



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Sekovanov, L. B. Rybina, First- and second-order framings of Mandelbrot sets and structure of fixed points of quadratic polynomials,  
*Fundam. Prikl. Mat.*, 2022, Volume 24, Issue 2, 197–212

<https://www.mathnet.ru/eng/fpm1931>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

April 28, 2025, 15:38:45



# Обрамления первого и второго порядков множеств Мандельброта и структура неподвижных точек полиномов второй степени

**В. С. СЕКОВАНОВ**

*Костромской государственный университет*  
e-mail: sekovanovvs@yandex.ru

**Л. Б. РЫБИНА**

*Костромская государственная сельскохозяйственная академия*  
e-mail: larisa.rybina.2014@mail.ru

УДК 517.988.5

**Ключевые слова:** множество Мандельброта, обрамления первого и второго порядков, множество Жюлиа, заполняющее множество Жюлиа, неподвижная точка, кардиоида, лемниската, окружность, вычет, полюс, почка множества Мандельброта, критическая точка, точка периода два.

## Аннотация

В статье продолжены исследования Р. Кроновера и Д. Минлора, Х.-О. Пайтгена и П. Х. Рихтера. С помощью математических методов и компьютерных экспериментов выявлены обрамления первого и второго порядков множеств Мандельброта трёх семейств полиномов второй степени комплексной переменной. Установлена связь между обрамлениями первого и второго порядков множеств Мандельброта функций  $f_2(z) = z^2 + cz$ ,  $f_3(z) = z^2 + z + c$ ,  $f_4(z) = cz^2 + c$  с замечательными кривыми — кардиоидой, лемникатой и окружностью. Разработаны алгоритмы построения обрамлений множеств Мандельброта рассматриваемых функций в математическом пакете MathCad и программах на языке Паскаль. Разработаны алгоритмы построения множеств Мандельброта в программах на языке Паскаль.

## Abstract

*V. S. Sekovanov, L. B. Rybina, First- and second-order framings of Mandelbrot sets and structure of fixed points of quadratic polynomials, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 24 (2022), no. 2, pp. 197–212.*

The paper continues the research of R. Kronover and J. Minlor, H.-O. Peitgen and P. H. Richter. Using mathematical methods and computer experiments, the first- and second-order framings of the Mandelbrot sets of three families of the quadratic polynomials of a complex variable are revealed. The connection between the first- and second-order framings of Mandelbrot sets of the functions  $f_2(z) = z^2 + cz$ ,  $f_3(z) = z^2 + z + c$ , and  $f_4(z) = cz^2 + c$  with remarkable curves (cardioid, lemniscate, and circle) was established. The algorithms of constructing the framings of Mandelbrot sets of considered functions in the mathematical package MathCad and Pascal programs have been worked out. Algorithms for constructing Mandelbrot sets in Pascal programs are developed.

Множества Мандельброта являются сложнейшими математическими объектами, которые в настоящее время интенсивно исследуются и находят приложения [1, 3–17].

Следуя [1], под множеством Мандельброта полинома второй степени мы будем понимать множество, состоящее из тех значений параметра комплексной плоскости, при которых орбита критической точки ограничена.

Доминирующими фигурами множеств Мандельброта являются их обрамления, исследовавшие Р. Кроновером [1], Дж. Минлором [3], Х.-О. Пайтгеном и П. Х. Рихтером [4]. Р. Кроновер показал, что обрамлением первого порядка множества Мандельброта функции  $f_1(z) = z^2 + c$  является область, ограниченная кардиоидой, а обрамлением второго порядка — круг.

Д. Минлор показал, что обрамлением первого порядка для функции  $f_2(z) = z^2 + cz$  являются области, ограниченные касающимися окружностями.

Х.-О. Пайтген и П. Х. Рихтер [4] показали, что точки  $c = -0,1226 \pm 0,7449i$  будут центрами самых больших почек множества Мандельброта функции  $f_1(z) = z^2 + c$ , т. е. таких множеств, каждая точка которых обладает свойством, что третья итерация функции  $f_1(z) = z^2 + c$  имеет неподвижную притягивающую точку.

В данной статье мы продолжим исследования Р. Кроновера, Д. Минлора, Х.-О. Пайтгена и П. Х. Рихтера:

- а) выявим обрамление второго порядка множества Мандельброта для функции  $f_2(z) = z^2 + cz$ ;
- б) выявим обрамления первого и второго порядков множеств Мандельброта для функций  $f_3(z) = z^2 + z + c$ ,  $f_4(z) = cz^2 + c$ .

Пусть дано  $P_c(z)$  — семейство полиномов, зависящих от параметра (например, одна из функций  $f_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ).

**Определение 1.** Обрамлием первого порядка множества Мандельброта полинома  $P_c(z)$  будем называть множество  $M_c^1$ , для каждой точки  $c$  которого полином  $P_c(z)$  имеет притягивающую неподвижную точку.

**Определение 2.** Обрамлием второго порядка множества Мандельброта полинома  $P_c(z)$  будем называть множество  $M_c^2$ , для каждой точки  $c$  которого вторая итерация  $P_c^{(2)}(z)$  имеет притягивающую неподвижную точку (или, что равносильно,  $P_c(z)$  имеет притягивающую точку периода два).

В [1] Р. Кроновер, в [4] Х.-О. Пайтген и П. Х. Рихтер показали, что обрамлением первого порядка множества Мандельброта функции  $f_1(z) = z^2 + c$  является внутренность кардиониды, задаваемой уравнением

$$c = \frac{1}{2}e^{i\Theta} - \frac{1}{4}e^{2i\Theta}, \quad \Theta \in [0, 2\pi],$$

а обрамлением второго порядка множества Мандельброта той же функции — внутренность окружности, задаваемой уравнением

$$|c + 1| = \frac{1}{4}.$$

Д. Минлор показал в [3], что обрамлением первого порядка множества Мандельброта функции  $f_2(z) = z^2 + cz$  является внутренность множества  $(2 + \mathbb{D}) \cup \mathbb{D}$ , где  $\mathbb{D}$  — единичный открытый круг радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1).

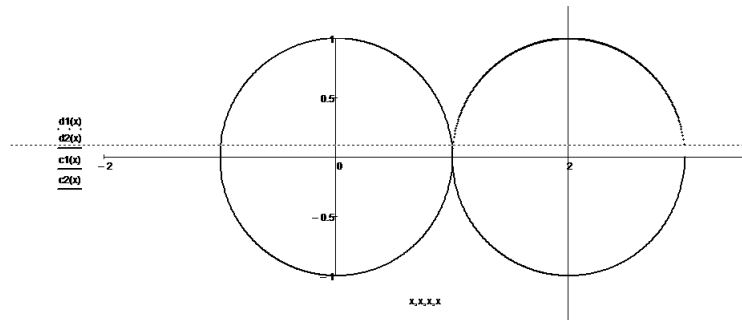


Рис. 1. Обрамление первого порядка функции  $f_2(z)$

Д. Минлор отмечает, что очень важной частью комплексной динамики является изучение параметризованных семейств отображений, которые лишь вскользь упоминаются в исследованиях. Говоря о голоморфной динамике, Д. Минлор указывает, что данная область исследований обширна и быстро развивается [3]. Исследованию динамики параметризованных семейств полиномов комплексной переменной второй степени мы и посвятим данную статью.

**Предложение 1.** Обрамлением первого порядка множества Мандельброта для функций  $f_i(z)$ ,  $i = 3, 4$  являются:

а) при  $i = 3$  — внутренность линии, заданной соотношением

$$c = \frac{e^{i\Theta}}{2} - \frac{e^{2i\Theta}}{4} - \frac{1}{4}, \quad \Theta \in [0, 2\pi];$$

б) при  $i = 4$  — внутренность линии, заданной соотношением

$$c = \sqrt{\frac{e^{i\Theta}}{2} - \frac{e^{2i\Theta}}{4}}, \quad \Theta \in [0, 2\pi].$$

**Доказательство.** Пусть  $i = 3$ . Неподвижными точками функции  $f_3(z) = z^2 + z + c$  являются точки  $z_1 = \sqrt{-c}$ ,  $z_2 = -\sqrt{-c}$ , а производная функции  $f_c(z)$  равна  $2z + 1$ .

Пусть  $z$  — притягивающая неподвижная точка. Тогда выполняются два условия:

- 1)  $f_c(z) = z^2 + z + c = z$ ;
- 2)  $|f'_c(z)| = |2z + 1| < 1$ .

Из второго условия следует, что точки границы удовлетворяют соотношению  $|2z + 1| = 1$ . Таким образом,  $|2(\pm\sqrt{-c}) + 1| = 1$ . Тогда  $|2(\pm\sqrt{-c}) + 1| = e^{i\Theta}$ ,  $\Theta \in [0, 2\pi]$ . Из последнего равенства получаем

$$-c = \frac{(e^{i\Theta} - 1)^2}{4}.$$

Проведя несложные вычисления, получаем

$$c = \frac{e^{i\Theta}}{2} - \frac{e^{2i\Theta}}{4} - \frac{1}{4}, \quad \Theta \in [0, 2\pi].$$

Нетрудно убедиться, что последнее уравнение задаёт кардиоиду (рис. 2).

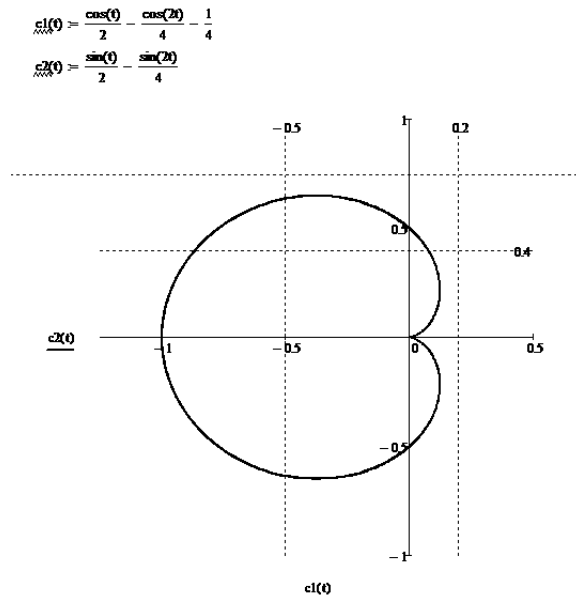


Рис. 2. Обрамление первого порядка функции  $f_3(z)$

Пусть  $i = 4$ . Если  $z$  — притягивающая неподвижная точка, то выполняются два условия:

- 1)  $f_c(z) = cz^2 + c = z$ ;
- 2)  $|f'_c(z)| = |2cz| < 1$ .

Из второго условия следует, что точки границы удовлетворяют соотношению  $|2cz| = 1$ . Таким образом,

$$\left| 2c \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c^2}}{2c} \right| = 1.$$

Следовательно,  $|1 \pm \sqrt{1 - 4c^2}| = 1$ . Далее находим, что

$$1 \pm \sqrt{1 - 4c^2} = e^{i\Theta}, \quad \Theta \in [0, 2\pi].$$

Из последнего равенства получаем

$$c = \sqrt{\frac{e^{i\Theta}}{2} - \frac{e^{2i\Theta}}{4}}$$

(рис. 3). □

$$c1(t) := \sqrt{\frac{\frac{\cos(t)}{2} - \frac{\cos(2t)}{4} + \sqrt{\frac{5}{16} - \frac{\cos(t)}{4}}}{2}} \quad c11(t) := -\sqrt{\frac{\frac{\cos(t)}{2} - \frac{\cos(2t)}{4} + \sqrt{\frac{5}{16} - \frac{\cos(t)}{4}}}{2}}$$

$$c2(t) := \sqrt{\frac{\frac{\cos(2t)}{4} - \frac{\cos(t)}{2} + \sqrt{\frac{5}{16} - \frac{\cos(t)}{4}}}{2}} \quad c22(t) := -\sqrt{\frac{\frac{\cos(2t)}{4} - \frac{\cos(t)}{2} + \sqrt{\frac{5}{16} - \frac{\cos(t)}{4}}}{2}}$$

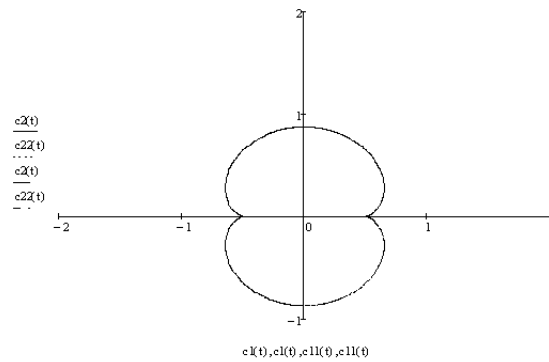


Рис. 3. Обрамление первого порядка функции  $f_4(z)$

**Теорема 1.** Обрамлением второго порядка множества Мандельброта для функции  $f_i(z)$ ,  $i = 2, 3, 4$ , являются:

а) при  $i = 2$  — внутренность линии, заданной соотношением

$$|c^2 - 2c - 4| = 1;$$

б) при  $i = 3$  — внутренность линии, заданной соотношением

$$\left|c + \frac{5}{4}\right| = \frac{1}{4};$$

в) при  $i = 4$  — внутренность линии, заданной соотношением

$$|c^2 + 1| = \frac{1}{4}.$$

**Доказательство.** Пусть  $z$  — неподвижная притягивающая точка периода 2 функции  $f_i(z)$ ,  $i = 2, 3, 4$ . Тогда  $f_i^{(2)}(z) = z$ , где  $f_i^{(2)}(z)$  — вторая итерация функции  $f_i(z)$ . Поскольку неподвижные точки функции  $f_i(z)$ ,  $i = 2, 3, 4$ , являются неподвижными точками функции  $f_i^{(2)}(z)$ , то многочлен  $f_i^{(2)}(z) - z$  делится без остатка на многочлен  $f_i(z) - z$ . Проведем соответствующие вычисления, получим

$$\begin{aligned} f_2^{(2)}(z) - z &= (z^2 + cz - z)(z^2 + (c+1)z + c + 1), \\ f_3^{(2)}(z) - z &= (z^2 + c)(z^2 + 2z + c + 2), \\ f_4^{(2)}(z) - z &= (cz^2 + c - z)(c^2z^2 + cz + c^2 + 1). \end{aligned}$$

Заметим, что производные вторых итераций рассматриваемых функций соответственно равны

$$\begin{aligned} (f_2^{(2)}(z))' &= (2z + c)(2(z^2 + cz) + c), \\ (f_3^{(2)}(z))' &= (2z + 1)(2(z^2 + z + c) + 1), \\ (f_4^{(2)}(z))' &= 4c^2z(cz^2 + c). \end{aligned}$$

Каждое из уравнений  $f_i^{(2)}(z) - z = 0$ ,  $i = 2, 3, 4$ , имеет четыре корня. Пусть  $z_1^i, z_2^i$  — корни уравнения  $f_i(z) - z = 0$ . Тогда  $z_1^i, z_2^i$  — корни уравнения  $f_i^{(2)}(z) - z = 0$ ,  $i = 2, 3, 4$ . Будем считать, что  $z_3^i, z_4^i$  — корни уравнения  $f_i^{(2)}(z) - z = 0$ , не являющиеся корнями уравнения  $f_i(z) - z = 0$ ,  $i = 2, 3, 4$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} (z_3^2)^2 + cz_3^2 &= z_4^2, & (z_4^2)^2 + cz_4^2 &= z_3^2, \\ (z_3^3)^2 + z_3^3 + c &= z_4^3, & (z_4^3)^2 + z_4^3 + c &= z_3^3, \\ c(z_3^4)^2 + c &= z_4^4, & c(z_4^4)^2 + c &= z_3^4. \end{aligned}$$

Оценим теперь модули производных второй итерации каждой функции отдельно.

Для функции  $f_2(z)$  получим

$$|(f_2^{(2)}(z_4^3))'| = |(f_2^{(2)}(z_3^3))'| = |(2z_3^2 + c)(2z_4^2 + c)| = |4z_3^2z_4^2 + 2(z_3^2 + z_4^2)c + c^2|.$$

Применяя формулу Виета к квадратному трёхчлену  $z^2 + (c+1)z + c + 1$ , получаем  $z_3^2z_4^2 = c + 1$ ,  $z_3^2 + z_4^2 = -c - 1$ . Следовательно,

$$|(f_2^{(2)}(z_4^3))'| = |c^2 - 2c - 4| = |c - \sqrt{5} - 1||c + \sqrt{5} - 1|.$$

Таким образом, значения  $c$ , для которых у функции  $f_2(z) = z^2 + cz$  существуют периодические притягивающие точки периода 2 в заполняющем множестве Жюлиа, будут удовлетворять неравенству  $|c^2 - 2c - 4| < 1$  (или, что равносильно, у функции  $f_2^{(2)}(z)$  существуют неподвижные притягивающие точки). Это происходит, когда точки  $c$  будут находиться внутри лемнискаты, заданной соотношением  $|c - \sqrt{5} - 1||c + \sqrt{5} - 1|$ , которая состоит из двух овалов, примыкающих

вдоль оси  $OX$  слева к кругу  $\mathbb{D}$  и справа к кругу  $2 + \mathbb{D}$ , которые являются границами обрамлений первого порядка множества Мандельброта данной функции (рис. 4).

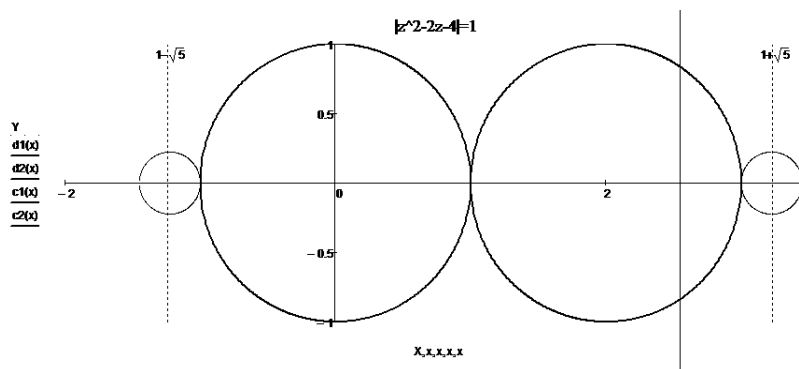


Рис. 4. Обрамления 1-го и 2-го порядков функции  $f_2(z)$

Для функции  $f_3(z)$  будем иметь:

$$\left| \left( f_3^{(2)}(z_4^2) \right)' \right| = \left| \left( f_3^{(2)}(z_3^2) \right)' \right| = |(2z_3^3 + 1)(2z_4^3 + 1)| = |4z_3^3 z_4^3 + 2(z_3^3 + z_4^3) + 1|.$$

Применяя формулу Виета к квадратному трёхчлену  $z^2 + 2z + c + 2$ , получаем  $z_3^3 z_4^3 = c + 2$ ,  $z_3^3 + z_4^3 = -2$ . Следовательно,

$$\left| \left( f_3^{(2)}(z_3^3) \right)' \right| = \left| \left( f_3^{(2)}(z_4^3) \right)' \right| = |4c + 5|.$$

Таким образом, значения  $c$ , для которых у функции  $f_3(z) = z^2 + z + c$  существуют периодические притягивающие точки периода 2 в заполняющем множестве Жюлиа, будут удовлетворять неравенству

$$\left| c + \frac{5}{4} \right| < \frac{1}{4}$$

(или, что равносильно, у функции  $f_3^{(2)}(z)$  существуют неподвижные притягивающие точки). Это происходит, когда точки  $c$  будут находиться внутри круга, граница которого — окружность

$$\left| c + \frac{5}{4} \right| = \frac{1}{4}.$$

Данная окружность будет примыкать слева вдоль вещественной оси к кардиоиде, заданной соотношением

$$c = \frac{e^{i\Theta}}{2} - \frac{e^{2i\Theta}}{4} - \frac{1}{4},$$



которая является границей обрамления первого порядка множества Мандельброта для функции  $f_3(z)$ .

Наконец, для функции  $f_4(z)$  получим

$$|(f_4^{(2)}(z_4^4))'| = |(f_4^{(2)}(z_3^4))'| = |4c^2 z_3^4 z_4^4|.$$

Применяя формулу Виета к квадратному трёхчлену

$$z^2 + \frac{z}{c} + 1 + \frac{1}{c^2},$$

получаем

$$z_3^4 z_4^4 = 1 + \frac{1}{c^2}.$$

Следовательно,

$$|(f_4^{(2)}(z_4^4))'| = |(f_4^{(2)}(z_3^4))'| = |4 + 4c^2|.$$

Таким образом, значения  $c$ , для которых у функции  $f_4(z) = cz^2 + c$  существуют периодические притягивающие точки периода два в заполняющем множестве Жюлиа, будут удовлетворять неравенству

$$|c^2 + 1| < \frac{1}{4}$$

(или, что равносильно, у функции  $f_4^{(2)}(z)$  существуют неподвижные притягивающие точки). Это происходит, когда точки  $c$  будут находиться внутри лемнискаты, заданной соотношением

$$|c - i||c + i| = \frac{1}{4},$$

которая состоит из двух овалов, примыкающих вдоль оси  $OY$  сверху и снизу к линии, заданной соотношением

$$c = \sqrt{\frac{e^{i\theta}}{2} - \frac{e^{2i\theta}}{4}},$$

которая является границей обрамления первого порядка множества Мандельброта функции  $f_4(z)$ .  $\square$

Обрамления первого порядка функций  $f_2(z)$ ,  $f_3(z)$ ,  $f_4(z)$  изображены на рис. 1–3.

Выполнение построений в пакете MathCad на рис. 1, 2 не требуют пояснений.

Поясним программу построения в пакете MathCad обрамления первого порядка множества Мандельброта функции  $f_4(z)$  на рис. 3. Согласно предложению 1 мы имеем

$$c = \sqrt{\frac{e^{i\theta}}{2} - \frac{e^{2i\theta}}{4}}.$$

Следовательно,

$$c^2 = \frac{\cos t}{2} - \frac{\cos 2t}{4} + i \left( \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right).$$

Используя формулу вычисления квадратного корня из комплексного числа (см. [1]) и проведя соответствующие преобразования, из последнего равенства находим

$$c = \pm \left( \sqrt{\frac{\frac{\cos t}{2} - \frac{\cos 2t}{4} + \sqrt{\frac{5}{16} - \frac{1}{4} \cos t}}{2}} + i \sqrt{\frac{\frac{\cos t}{2} + \frac{\cos 2t}{4} + \sqrt{\frac{5}{16} - \frac{1}{4} \cos t}}{2}} \right).$$

Поясним программу построения в пакете MathCad обрамления второго порядка множества Мандельброта функции  $f_1(z)$  на рис. 5.

```

≈(a, b) := |a - b| < 0.001   ORIGIN := 1   n := 3000
x1 := -2   x2 := 3.5   y1 := -1   y2 := 1
x_F1 := 1 - √5   y_F1 := 0   x_F2 := √5 + 1   y_F2 := 0   a := 1

```

---

```

(X
 Y) := | i ← 1
        for x ∈ x1, x1 +  $\frac{x_2 - x_1}{n}$  .. x2           n² = 9 × 10⁶
        for y ∈ y1, y1 +  $\frac{y_2 - y_1}{n}$  .. y2           last(X) = 1032
        | L1 ← √((x - x_F1)² + (y - y_F1)²)           i := 100
        | L2 ← √((x - x_F2)² + (y - y_F2)²)           x_i = -1.393   y_i = 0.148
        | if (L2 - L1) ≈ a                             L1 := √((x_i - x_F1)² + (y_i - y_F1)²) = 0.216
        |   | x_i ← x                                 L2 := √((x_i - x_F2)² + (y_i - y_F2)²) = 4.632
        |   | y_i ← y                                 L1 - L2 = 1
        |   | i ← i + 1
        (X
 Y)

```

Рис. 5. Программа построения обрамление 2-го порядка функции  $f_2(z) = z^2 + cz$

В данной программе сначала задаются начальные условия. Затем находятся корни уравнения  $c^2 - 2c - 4 = 0$ :  $x_{F1} = 1 - \sqrt{5}$ ,  $x_{F2} = \sqrt{5} + 1$ , лежащие на вещественной оси. Следующим шагом является запись в координатной форме  $(x, y)$  равенства  $|c - \sqrt{5} - 1||c + \sqrt{5} - 1| = 1$ , которое указывает, что наша кривая является геометрическим местом точек, произведение расстояний от которых до точек  $x_{F1} = 1 - \sqrt{5}$ ,  $x_{F2} = \sqrt{5} + 1$  равно единице. Затем задаётся шаг изменения  $x$  и шаг изменения  $y$  и в рамках цикла проверяется в координатной форме условие  $|c - \sqrt{5} - 1||c + \sqrt{5} - 1| = 1$  с точностью 0,001. Если данное условие выполняется, то точка  $c$  с координатами  $(x, y)$  изображается чёрным цветом. В противном случае она пропускается (см. подробнее [14]).

Укажем на рис. 4 обрамления первого и второго порядков множества Мандельброта функции  $f_2(z) = z^2 + cz$ .

Построим теперь множества Мандельброта для функций  $f_2(z) = z^2 + cz$ ,  $f_3(z) = z^2 + z + c$  и  $f_4(z) = cz^2 + c$  (рис. 6–8) и сравним их с рассмотренными обрамлениями первого и второго порядков множества Мандельброта данных функций.

Идея построения множества Мандельброта заключается в следующем: если  $z_c$  — притягивающая неподвижная точка для полинома, то критическая точка (т. е. точка, в которой производная функции  $f_i(z)$ ,  $i = 2, 3, 4$ , равна нулю) будет находиться в области притяжения точки  $z_c$  при каждом значении параметра  $c$  (см. [3]). В предложении 2 мы покажем, что полиномы  $f_2(z)$ ,  $f_3(z)$ ,  $f_4(z)$  могут иметь только одну притягивающую неподвижную точку при каждом значении параметра  $c$ .

Нетрудно проверить, что критической точкой для функции  $f_2(z)$  является точка  $-c/2$ , для функции  $f_3(z)$  — точка  $-1/2$ , для функции  $f_4(z)$  — точка 0.

Исследуем значения параметра  $c \in C$  по следующей схеме: если орбита критической точки функции  $f_i(z)$ ,  $i = 2, 3, 4$ , не стремится к бесконечности, то точка  $c$  закрашивается в чёрный цвет, в противном случае точка  $c \in C$  пропускается и рассматривается следующая точка (см. рис. 6–8).

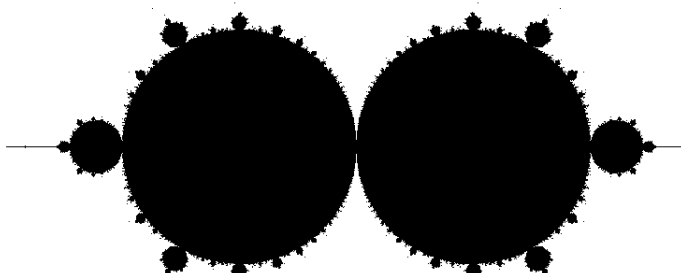
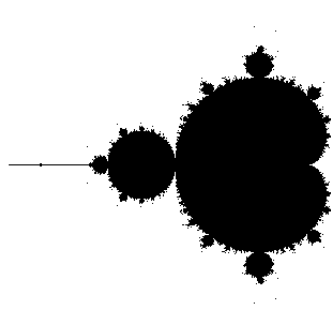
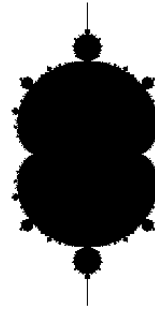


Рис. 6. Множество Мандельброта для функции  $f_2(z)$

Нетрудно заметить, что обрамления множеств Мандельброта первого и второго порядков функций  $f_2(z) = z^2 + cz$ ,  $f_3(z) = z^2 + z + c$  и  $f_4(z) = cz^2 + c$  содержатся в множествах Мандельброта соответствующих функций.

Приведём модуль программы построения множества Мандельброта на языке программирования PascalABC для функции  $f_3(z)$ .

```
for i:integer := 1 to width do
  for j:integer := 1 to height do
    begin
      c := cplx((x_min + i * dx), (y_min + j * dy));
      z := -1/2;
```

Рис. 7. Множество Мандельброта для функции  $f_3(z)$ Рис. 8. Множество Мандельброта для функции  $f_4(z)$ 

```

temp := z;
try
  for k: integer := 1 to iterlim do
    z := f(z, c);
    if (distance(z, temp) < 4) then
      setpixel(i, j, clwhite)
    else
      setpixel(i, j, clblack);
    except
      setpixel(i, j, clblack);
    end;
end;

```

Согласно [3] и предложению 1 для  $c$ , принадлежащих обрамлению первого порядка множеств Мандельброта, функции  $f_2(z) = z^2 + cz$ ,  $f_3(z) = z^2 + z + c$  и  $f_4(z) = cz^2 + c$  имеют неподвижные притягивающие точки. Покажем, что указанные функции могут иметь не более одной неподвижной притягивающей точки.

Для краткости изложения введём некоторые обозначения. Будем обозначать через **P** неподвижную притягивающую точку, через **O** — отталкивающую неподвижную точку, через **N** — нейтральную неподвижную точку для полиномов  $f_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Если функция  $f_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , имеет две неподвижные притягивающие точки, будем писать (**PP**), если она имеет одну неподвижную притягивающую точку и одну нейтральную неподвижную точку, будем писать (**PN**). Аналогично можно определить случаи (**PO**), (**NN**), (**NO**), (**OO**).

**Предложение 2.** Ни одна из функций  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ ,  $f_3(z)$ ,  $f_4(z)$  не может иметь двух притягивающих неподвижных точек или одну неподвижную притягивающую точку и одну неподвижную нейтральную точку.

**Доказательство.** Рассмотрим сначала функцию  $f_1(z)$ . Предположим противное, т. е. что данная функция имеет одну неподвижную притягивающую точку  $z_1$  и одну неподвижную притягивающую (нейтральную) точку  $z_2$ . Тогда

$$|z_1| < \frac{1}{2}, \quad |z_2| < \frac{1}{2} \quad \left( |z_2| = \frac{1}{2} \right).$$

Из уравнения  $z^2 - z + c = 0$  находим, что  $|z_1 + z_2| = 1$ . Поскольку выполняется неравенство  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| < 1$ , мы приходим к противоречию.

Покажем, что для функции  $f_2(z)$  невозможны случаи **(PP)** и **(PN)**. Докажем сначала невозможность случая **(PP)**. Предположим противное, т. е. что существуют две притягивающие неподвижные точки  $z_1$  и  $z_2$ . Тогда одновременно выполняются неравенства  $|c| < 1$  и  $|2 - c| < 1$ , что невозможно.

Покажем теперь, что для функции  $f_2(z)$  невозможен случай **(PN)**. Вновь предположим противное, т. е. что данная функция имеет одну неподвижную притягивающую точку  $z_1$  и одну неподвижную нейтральную точку  $z_2$ . Неподвижными точками  $f_2(z)$  будут точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1 - c$ . Поскольку  $(f_2(z))' = 2z + c$ , то  $|(f_2(z_1))'| = |c|$ ,  $|(f_2(z_2))'| = |2 - c|$ . Следовательно, либо  $|c| < 1$ , либо  $|c| = 1$ . В первом случае точка  $z_2$  отталкивающая. Во втором случае точка  $z_2$  либо нейтральная, либо отталкивающая, что противоречит нашему предположению.

Покажем, что для функции  $f_3(z)$  также невыполнимы условия **(PP)** и **(PN)**. Используя теорию вычетов, покажем сначала, что для функции  $f_3(z)$  невыполнимо условие **(PP)**. Предположим противное, т. е. что существуют две притягивающие неподвижные точки  $z_1$  и  $z_2$ . Согласно [3]

$$\frac{1}{1 - f_3(z_i)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f_3(z)},$$

где  $i = 1, 2$ , а интегрирование проводится в положительном направлении вдоль маленького замкнутого контура, содержащего неподвижную точку  $z_i$ ,  $i = 1, 2$ , функции  $f_3(z)$ .

Пусть  $i = 1$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - f_3'(z_1)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f(z)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{-dz}{(z - i\sqrt{c})(z + i\sqrt{c})} = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{c}} \frac{-1}{z + i\sqrt{c}} = -\frac{1}{2i\sqrt{c}}. \end{aligned}$$

Мы использовали формулу вычисления вычета

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f(z)}$$

относительно изолированного полюса — точки  $z_1$  (см. [2]). Проведя аналогичные вычисления, получим

$$\frac{1}{1 - f_3'(z_2)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f(z)} = \frac{1}{2i\sqrt{c}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{1 - f'_3(z_1)} + \frac{1}{1 - f'_3(z_2)} = 0.$$

Поскольку по нашему предположению  $|f'_3(z_i)| < 1$ ,  $i = 1, 2$ , то

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{1 - f'_3(z_i)} \right) > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Действительно, если  $|f'_3(z_i)| < 1$ , то  $f'_3(z_i) \in \mathbb{D}$ ,  $1 - f'_3(z_i) \in 1 + \mathbb{D}$ ,

$$\frac{1}{1 - f'_3(z_i)} \in L, \quad \text{где } L = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \frac{1}{2} \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Равенство

$$\frac{1}{1 - f'_3(z_1)} + \frac{1}{1 - f'_3(z_2)} = 0$$

противоречит неравенству

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{1 - f'_3(z_i)} \right) > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Мы пришли к противоречию. Используя теорию вычетов, можно по аналогии показать, что ни одна из функций  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ ,  $f_4(z)$  не имеет двух притягивающих неподвижных точек. Однако мы проведём данную проверку другими способами.

Покажем, что для функции  $f_3(z)$  невыполнимо условие **(PN)**. Заметим, что неподвижными точками для функции  $f_3(z)$  будут точки  $z_1 = i\sqrt{c}$ ,  $z_2 = -i\sqrt{c}$  и  $|(f_3(z_1))'| = |1 + 2i\sqrt{c}|$ ,  $|(f_3(z_2))'| = |1 - 2i\sqrt{c}|$ . Предположим противное, т. е. что данная функция имеет одну неподвижную притягивающую точку  $z_1$  и одну неподвижную нейтральную точку  $z_2$ . Тогда получим

$$2 = (1 + 2i\sqrt{c}) + (1 - 2i\sqrt{c}) \leq |1 + 2i\sqrt{c}| + |1 - 2i\sqrt{c}| < 2.$$

Полученное противоречие указывает, для функции  $f_3(z)$  случай **(PN)** невозможен.

Покажем, что для функции  $f_4(z)$  также невыполнимы условия **(PP)** и **(PN)**. Заметим, что неподвижными точками для функции  $f_4(z)$  будут точки

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c^2}}{2c}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c^2}}{2c}$$

и

$$|(f_4(z_1))'| = |1 + \sqrt{1 - 4c^2}|, \quad |(f_4(z_2))'| = |1 - \sqrt{1 - 4c^2}|.$$

Предположим противное, т. е. что данная функция имеет одну неподвижную притягивающую точку  $z_1$  и одну неподвижную притягивающую (нейтральную) точку  $z_2$ . Тогда и в случае **(PP)**, и в случае **(PN)** будем иметь

$$2 = (1 + \sqrt{1 - 4c^2}) + (1 - \sqrt{1 - 4c^2}) \leq |1 + \sqrt{1 - 4c^2}| + |1 - \sqrt{1 - 4c^2}| < 2.$$

Полученное противоречие указывает, для функции  $f_3(z)$  случаи **(PP)**, **(PN)** невозможны.  $\square$









Отметим, что при некоторых значениях параметра  $c$  в остальных четырёх случаях каждая из функций  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ ,  $f_3(z)$ ,  $f_4(z)$  может удовлетворять условиям **(OO)**, **(NN)**, **(PO)**, **(ON)**, т. е. иметь две отталкивающие неподвижные точки, две нейтральные неподвижные точки, притягивающую и отталкивающую неподвижную точки, отталкивающую и нейтральную неподвижную точки. Очевидно, что каждая пара таких точек будет принадлежать заполняющему множеству Жюлиа. Отметим, что множества Жюлиа тесно связаны с множествами Мандельброта и интенсивно изучаются (см. [7, 12]).









Результаты приведены в табл. 1, где указано значение параметра  $c$ , при котором функция  $f_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , имеет соответствующие неподвижные точки, и построены заполняющие множества Жюлиа при данных значениях параметра  $c$ .

**Замечание 1.** Прочерк означает, что соответствующий случай невозможен ни при каком  $c$ .

**Замечание 2.** С алгоритмами построения заполняющих множеств Жюлиа можно познакомиться по [1, 4, 10, 11].

Таблица 1. Заполняющие множества Жюлиа при данных значениях параметра  $c$

№	$z_1$	$z_2$	$f_1(z) = z^2 + c$ $f_1(z)$ и $\gamma(f_1)$	$f_2(z) = z^2 + cz$ $f_2(z)$ и $\gamma(f_2)$	$f_3(z) = z^2 + z + c$ $f_3(z)$ и $\gamma(f_3)$	$f_4(z) = cz^2 + c$ $f_4(z)$ и $\gamma(f_4)$
1	2	3	4	5	6	7
1	<b>P</b>	<b>P</b>	—	—	—	—
2	<b>P</b>	<b>N</b>	—	—	—	—
3	<b>P</b>	<b>O</b>	+ $z^2 - 0,56$  $c = 0,56$	+ $z^2 + \frac{z}{2}$  $c = \frac{1}{2}$	+ $z^2 + z - \frac{1}{2}$  $c = -\frac{1}{2}$	+ $\frac{-2}{3}iz^2 - \frac{2}{3}i$  $c = -\frac{2}{3}i$
4	<b>P</b>	<b>O</b>	+ $z^2 - 1$  $c = -1$	+ $z^2 - 2z$  $c = -2$	+ $z^2 + z - \frac{3}{2}$  $c = -\frac{3}{2}$	+ $-iz^2 - i$  $c = -i$
5	<b>P</b>	<b>O</b>	+ $z^2 + 0,25$	+ $z^2 + z$	+ $z^2 + z$	+ $0,5z^2 + 0,5$

1	2	3	4	5	6	7
			 $c = 0,25$	 $c = 1$	 $c = 0$	 $c = 0,5$
6	<b>P</b>	<b>0</b>	+ $z^2 - 0,75$  $c = -0,75$	+ $z^2 + 3z$  $c = 3$	+ $z^2 + z - 1$  $c = -1$	+ $-i\frac{\sqrt{3}}{2}z^2 - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  $c = -i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Отметим, что результаты исследований, приведённые в табл. 1, имеют самостоятельный интерес, поскольку указывают на сходство и различие множеств Жюлиа в случае, когда исследуемые полиномы имеют одну и ту же структуру неподвижных точек и могут быть использованы для изучения голоморфной динамики в вузе студентами. Неожиданные связи обрамлений множеств Мандельброта с замечательными кривыми (кардиоидой, лемнискатой, окружностью), на наш взгляд, также вызовут интерес и у научных работников, и у студентов. Важно подчеркнуть, что при решении рассмотренных задач голоморфной динамики математические методы и информационные и коммуникационные технологии играют равноправную роль.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 16-18-10304).

## Литература

- [1] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос: в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000.
- [2] Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. — М.: Просвещение, 1977.
- [3] Минлор Дж. Голоморфная динамика. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
- [4] Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993.
- [5] Секованов В. С. О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций // Вестн. КГУ им. Н. А. Некрасова. — 2012. — Т. 18, № 2. — С. 23–28.
- [6] Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств. — М.: Либерком, 2014.



- [7] Секованов В. С. Гладкие множества Жюлиа // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2016. — Т. 21, № 4. — С. 133—150.
- [8] Секованов В. С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2016. — Т. 21, № 3. — С. 185—199.
- [9] Секованов В. С. Что такое фрактальная геометрия? — М.: Ленанд, 2016.
- [10] Секованов В. С. Элементы теории дискретных динамических систем. — СПб.: Лань, 2017.
- [11] Секованов В. С. Фрактальная геометрия. Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения. — СПб.: Лань, 2019.
- [12] Секованов В. С. О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2021. — Т. 23, № 4. — С. 163—176.
- [13] Секованов В. С., Рыбина Л. Б., Берёзкина А. Е. О множествах Жюлиа функций, имеющих параболическую неподвижную точку // *Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин.* — Кострома: КГУ, 2018. — С. 144—150.
- [14] Секованов В. С., Рыбина Л. Б., Стрункина К. Ю. Изучение обрамлений множеств Мандельброта полиномов второй степени как средство развития оригинальности мышления студентов // *Вестн. Костром. гос. ун-та. Сер. Педагогика. Психология. Социокинетика.* — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 193—199.
- [15] Секованов В. С., Смирнова А. О. Развитие гибкости мышления студентов при изучении структуры неподвижных точек полиномов комплексной переменной // *Вестн. Костром. гос. ун-та. Сер. Педагогика. Психология. Социокинетика.* — 2016. — Т. 22, № 3. — С. 189—192.
- [16] Falconer K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* — New York: John Wiley, 1990.
- [17] Sekovanov V., Ivkov V., Piguzov A., Fateev A. Performing a multi-stage mathematical and informational task «Building a fractal set with L-systems and information technologies» as a means of developing students' creativity // *CEUR Workshop Proceedings, Selected Papers of the 11th Int. Scientific-Practical Conf. Modern Information Technologies and IT-Education.* — 2016. — P. 204—211.