вычет функции $\omega(s)$ относительно полюса $s=0$, а через $\sum\limits_p R_p$ обозначена сумма вычетов той же функции относительно тех ее полюсов $s=-p$ $(p=1, 2, 3\ldots)$, которые заключены внутри контура $ABCD$.

На стороне DC, где $s=-h+it$, в силу оценки $\frac{1}{\sin\pi s}=O\left(e^{-\pi|t|}\right)$, имеем:

$$\left|\int\limits_{-h-iT}^{-h+iT}\right| < A_1 x^h \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi|t|}\,dt,$$

где A_1 — постоянное число, не зависящее от h. Так как, по условию, $0<x<1$, то отсюда следует, что

$$\lim_{h\to\infty}\int\limits_{-h-iT}^{-h+iT}\omega(s)\,ds = 0.$$

На отрезке CB вещественная часть переменной s изменяется в пределах $-h<\tau<\beta$, поэтому мы можем написать, что

$$\left|\int\limits_{-\infty+iT}^{\beta+iT}\omega(s)\,ds\right| < B_1 e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\xi}\int\limits_{-\infty}^{\beta}\frac{d\tau}{x^{\tau}},$$

где постоянная величина B_1 от x не зависит. Так как $0<x<1$, то интеграл, стоящий здесь справа, сходится, вследствие чего

$$\lim_{T\to+\infty}\int\limits_{-\infty+iT}^{\beta+iT}\omega(s)\,ds = 0.$$

Совершенно аналогично доказывается, что и

$$\lim_{T\to+\infty}\int\limits_{\beta+iT}^{-\infty-iT}\omega(s)\,ds = 0,$$

после чего формула (7.6) переходит в следующую:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{A\pi\zeta_\Omega(1-s)}{2\sin\pi s}\frac{ds}{x^s} = R_0 + \sum_p R_p. \tag{7.7}$$

Если ввести обозначение

$$C_\Omega = \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} - \left[\chi C + \log\frac{(2\pi)^\chi}{|\Delta|}\right]\zeta_\Omega^{(r)}(0)\right\}, \tag{7.8}$$

так что

$$\lim_{s\to1}\zeta_\Omega(s) + \left\{\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{1}{s-1}\right\} = C_\Omega, \tag{ }$$

то мы будем иметь:

$$R_0 = \frac{\pi A}{2}D_s\left\{s\zeta_\Omega(1-s)\frac{s}{\sin\pi s}\frac{1}{x^s}\right\}_{s=0} = \frac{A}{2}\left\{C_\Omega - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)\log x\right\}.$$

Аналогично, при $0<x<1$ получаем:

$$\sum_{p=0}^{\infty} R_p = \frac{A}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \zeta_\Omega(p+1)x^p = \frac{A}{2}\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\left\{\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n}\right\}.$$

Внося найденные значения вычетов в формулу (7.7), мы можем привести соотношение (7.4) к такому виду:

$$C_\Omega = -\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\left\{\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n}\right\} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x +$$

$$+\frac{2}{A}\int_0^\infty \left\{\sigma(t)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\} K\left(\frac{xt}{A^2}\right)dt. \qquad (7.10)$$

Применяя принцип аналитического продолжения функций, мы без труда докажем, что разложение (7.10), доказанное нами в предположении, что $0<x<1$, оказывается справедливым и при комплексных значениях x таких, что $-\frac{\pi}{2}<\arg x<\frac{\pi}{2}$. Впоследствии мы свяжем формулу (7.10) с изучением некоторой аналитической функции, которую можно рассматривать как обобщение функции $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, а сейчас укажем на некоторые следствия этой формулы.

Если ввести обозначения

$$L(x) = L_{r_1, r_2}(x) = \frac{K_{r_1, r_2}(-ix)+K_{i_1, i_2}(ix)}{2}, \qquad (7.11)$$

$$M(x) = M_{r_1, r_2}(x) = \frac{K_{r_1, r_2}(-ix)-K_{r_1, r_2}(ix)}{2i},$$

то из формулы (7.10) получается следующее интегральное соотношение:

$$\frac{\pi}{2}\zeta_\Omega^{(r)}(0) = \frac{x}{B}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{x^2+n^2} - \frac{2}{AB}\int_0^\infty\left\{\sigma(t)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\}M\left(\frac{xt}{A^2}\right)dt, \quad x>0, \qquad (7.12)$$

где

$$B = \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}. \qquad (7.13)$$

Если принять во внимание, что

$$x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{x^2+n^2} = \pi\sigma(x) + \frac{2^r\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\zeta_\Omega^{(r)}(0) + \zeta_\Omega(0)\frac{1}{x}, \quad \mathrm{Re}(x)>0,$$

то соотношение (7.12) может быть переписано в следующей форме:

$$\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)\left\{\sigma(t)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\}dt = \frac{A\pi}{2}\left\{\sigma(x)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}, \quad x>0. \qquad (7.14)$$

Для рационального поля эта формула переходит в интеграл Пуассона-Лежандра:

$$\int_0^\infty \sin 2\pi xt\left\{\frac{1}{e^{2\pi t}-1}-\frac{1}{2\pi t}\right\}dt = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1}-\frac{1}{2\pi x}\right\}, \quad x>0. \qquad (7.15)$$

Для мнимого квадратичного поля получается соотношение:

$$\int_0^\infty\left\{\frac{2}{\pi}K_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{|\Delta|}}\right)+Y_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{|\Delta|}}\right)\right\}\sigma(t)\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\left\{\sigma(x) - \frac{1}{\pi x} + \frac{\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right\}, \quad x > 0, \tag{7.16}$$

где $K_0(x)$ и $Y_0(x)$ обозначают макдональдову и бесселеву функции нулевого порядка.

Чтобы развернуть формулу (7.14) для случая вещественного квадратичного поля, будем рассматривать ее левую часть как сумму

$$\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)\sigma(t)\,dt + \left\{\frac{\zeta_\Omega(s)}{\pi}\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)t^{s-1}\,dt\right\}_{s\to 0}.$$

Из формулы (7.3) видно, что

$$\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)t^{s-1}\,dt = \frac{A^{2s}\pi}{2}G(1-s)\operatorname{tg}\frac{\pi s}{2}\cdot\frac{1}{x^s},$$

вследствие чего

$$\left\{\frac{\zeta_\Omega(s)}{\pi}\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)t^{s-1}\,dt\right\}_{s\to 0} = \frac{\zeta'_\Omega(0)}{\pi}.$$

Отсюда получится значение интеграла (7.14) для случая вещественного квадратичного поля, а именно:

$$\int_0^\infty J_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{\Delta}}\right)\sigma(t)\,dt = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\left\{\sigma(x) - \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\zeta'_\Omega(0)\right\}, \quad x > 0. \tag{7.17}$$

Выведем еще одно интегральное соотношение, содержащее функцию $L\left(\frac{x}{A^2}\right)$ и функции $\zeta_\Omega(0)$, $\zeta'_\Omega(0)$ для случаев рационального и мнимого квадратичного поля.

Для этой цели составим определенный интеграл

$$I = \pi\int_0^\infty\left\{\sigma(x) + (-1)^{r_2+1}\frac{\pi^{\frac{r_1}{2}-2}}{2^{2r_1-1}}\frac{L\left(\frac{x}{A^2}\right)}{x}\right\}dx$$

и будем считать, что

$$I = \lim_{s\to 1} I_s,$$

где

$$I_s = \pi\int_0^\infty\left\{\sigma(x)\,x^{s-1} + (-1)^{r_2+1}\frac{\pi^{\frac{r_1}{2}-2}}{2^{2r_1-1}}\frac{L\left(\frac{x}{A^2}\right)}{x^s}\right\}dx.$$

Но из равенства (6.4) следует, что

$$\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{s-1}\,dx = \frac{\zeta_\Omega(s)}{2A^{1-2s}\cos\frac{\pi s}{2}\,G(s)},$$

а соотношение (2.1) дает:

$$\int_0^\infty L\left(\frac{x}{A^2}\right)\frac{dx}{x^s} = \frac{\pi}{2}\,\frac{G(s)}{\left(\frac{x}{A^2}\right)^{1-s}}.$$

Отсюда без труда найдем, что в рассматриваемых случаях

$$\lim_{s\to 1} I_s = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2^{r+1}\pi^{r_2}} \lim_{s\to 1}\left\{\zeta_\Omega(s) + \frac{x^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{s-1}\right\}.$$

Принимая во внимание равенство (7.2), получим искомое интегральное соотношение:

$$\frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} = \chi\left(C + \log\frac{2\pi}{\frac{\chi}{\sqrt{|\Delta|}}}\right)\zeta_\Omega^{(r)}(0) +$$

$$+ \pi\int_0^\infty \left\{\frac{(-1)^{r_2+1}\pi^{\frac{r_1}{2}-2}}{2^{2r_1-1}}\,\frac{L\left(\frac{x}{A^2}\right)}{x} - \sigma(x)\right\}dx, \tag{7.18}$$

переходящее в формулу Дирихле

$$C = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^x-1} - \frac{\cos x}{x}\right\}dx \tag{7.19}$$

в случае рационального поля, и в соотношение

$$\zeta'_\Omega(0) = -2\left(C + \log\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + \pi\int_0^\infty \left\{\sigma(x) + \frac{J_0\left(4\pi\sqrt{\frac{x}{|\Delta|}}\right)}{\pi x}\right\}dx \tag{7.20}$$

— в случае мнимого квадратичного поля.

Для вещественного квадратичного поля, когда $\zeta_\Omega(0) = 0$, изложенный здесь метод приводит к интегральному соотношению

$$\zeta''_\Omega(0) = 4\left\{C + \log\left(2\pi\sqrt{\frac{x}{\Delta}}\right)\right\}\zeta'_\Omega(0) -$$

$$-4\left\{C + \log 2\pi\sqrt{\frac{x}{\Delta}}\right\}\pi\int_0^\infty \sigma(t)\,dt - 2\pi\int_0^\infty \sigma(t)\log t\,dt,$$

которое приводится к тождеству $0 \equiv 0$, если воспользоваться ранее доказанными равенствами (6.10) и (6.11).

8°. Докажем, что уравнение для дедекиндовой функции $\zeta_\Omega(s)$ может быть выведено и из интеграла (7.14).

В самом деле, умножим обе части равенства (7.14) на x^{s-1}, где $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, и проинтегрируем затем по x от $x = 0$ до $x = \infty$; тогда, принимая во внимание равенства

$$\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right) x^{s-1}\,dx = \frac{A^{2s}\pi}{2} G(1-s)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi s}{2}\,\frac{1}{t^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0,$$

$$\zeta_\Omega(s) = 2A^{1-2s}\cos\frac{\pi s}{2}\,G(s)\int_0^\infty \left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}x^{s-1}\,dx, \quad 0 < \mathrm{Re}(s) < 1, \tag{8.1}$$

найдем, что

$$\zeta_\Omega(s) = 2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^\infty \left\{\sigma(t) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\}\frac{dt}{t^s}, \quad 0 < \mathrm{Re}(s) < 1,$$

откуда, в силу соотношения (8.1), получается функциональное уравнение

$$\zeta_\Omega(s) = A^{1-2s}G(s)\,\zeta_\Omega(1-s),$$

причем принятое ограничение $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ может быть, очевидно, снято.

В работе ([2]) нами дано одно интегральное представление римановой функции $\zeta(s)$. Это представление может быть распространено и на квадратичное поле. Чтобы показать это, обратимся к формуле

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{x^{\sigma}},\quad x>0,\quad 0<\alpha<2,$$

при помощи которой найдем, что

$$\frac{1}{y^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{1-s}}\frac{1}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\zeta_{\Omega}(\sigma-s+1)}{y^{s-\sigma}}d\sigma,$$

$$y>0,\quad 1<\alpha<2,\quad 0<\mathrm{Re}(s)<1.$$

Если проинтегрировать функцию, стоящую здесь под знаком интеграла, по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\alpha-iT),\quad B(\alpha+iT),\quad C(\beta+iT),\quad D(\beta-iT),$$

где $0<\beta<\mathrm{Re}(s)$, то в пределе при $T\to+\infty$ получится равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{1-s}}\frac{1}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{\pi}{2}\frac{y^s}{\sin\frac{\pi s}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\zeta_{\Omega}(\sigma-s+1)}{y^{-\sigma}}d\sigma. \tag{8.2}$$

Обозначим через $\Phi_s(y)$ левую часть этого равенства и произведем оценку функции $\Phi_s(y)$ при больших и малых значениях y. С этой целью проинтегрируем функцию, стоящую под знаком интеграла в соотношении

$$\Phi_s(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\zeta_{\Omega}(\sigma-s+1)}{y^{-\sigma}}d\sigma,\quad 0<\beta<\mathrm{Re}(s), \tag{8.3}$$

по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta-iT),\quad B(\beta+iT),\quad C(\gamma+iT),\quad D(\gamma-iT),$$

где $-\frac{1}{2}<\gamma<0$, и увеличим затем T до бесконечности; тогда мы придем к формуле

$$\Phi_s(y)=R_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\zeta_{\Omega}(\sigma-s+1)}{y^{-\sigma}}d\sigma,\quad -\frac{1}{2}<\gamma<0,$$

где через R_0 обозначен вычет подинтегральной функции относительно полюса $\sigma=0$. Очевидно, что величина R_0 от y не зависит.

Из последнего равенства следует, что при больших значениях y

$$\Phi_s(y)=R_0+O\left(\frac{1}{y^{-\gamma}}\right),$$

откуда вытекает искомая оценка

$$\Phi_s(y)=O(1). \tag{8.4}$$

Далее, из ра тва (8.3) вытекает, что при малых значениях y имеет место оценка

$$\Phi_s(y)=O(y^{\beta}),\quad 0<\beta<\mathrm{Re}(s). \tag{8.5}$$

Примем во внимание, что

$$L_{1,0}(x) = \sqrt{\pi}\cos 2x, \quad L_{0,1}(x) = \frac{\pi}{2} J_0(2\sqrt{x}),$$
$$L_{2,0}(x) = 2\left\{K_0(4\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} Y_0(4\sqrt{x})\right\}, \tag{8.6}$$

и заметим, что при больших значениях x имеют место известные асимптотические оценки

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$
$$Y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{8.7}$$

Тогда, учитывая оценки (8.4) и (8.5), мы убедимся, что определенный интеграл

$$I = \frac{2}{A\pi} x^{1-s} \int_0^\infty \Phi_s(y) L\left(\frac{xy}{A^2}\right) \frac{dy}{y^s} \tag{8.8}$$

будет сходящимся в полосе

$$\frac{\chi - 1}{2\chi} < \operatorname{Re}(s) < 1.$$

Заменим здесь функцию $\Phi_s(y)$ интегралом (8.3) и переставим порядки интегрирования, что является операцией законной; тогда, в силу соотношения

$$\int_0^\infty L(xt) t^{s-1}\, dt = \frac{\pi}{2} \frac{G(1-s)}{x^s}, \quad x > 0, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \tag{8.9}$$

найдем, что

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}} \zeta_\Omega(s - \sigma) \frac{d\sigma}{x^\sigma}.$$

Если проинтегрировать функцию, стоящую здесь под знаком интеграла по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta - iT), \quad B(\beta + iT), \quad C(-\beta + iT), \quad D(-\beta - iT),$$

то в пределе при $T \to \infty$ получится равенство

$$I = \zeta_\Omega(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}} \zeta_\Omega(s - \sigma) \frac{d\sigma}{x^\sigma} =$$
$$= \zeta_\Omega(s) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}} \zeta_\Omega(s + \sigma) \frac{d\sigma}{x^{-\sigma}} = \zeta_\Omega(s) - \Phi_{1-s}(y). \tag{8.10}$$

Из соотношений (8.8) и (8.10) вытекает следующее интегральное представление функции $\zeta_\Omega(s)$:

$$\zeta_\Omega(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{F(n)}{n^s} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{\pi}{2} \frac{x^{1-s}}{\sin\frac{\pi}{2}(1-s)} +$$
$$+ \frac{2}{A\pi} x^{1-s} \int_0^\infty \left\{\sum_{n=1}^\infty \frac{F(n)}{n^{1-s}} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{y}\right)^2} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{\pi}{2} \frac{y^s}{\sin\frac{\pi s}{2}}\right\} L\left(\frac{xy}{A^2}\right) dy, \tag{8.11}$$

где

$$x > 0, \quad \frac{\chi - 1}{2\chi} < \operatorname{Re}(s) < 1.$$

Для рационального поля это представление переходит в формулу для римановой функции $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2} - \frac{\pi}{2} \frac{x^{1-s}}{\sin \frac{\pi}{2}(1-s)} +$$

$$+ 2x^{1-s} \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{y}\right)^2} - \frac{\pi}{2} \frac{y^s}{\sin \frac{\pi s}{2}} \right\} \frac{\cos 2\pi xy}{y^s} dy, \quad x > 0, \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < 1, \tag{8.12}$$

приведенную нами в работе ([2]).

9°. В 1932 году Зигель восстановил по черновикам Римана следующее интегральное представление функции $\rho(s) = \pi^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$:

$$\rho(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \int_{0 \swarrow 1} \frac{e^{\pi i x^2}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \frac{dx}{x^s} + \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \int_{0 \nwarrow 1} \frac{e^{-\pi i x^2}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \frac{dx}{x^{1-s}}. \tag{9.1}$$

Здесь символами $0 \swarrow 1$ и $0 \nwarrow 1$ обозначено то обстоятельство, что интегрирование производится по прямым, параллельным биссектрисам координатных углов и пересекающим вещественную ось в точках, лежащих между 0 и 1.

Докажем, что аналогичное интегральное представление имеет место и для функции

$$\rho_\Omega(s) = A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \zeta_\Omega(s). \tag{9.2}$$

Для доказательства возьмем интеграл

$$X\left(\frac{nx}{A}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} A^\sigma \Gamma^{r_1}\left(\frac{\sigma}{2}\right) \Gamma^{r_3}(\sigma) \frac{d\sigma}{(nx)^\sigma}, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \quad 1 < \alpha < 2,$$

и составим при помощи этого интеграла соотношение

$$\varepsilon^s \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \int_1^{\infty} X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right) x^{s-1} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} A^\sigma \Gamma^{r_1}\left(\frac{\sigma}{2}\right) \Gamma^{r_2}(\sigma) \zeta_\Omega(\sigma) \frac{\varepsilon^{s-\sigma} d\sigma}{\sigma - s}, \tag{9.3}$$

где

$$0 < \operatorname{Re}(s) < 1, \quad \varepsilon = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \bar{\varepsilon} = e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

Функция, стоящая здесь под знаком интеграла, имеет внутри прямоугольника

$$A(\alpha - iT), \quad B(\alpha + iT), \quad C(-\beta + iT), \quad D(-\beta - iT),$$

где $\beta = 1 - \alpha$, три простых полюса: $\sigma = 0$, $\sigma = s$ и $\sigma = 1$ с вычетами, соответственно равными

$$R_0 = -2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0) \frac{\varepsilon^s}{s}, \quad R_s = A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \zeta_\Omega(s), \quad R_1 = -2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0) \frac{\varepsilon^{-1-s}}{1-s}.$$

Принимая во внимание, с одной стороны, функциональное уравнение

$$\rho_\Omega(1-s)=\rho_\Omega(s),$$

а с другой стороны, то обстоятельство, что в пределе при $T\to+\infty$ интегралы, взятые вдоль отрезков BC и DA, обращаются в нуль, мы придем к формуле

$$\rho_\Omega(s)=\Phi_\Omega(\varepsilon, s)+\Phi_\Omega(\bar{\varepsilon}, 1-s), \tag{9.4}$$

где

$$\Phi_\Omega(\varepsilon, s)=2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\frac{\varepsilon^s}{s}+\varepsilon^s\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\int_1^\infty X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right)x^{s-1}dx. \tag{9.5}$$

Для преобразования входящего сюда интеграла обратимся к формуле (5.4), написав ее в виде:

$$x^{s-1}=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\int_0^\infty Y(xt)\,xt^{1-s}dt,\qquad 1-\frac{r_2+3}{\chi(\chi-1)}<s<1. \tag{9.6}$$

При помощи этого интеграла найдем, что

$$\int_1^\infty X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right)x^{s-1}dx=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\int_0^\infty\int_1^\infty X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right)Y(xt)\,x\,dx\,t^{1-s}dt, \tag{9.7}$$

причем совершенная здесь перестановка порядков интегрирования имеет законное основание, так как тут выполняются все условия, позволяющие применить теорему Жордана.

Введем для краткости обозначение

$$\{\rho^\alpha f(x\rho)\}_{\rho=1}^{(\chi-1)}\qquad(\chi=1, 2), \tag{9.8}$$

понимая под ним, что

$$\{\rho^\alpha f(x\rho)\}_{\rho=1}^{(0)}=f(x),\qquad \{\rho^\alpha f(x\rho)\}_{\rho=1}^{(1)}=\left.\frac{d[\rho^\alpha f(x\rho)]}{d\rho}\right|_{\rho=1}; \tag{9.9}$$

тогда легко убедиться, что внутреннее интегрирование в формуле (9.7) выполняется в силу равенства

$$\int_1^\infty X(ax)\,Y(bx)\,x\,dx=\frac{Z(a, b)}{a^2+b^2},\qquad a>0,\qquad b>0, \tag{9.10}$$

где

$$Z(a, b)=\frac{X(a)}{2^{2-2r_2}}\{\rho^{r_2}Y(b\rho)\}_{\rho=1}^{(\chi-1)}+\frac{Y(b)}{2^{2-2r_2}}\{(-1)^{\chi-1}X(a\rho)\}_{\rho=1}^{(\chi-1)}. \tag{9.11}$$

Таким образом, формула (9.10) может быть переписана в виде:

$$\int_1^\infty X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right)x^{s-1}dx=\frac{2}{\pi}A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^\infty\frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A}, \frac{t}{A}\right)}{t^2+in^2}\frac{dt}{t^{s-1}}, \tag{9.12}$$

где $0<\mathrm{Re}(s)<1$. Проинтегрируем входящую сюда функцию

$$\frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A}, \frac{u}{A}\right)}{u^2+in^2}$$

по обводу четырехугольника с вершинами (рис. 2):

$$A(T-i\xi),\quad B(-T+i\xi),\quad C(-T),\quad D(+T),\quad 0<\xi<\frac{1}{\sqrt{2}},$$

причем точка $u=0$ выделена из контура посредством полуокружности весьма малого радиуса δ.

Так как по условию $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, то интегралы, взятые вдоль отрезков BC и DA, равно как и интеграл, взятый по полуокружности, в пределе при $T \to +\infty$ и $\delta \to 0$ обратятся в нуль, вследствие чего мы получаем соотношение

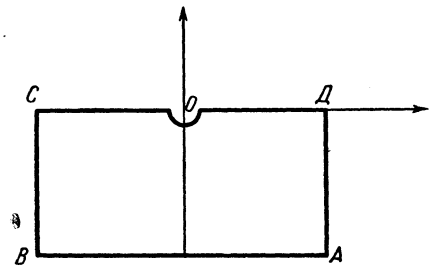

Рис. 2

$$\int\limits_{+\infty-i\xi}^{-\infty-i\xi} \frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A}, \frac{u}{A}\right)}{u^2+in^2} \frac{du}{u^{s-1}} = 2ie^{\frac{i\pi s}{2}} \sin\frac{\pi s}{2} \int\limits_0^\infty \frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A}, \frac{t}{A}\right)}{t^2+in^2} t^{1-s}\,dt, \tag{9.13}$$

где $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Положим в левой его части $u = \bar{\varepsilon}x$, что равносильно повороту прямой, по которой производится интегрирование, на угол 45° против часовой стрелки; тогда мы придем к равенству

$$\varepsilon^s \int\limits_1^\infty X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right) x^{s-1}\,dx = \frac{1}{\pi i} A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \int\limits_{0\swarrow 1} \frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A}, \frac{tx}{A}\right)}{x^2-n^2} x^{1-s}\,dx. \tag{9.14}$$

Возвратимся к формуле (9.12) и преобразуем первый член, находящийся в правой ее части. Полагая $x = \varepsilon u$, найдем, что

$$\int\limits_{0\swarrow 1} \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{\bar{\varepsilon}x\rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} x^{-1-s}\,dx = \frac{1}{\varepsilon^s} \int\limits_{+\infty-i\xi}^{-\infty-i\xi} \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{u\rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} u^{-1-s}\,du =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^s} 2i \sin\frac{\pi s}{2} e^{\frac{i\pi s}{2}} \int\limits_0^\infty \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{t\rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} t^{-1-s}\,dt.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что при всякой комбинации чисел

$$\chi = 1, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0,$$
$$\chi = 2, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 1,$$
$$\chi = 2, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 0,$$

имеет место соотношение

$$-\frac{\varepsilon^s}{s} = \frac{A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s)}{2^{r_1}\pi i} \int\limits_{0\swarrow 1} \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{\bar{\varepsilon}x\rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} x^{-1-s}\,dx. \tag{9.15}$$

Внесем выражения (9.14) и (9.15) в соотношение (9.5); тогда мы придем к формуле, аналогичной формуле Римана-Зигеля, дающей представление функции

$$\rho_\Omega(s) = A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_\Omega(s)$$

в форме следующих интегралов:

$$\rho_\Omega(s) = A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s) \int\limits_{0\swarrow 1} \omega_\Omega(\bar{\varepsilon}, x) \frac{dx}{x^s} + A^{1-s} \Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma^{r_2} \int\limits_{0\nwarrow 1} \omega_\Omega(\varepsilon, x) \frac{dx}{x^{1-s}}, \tag{9.16}$$

где

$$\omega_\Omega(\bar{\varepsilon}, x) = \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{\bar{\varepsilon} x \rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} \varphi_{\rho=1}(x, \varepsilon) + \left\{(-1)^{\chi-1} Y\left(\frac{\bar{\varepsilon} x \rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1} \psi_{\rho=1}(x, \varepsilon) \quad (9.17)$$

и

$$\varphi_\rho(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi i}\left\{-\frac{\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{x} + \frac{1}{2^{2-2r_2}} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{x^2 - n^2} X\left(\frac{n\varepsilon\rho}{A}\right)\right\}, \quad (9.18)$$

$$\psi_\rho(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{2^{2-2r_2}} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{x^2 - n^2} X^{(\chi-1)}\left(\frac{n\varepsilon\rho}{A}\right). \quad (9.19)$$

Здесь при $\chi = 2$ надо произвести дифференцирование по ρ и после положить $\rho = 1$.

Для рационального поля

$$\chi = 1, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad r = 0, \quad A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad X_{1,0}(x) = 2e^{-x^2}, \quad Y_{1,0}(x) = e^{-x^2}$$

и, следовательно,

$$\left\{\rho^{r_2} Y_{1,0}\left(\frac{\bar{\varepsilon} x \rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} = Y_{1,0}\left(\frac{\bar{\varepsilon} x}{A}\right) = e^{i\pi x^2}, \quad X_{1,0}\left(\frac{n\varepsilon}{A}\right) = (-1)^n.$$

Так как

$$\varphi_{\rho=1}(x, \varepsilon) + \psi_{\rho=1}(x, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{x^2 - n^2}\right\} = \frac{1}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}},$$

то формула (9.16) для этого частного случая дает формулу Римана-Зигеля (9.1).

Для мнимого квадратичного поля

$$\chi = 2, \; r_1 = 0, \; r_2 = 1, \; r = 0, \; A = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}, \quad X_{0,1}(x) = e^{-x}, \quad Y_{0,1}(x) = \frac{\sin x}{x},$$

и мы получаем формулу

$$\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \zeta_\Omega(s) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{0 \swarrow 1} \omega_\Omega(\bar{\varepsilon}, x) \frac{dx}{x^s} + \left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\right)^{1-s} \Gamma(1-s) \int_{0 \nwarrow 1} \omega_\Omega(\varepsilon, x) \frac{dx}{x^{1-s}}, \quad (9.20)$$

где

$$\omega_\Omega(\bar{\varepsilon}, x) = \frac{1}{\pi i}\left\{\frac{\cos \bar{\tau} x}{x} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{x^2 - n^2} \Phi_\Omega(x, \rho)\right\}_{\rho=1},$$

$$\Phi_\Omega(x, \rho) = \begin{vmatrix} e^{-n\tau\rho} & \dfrac{\sin \bar{\tau} x}{\bar{\tau} x} \\ (e^{-n\tau\rho})'_\rho & \left(\dfrac{\sin \bar{\tau} x \rho}{\bar{\tau} x}\right)'_\rho \end{vmatrix}, \quad \tau = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{|\Delta|}}, \quad \bar{\tau} = \frac{2\pi\bar{\varepsilon}}{\sqrt{|\Delta|}}.$$

Для вещественного квадратичного поля

$$\chi = 2, \; r_1 = 2, \; r_2 = 0, \; r = 1, \; A = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}, \; X_{2,0}(x) = 4K_0(2x), \; Y_{2,0}(x) = J_0(2x),$$

и формула (9.16) приводит нас к соотношению

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^s \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_\Omega(s) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^s \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \int\limits_{0\swarrow 1} \omega_\Omega(\bar{\varepsilon}, x)\frac{dx}{x^s} + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-s} \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right) \int\limits_{0\nwarrow 1} \omega_\Omega(\varepsilon, x)\frac{dx}{x^{1-s}}, \quad (9.21)$$

где

$$\omega_\Omega(\bar{\varepsilon}, x) = \frac{1}{\pi i}\left\{-\zeta'_\Omega(0)\frac{J'_0(\bar{\tau}x\rho)}{x} + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{x^2-n^2}\Phi_\Omega(x, \rho)\right\}_{\rho=1},$$

$$\Phi_\Omega(x, \rho) = \begin{vmatrix} K_0(n\tau\rho) & J_0(\bar{\tau}x\rho) \\ K'_0(n\tau\rho) & J'_0(\bar{\tau}x\rho) \end{vmatrix}, \quad \tau = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{\Delta}}, \quad \bar{\tau} = \frac{2\pi\bar{\varepsilon}}{\sqrt{\Delta}},$$

причем дифференцирование цилиндрических функций надо производить по ρ и затем полагать $\rho = 1$.

10°. В n° 7 мы нашли, что

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta_\Omega(s) + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{1}{s-1}\right\} = C_\Omega, \quad (10.1)$$

где постоянная C_Ω определяется посредством формулы (7.8).

Кронекером было показано, что для мнимого квадратичного поля эта постоянная может быть выражена через тэта-функции.

Выведем формулу Кронекера, применив следующий способ рассуждений.

Выражение для дедекиндовой функции $\zeta_\Omega(s)$ может быть написано в форме

$$\zeta_\Omega(s) = \sum_x\sum_y \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \quad (10.2)$$

где суммирование распространяется на все целые значения x и y, исключая одновременную комбинацию $x = 0$, $y = 0$.

Введя обозначения

$$\omega = \frac{b+i\sqrt{\Delta_1}}{2a}, \quad \tilde{\omega} = \frac{b-i\sqrt{\Delta_1}}{2a}, \quad \Delta_1 = 4ac - b^2, \quad \sqrt{\Delta_1} > 0, \quad (10.3)$$

найдем, что

$$\zeta_\Omega(s) = \frac{2}{a^s}\zeta(2s) + \frac{2}{c^s}\zeta(2s) + S, \quad (10.4)$$

где

$$S = \frac{2}{a^s}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=-\infty}^{x=+\infty}{}' \frac{1}{(x+\omega y)^s(x+\tilde{\omega}y)^s}; \quad (10.5)$$

здесь через $\zeta(s)$ обозначена обыкновенная функция Римана, а знак $'$ указывает на то, что при суммировании следует пропустить член, соответствующий значению $x = 0$.

Выразим сумму S через определенный интеграл, для чего рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int \frac{z^{p-1}dz}{(z+\alpha)^s(z+\beta)^s}, \quad 0 < \arg\alpha < \pi, \quad 0 < \arg\beta < \pi,$$

распространенный по контуру, состоящему из двух концентрических окружностей, описанных из точки $z=0$ радиусами δ и R, и отрезком вещественной оси от точки $x=\delta$ до точки $x=R$.

Если считать s числом целым и положительным и выбрать p таким, что $0<p<2s$, то, интегрируя по вышеуказанному контуру, найдем в пределе при $\delta\to 0$ и $R\to+\infty$ следующую формулу:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(x+\alpha)^s(x+\beta)^s} =$$

$$=(-1)^{s-1}\frac{\pi}{\sin\pi p}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(s)\Gamma(p-s+1)}\left\{\frac{\alpha^{p-s}\beta^{s-1}}{(\beta-\alpha)^{2s-1}}F_p^{(s)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{\beta^{p-s}\alpha^{s-1}}{(\alpha-\beta)^{2s-1}}F_p^{(s)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}, \tag{10.6}$$

где для краткости положено

$$F_p^{(s)}(x)=\frac{\Gamma(p-s+1)}{\Gamma(p)}x^{s-p}(1-x)^{2s-1}\frac{d^{s-1}x^{p-1}(1-x)^{-s}}{dx^{s-1}}. \tag{10.7}$$

Обращая интеграл (10.6) по формуле Меллина, найдем, что

$$\frac{1}{(x+\alpha)^s(x+\beta)^s}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi\sigma}\frac{\Gamma(\sigma)\Phi_{\alpha,\beta}(\sigma)}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)}\frac{d\sigma}{x^\sigma},\quad 1<\tau<2s-1, \tag{10.8}$$

где

$$\Phi_{\alpha,\beta}(\sigma)=(-1)^{s-1}\frac{\alpha^{\sigma-s}\beta^{s-1}}{(\beta-\alpha)^{2s-1}}F_\sigma^{(s)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+(-1)^{s-1}\frac{\beta^{\sigma-s}\alpha^{s-1}}{(\alpha-\beta)^{2s-1}}F_\sigma^{(s)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{10.9}$$

При помощи интеграла (10.8) выражение (10.5) может быть представлено так:

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{a}{\Delta_1}\right)^{s-1}\frac{\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)\zeta(2s-\sigma)}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)\sin\frac{\pi\sigma}{2}}R_\sigma^{(s)}d\sigma, \tag{10.10}$$

где

$$R_\sigma^{(s)}=\left(\frac{\omega}{i}\right)^{\sigma-1}\left(\frac{\tilde\omega}{\omega}\right)^{s-1}F_\sigma^{(s)}\left(\frac{\omega}{\tilde\omega}\right)+\left(\frac{\tilde\omega}{-i}\right)^{\sigma-1}\left(\frac{\omega}{\tilde\omega}\right)^{s-1}F_\sigma^{(s)}\left(\frac{\tilde\omega}{\omega}\right). \tag{10.11}$$

Рассмотрим в качестве контура интегрирования прямоугольник с вершинами

$$A(\tau+iT),\quad B(\tau-iT),\quad C(\rho+iT),\quad D(\rho-iT),$$

где $1<\tau<2s-1$, $-1<\rho<0$.

Так как на отрезках, параллельных вещественной оси при больших значениях $|t|$, имеет место оценка подинтегральной функции порядка

$$O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^\xi\right),$$

то в пределе при $T=+\infty$ после интегрирования по прямоугольнику найдем, что

$$S=R_0+R_1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{a}{\Delta_1}\right)^{s-1}\frac{\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)\zeta(2s-\sigma)}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)\sin\frac{\pi\sigma}{2}}R_\sigma^{(s)}d\sigma, \tag{10.12}$$

где R_0 и R_1 обозначают вычеты подинтегральной функции относительно полюсов $\sigma=0$ и $\sigma=1$.

Так как

$$R_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{a}{\Delta_1}\right)^{s-1}\left\{\frac{\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)\zeta(2s-\sigma)}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)}\frac{\sigma R_\sigma^{(s)}}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\right\}_{\sigma=0} = -\frac{\pi^2}{3a} + \alpha_0(s-1) + \cdots$$

и

$$R_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{a}{\Delta_1}\right)^{s-1}\left\{\frac{\Gamma(\sigma)\zeta(2s-\sigma)\cdot R_\sigma^{(s)}}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)\sin\frac{\pi\sigma}{2}}(\sigma-1)\zeta(\sigma)\right\}_{\sigma=1} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}} + \frac{4\pi C}{\sqrt{\Delta_1}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\log\frac{a}{a_1} + \alpha_1(s-1) + \cdots,$$

то

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta_\Omega(s) - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{s-1}\right\} = \frac{\pi^2}{3a} + \frac{4\pi C}{\sqrt{\Delta_1}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\log\frac{a}{\Delta_1} + S_1,$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\frac{\zeta(\sigma)\zeta(2-\sigma)}{|\omega|^{1-\sigma}\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\cos\left\{(\sigma-1)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\Delta_1}}{b}\right)\right\}d\sigma.$$

Принимая во внимание, что

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)}{(2\pi)^s}$$

и

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1,$$

где через $S(n)$ обозначена сумма делителей n, найдем, что

$$S_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_1)^\delta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_2)^\delta}\right\},$$

где

$$\omega_1 = \frac{b + i\sqrt{\Delta_1}}{2a}, \quad \omega_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta_1}}{2a}. \tag{10.13}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\Gamma(z)}{z^x}dz = e^{-x}, \quad \alpha > 0, \quad \operatorname{Re}(x) > 0,$$

то

$$S_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}e^{2\pi i n\omega_1} + \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}e^{2\pi i n\omega_2}.$$

Отсюда вытекает формула:

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta_\Omega(s) - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{s-1}\right\} = \frac{\pi^2}{3a} + \frac{4\pi C}{\sqrt{\Delta_1}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\log\frac{a}{a_1} +$$

$$+ \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}e^{2\pi i n\omega_1} + \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}e^{2\pi i n\omega_2}. \tag{10.14}$$

Обратимся к известной формуле Лиувилля, согласно которой

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{e^{ns}-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \tag{10.15}$$

где арифметические функции $a(n)$ и $b(n)$ связаны между собою соотношением

$$a(n) = \sum_{n=d\delta} b(d),$$

причем суммирование распространено на все делители n.

Если здесь положить $b(d) = d$, то будем иметь $a(n) = S(n)$ — сумме делителей n, после чего формула (10.15) даст:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n) e^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{ns}-1}, \qquad \operatorname{Re}(s) > 0. \tag{10.16}$$

Интегрируя это равенство по s, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n} e^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - e^{-ns}), \qquad \operatorname{Re}(s) > 0,$$

а так как

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \omega\nu}) = e^{-\frac{\pi i \omega}{12}} \eta(\omega)$$

и

$$\eta^3(\omega) = \frac{1}{4} \vartheta_1'(0, e^{2\pi i \omega}),$$

где $\vartheta_1(z, q)$ выражается рядом

$$\vartheta_1(z, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin z - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3z + 2p^{\frac{25}{4}} \sin 5z + \ldots,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n} e^{2\pi i n \omega} = \frac{\pi i \omega}{12} + \log \eta(\omega).$$

Поэтому соотношение (10.14) приводит к формуле Кронекера [см. ([3])]:

$$\lim_{s \to 1} \left\{ \zeta_\Omega(s) - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}} \frac{1}{s-1} \right\} = \frac{4\pi C}{\sqrt{\Delta_1}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}} \log \frac{a}{\Delta_1} - \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}} \log \{\eta(\omega_1) \eta(\omega_2)\}. \tag{10.17}$$

Сравнивая правые части формул (10.1) и (10.17), найдем значение производной $\zeta_\Omega'(0)$ для случая мнимого квадратичного поля, а именно:

$$\zeta_\Omega'(0) = 2 \log \frac{2\pi \eta(\omega_1) \eta(\omega_2)}{\sqrt{a}}, \tag{10.18}$$

где числа ω_1 и ω_2 определяются равенствами (10.13).

Из формул (10.4) и (10.12) можно найти и значения функций $\zeta_\Omega(2)$ $\zeta_\Omega(3)$ и т. д. Так, например,

$$\zeta_\Omega(2) = \frac{2}{a^2} \zeta(4) + \frac{2}{c^2} \zeta(4) + R_0 + R_1 +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}} \left(\frac{a}{\Delta_1}\right) \frac{(\sigma - 1) \zeta(\sigma) \zeta(4 - \sigma)}{\sin \frac{\pi\sigma}{2}} R_\sigma^{(2)} d\sigma,$$

где

$$R_0 = -\frac{2\zeta(4)}{c^2}, \quad R_1 = \frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1 \sqrt{\Delta_1}}.$$

Правую часть этого соотношения можно преобразовать к виду

$$\zeta_{\Omega}(2) = \frac{2}{a^2}\zeta(4) + \frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}} +$$

$$+ \frac{8\pi^2}{\Delta_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta+1)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_1)^{\delta+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta+1)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_2)^{\delta+1}}\right\} +$$

$$+ \frac{8\pi a}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_1)^{\delta}} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_2)^{\delta}}\right\}, \qquad (10.19)$$

где через $S_3(n)$ обозначена сумма третьих степеней делителей числа n.

Последнее обстоятельство следует из равенства

$$\zeta(s)\zeta(s-3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Отсюда вытекает формула, аналогичная соотношению (10.14), а именно:

$$\zeta_{\Omega}(2) = \frac{2}{a^2}\zeta(4) + \frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}} + \frac{8\pi^2}{\Delta_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^2}e^{2\pi i\omega_1 n} + \frac{8\pi^2}{\Delta_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^2}e^{2\pi i\omega_2 n} +$$

$$+ \frac{8a\pi}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}e^{2\pi i\omega_1 n} + \frac{8a\pi}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}e^{2\pi i\omega_2 n}. \qquad (10.20)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\xi(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i\nu x})^{\nu^3}, \qquad 2\pi i x = \alpha + i\beta, \qquad \alpha < 0, \qquad (10.21)$$

и примем во внимание соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_3(n)e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{\pi x}-1}, \qquad \mathrm{Re}(x) > 0,$$

получаемое из формулы Лиувилля (10.16) при $b(d) = d^3$; тогда мы без труда найдем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^2}e^{2\pi i n x} = -2\pi i\int\limits_0^x \log\xi(t)\,dt - \frac{\pi^2}{72}, \qquad (10.22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}e^{2\pi i n x} = 4\pi^2\int\limits_0^x (x-t)\log\xi(t)\,dt - \frac{i\pi^3}{36}x - \frac{\zeta(3)}{2}. \qquad (10.23)$$

В результате выражение (10.20) примет следующую форму:

$$\zeta_{\Omega}(2) = \frac{\pi^2}{45a^2} - \frac{16\pi^3}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\int\limits_0^{\omega_1}(2at-b)\log\xi(t)\,dt - \frac{16\pi^3}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\int\limits_0^{\omega_2}(2at+b)\log\xi(t)\,dt, \qquad (10.24)$$

где числа ω_1 и ω_2 выражаются при помощи равенств (10.13). Формула (10.24) упрощается в частном случае, когда $a = c = 1$, $b = 0$, т. е. когда $F(n)$ представляет собою число разложений n на сумму двух квадратов.

Действительно, в этом случае $\omega_1 = \omega_2 = i$, и формула (10.20) дает соотношение

$$\zeta_\Omega(2) = 2\zeta(4) + \pi\zeta(3) + 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^2} e^{-2\pi n} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-2\pi n}. \quad (10.25)$$

Вторую из сумм, входящих в правую часть последнего соотношения, можно исключить, для чего рассмотрим формулу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-2\pi n\rho} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+3) \frac{ds}{(2\pi\rho)^s}, \qquad \alpha > 1.$$

Проинтегрируем функцию, стоящую здесь под знаком интеграла, по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\alpha - iT), \quad B(\alpha + iT), \quad C(\beta + iT), \quad D(\beta - iT), \quad -4 < \beta < 3$$

и перейдем затем к пределу при $T \to +\infty$: тогда мы придем к равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+3)}{(2\pi\rho)^s} ds =$$

$$= R_1 + R_0 + R_{-2} + R_{-3} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+3)}{(2\pi\rho)^s} ds, \quad (10.26)$$

где через R_1, R_0, R_{-2} и R_{-3} обозначены вычеты подинтегральной функции, которые оказываются равными

$$R_0 = \frac{\pi^3}{72\rho}, \quad R_1 = -\frac{1}{2}\zeta(3), \quad R_{-2} = -\frac{1}{2}\zeta(3)\rho^2, \quad R_{-3} = \frac{\pi^3}{72}\rho^3.$$

Преобразовывая правый из входящих в формулу (10.26) интегралов посредством подстановки $s = -2 - \sigma$, найдем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+3)}{(2\pi\rho)^s} ds = -\rho^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{-2-\beta-i\infty}^{-2-\beta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)\zeta(\sigma+3)}{\left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^\sigma} d\sigma,$$

после чего соотношение (10.26) примет форму

$$\frac{1}{2}\zeta(3) - \frac{\pi^3}{72}\frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-2\pi n\rho} =$$

$$= -\rho^2 \left\{ \frac{1}{2}\zeta(3) - \frac{\pi^3}{72}\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-\frac{2\pi n}{\rho}} \right\}. \quad (10.27)$$

Полагая здесь $\rho = 1$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-2\pi n} = -\frac{1}{2}\zeta(3) + \frac{\pi^2}{72}$$

и, следовательно,

$$\zeta_\Omega(2) = \frac{\pi^4}{20} + 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^2} e^{-2\pi n}. \quad (10.28)$$

Но по формуле (10.22)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^2} e^{-2\pi n} = -2\pi i \int_0^i \log \xi(t)\, dt - \frac{\pi^2}{72},$$

и окончательно получаем:

$$\zeta_{\Omega}(2) = -\frac{\pi^4}{180} + 8\pi^3 \int_0^1 \log \xi(it)\, dt. \tag{10.29}$$

11°. Формула (10.20) может быть выведена и без помощи интеграла (10.6). Чтобы показать это, обратимся к формуле

$$\zeta_{\Omega}(2) = \frac{2}{a^2}\zeta(4) + \frac{2}{a^2}\zeta(4) + S, \tag{11.1}$$

где

$$S = \frac{1}{a^2} \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(x+\omega y)^2\,(x+\overline{\omega} y)^2}.$$

Напишем равенство

$$\frac{1}{(x+\omega y)^2\,(x+\widetilde{\omega} y)^2} = -\frac{a^2}{\Delta_1}\frac{1}{y^2}\frac{1}{(x+\omega y)^2} + \frac{2a^3 i}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{y^3}\left\{\frac{1}{x+\omega y} - \frac{1}{x}\right\} -$$
$$-\frac{a^2}{\Delta_1}\frac{1}{y^2}\frac{1}{(x+\widetilde{\omega} y)^2} - \frac{2a^3 i}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{y^3}\left\{\frac{1}{x+\widetilde{\omega} y} - \frac{1}{x}\right\}$$

и на основании соотношений

$$\frac{1}{(x+\omega y)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\,\frac{(1-s)\,ds}{\omega^{2-s} y^{4-s} x^s},$$

$$\frac{1}{x+\omega y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\,\frac{ds}{\omega^{1-s} y^{4-s} x^s}, \qquad 0<\alpha<2,$$

преобразуем его к следующему виду:

$$\frac{1}{(x+\omega y)^2\,(x+\widetilde{\omega} y)^2} = -\frac{a^2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\,\frac{(1-s)\,ds}{\omega^{2-s} y^{4-s} x^s} -$$
$$-\frac{a^2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\,\frac{(1-s)\,ds}{\widetilde{\omega}^{2-s} y^{4-s} x^s} + \frac{2a^3 i}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\,\frac{ds}{\omega^{1-s} y^{4-s} x^s} -$$
$$-\frac{2a^3 i}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\,\frac{ds}{\widetilde{\omega}^{1-s} y^{4-s} x^s}.$$

Из этого равенства вытекает, что

$$S = -\frac{4}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\, e^{-\frac{\pi i s}{2}} \cos\frac{\pi s}{2}\cdot\frac{1-s}{\omega^{2-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds -$$
$$-\frac{4}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\, e^{\frac{\pi i s}{2}} \cos\frac{\pi s}{2}\cdot\frac{1-s}{\widetilde{\omega}^{2-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds +$$
$$+\frac{8ai}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\, e^{-\frac{\pi i s}{2}} \cos\frac{\pi s}{2}\,\frac{1}{\omega^{1-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds -$$
$$-\frac{8ai}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\, e^{\frac{\pi i s}{2}} \cos\frac{\pi s}{2}\,\frac{1}{\widetilde{\omega}^{1-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds.$$

Если проинтегрировать входящие сюда подинтегральные функции по обводу четырехугольника с вершинами $A(\alpha - iT)$, $B(\alpha + iT)$, $C(\beta + iT)$, $D(\beta - iT)$, где $-1 < \beta < 0$, то в пределе при $T \to +\infty$ получится формула

$$S = -\frac{2}{c^2}\zeta(4) + \frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}} + \frac{2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\frac{1-s}{(-i\omega)^{2-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds +$$

$$+\frac{2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\frac{1-s}{(i\tilde{\omega})^{2-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds +$$

$$+\frac{4}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\frac{1}{(-i\tilde{\omega})^{1-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds +$$

$$+\frac{4}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\frac{1}{(i\tilde{\omega})^{1-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds.$$

Преобразуем отдельные члены этого равенства посредством функционального уравнения

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)}{(2\pi)^s};$$

тогда мы получаем равенство

$$S = -\frac{2}{c^2}\zeta(4) + \frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}} +$$

$$+\frac{8\pi^2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-\beta-i\infty}^{2-\beta+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma)}{(-2\pi i\omega)^{\sigma}}\zeta(\sigma+2)\zeta(\sigma-1)\,d\sigma +$$

$$+\frac{8\pi^2}{\Delta_1}\int\limits_{2-\beta-i\infty}^{2-\beta+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma)}{(2\pi i\tilde{\omega})^{s}}\zeta(\sigma+2)\zeta(\sigma-1)\,d\sigma +$$

$$+\frac{8\pi a}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\beta-i\infty}^{1-\beta+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma)}{(-2\pi i\omega)^{s}}\zeta(\sigma+3)\zeta(\sigma)\,d\sigma +$$

$$+\frac{8\pi a}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\beta-i\infty}^{1-\beta+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma)}{(2\pi i\tilde{\omega})^{\sigma}}\zeta(\sigma+3)\zeta(\sigma)\,d\sigma).$$

Развернув здесь произведение римановых функций в ряд Дирихле по формуле

$$\zeta(s)\zeta(s-3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

получим соотношение (10.19), из которого вытекают формулы (10.20) и (10.24).

Поступило
26. 1. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кошляков Н. С., О сумматорных формулах в квадратичных числовых областях, Матем. сб., XXXV, 2 (1928), 221—236.

[2] Кошляков Н. С., О некоторых формулах, относящихся к функциям $\zeta(s)$ и $\zeta_\Omega(s)$, Доклады Ак. наук СССР, XXV, № 7, 567—570.

[3] Кошляков Н. С., On Kronecker's fundamental limit in the theory of quadratic field, Изв. Научно-исслед. инст. математики и механики при Томском гос. унив. им. Куйбышева, т. 1, вып. 3 (1937), 237—241.