ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1998, том 38, № 1, с. 107–114

УДК 519.6:531.362

О ЧИСЛЕННО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

© 1998 г. А. Ф. Крючков, В. А. Сиренек

(198013 С.-Петербург, Технологический университет)

Поступила в редакцию 31.05.96 г.
Переработанный вариант 21.03.97 г.

Приводится удобная для численной реализации методом Монте-Карло формула решения задачи Коши для трехмерного телеграфного уравнения с начальными условиями общего вида.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время резко возрос интерес к исследованиям интенсивных процессов нестационарного массо-энергопереноса. Математическое моделирование таких процессов с наличием релаксационных эффектов приводит к необходимости решения гиперболических уравнений, а также системы таких уравнений [1].

Нахождение же приближенного решения методом конечных разностей, как известно, наталкивается в этом случае на трудности, связанные с искажениями концентрационного фронта, возникающими при переходе от дифференциального уравнения к разностному.

Принципиально другой подход к этой проблеме доставляют вероятностные методы, успешное применение которых к эллиптическим и параболическим уравнениям хорошо известно. Что же касается гиперболического случая, то здесь теория еще далека от завершения.

Основная ценность вероятностных подходов состоит в предпосылке использования весьма простого численного метода решения – метода Монте-Карло, который лишен отмеченных выше недостатков. Кроме ряда преимуществ перед другими методами (возможность оценки отдельных функционалов без нахождения решения в целом, возможность оценки погрешностей в процессе вычислений и т.п.), ему присуще такое важное качество, как малая чувствительность к размерности задачи [2].

Построение монте-карловских алгоритмов связывают либо с дискретизацией, либо с обращением дифференциального оператора. Что касается первого приема, то относительно гиперболических уравнений следует отметить работу [3], где методом Монте-Карло решается разностный аналог неоднородного волнового уравнения с начальными условиями общего вида и с граничными условиями I рода. Подход, связанный с обращением дифференциального оператора, позволяет применять математический аппарат теории интегральных уравнений. Здесь, как правило, используют известное решение некоторой краевой задачи, не совпадающей, вообще говоря, с исходной. Простейшим частным случаем этого приема можно считать метод "блуждания по сферам" для решения гармонического уравнения [4], [5]. Аналог метода блуждания по сферам для волнового уравнения рассматривался в [6], а в [7] – для обобщенного гиперболического уравнения. Подходу с обращением дифференциального оператора посвящены также статьи [8], [9].

Целью настоящей работы является изучение применения метода Монте-Карло для решения одного из простейших гиперболических уравнений, но весьма важного для приложений, – телеграфного уравнения.

Началом исследования в этой области принято считать классическую работу [10], где рассмотрена стохастическая модель, связанная с одномерным телеграфным уравнением, и получено вероятностное решение одной частной задачи Коши для этого уравнения. Кац рассматривал модель случайного блуждания, где материальная точка (частица) движется по прямой с постоянной скоростью, изменяя направление движения с некоторой постоянной интенсивностью, получал рекуррентные соотношения и переходил в них к пределу.

В [11] эти результаты обобщены на случай, когда интенсивность изменения направления движения является функцией времени.

В [12], используя теорию однопараметрических групп и полугруппы линейных операторов, обобщаются результаты работы [10] на случай задачи Коши с начальными условиями общего вида. Заметим, что подходы к решению задачи в [10] и [12] принципиально различны.

Что касается случаев с числом измерений $n \geq 2$, для телеграфного уравнения в [2] замечено: надо взять соответствующее волновое уравнение, выписать решение задачи Коши для волнового уравнения, после этого необходимо время заменить на "рандомизированное" и взять среднее значение. Однако при этом одномерная модель случайного блуждания не обобщается. Например, для $n = 3$ этот факт является, по существу, следствием теоремы [13] о невозвратности в исходное положение частицы, блуждающей в трехмерном пространстве.

В настоящей работе рассматривается трехмерное телеграфное уравнение. В разд. 1, используя [10], получаем вероятностную формулу для решения задачи Коши с начальными условиями общего вида. Затем преобразуем эту формулу к виду, удобному для практических расчетов методом Монте-Карло. В разд. 2 получена некоторая оценка точности приводимых в разд. 1 вычислений. В разд. 3 на примере уравнения Дарбу приведен сравнительный анализ полученных результатов: показано, что вычисления методами разд. 1 дают более высокую точность, нежели проводимые по другой классической формуле.

Отдельные фрагменты работы содержатся в [14], [15], [16]. Аналогичный излагаемому здесь вероятностный подход к решению трехмерного телеграфного уравнения рассматривался в [17], при этом численная реализация осуществлялась несколько иначе.

За рамками настоящей работы остались результаты численных экспериментов, это потребовало бы значительного увеличения объема статьи. Примеры приложений и проведенных нами расчетов имеются в [18], [19], где рассматривались процессы выщелачивания стекла и технология диффузионного способа производства светофокусирующего элемента из различных прозрачных диэлектриков.

В заключение отметим, что к настоящему времени в рассматриваемой теории появилось новое направление, основанное на связях гиперболических уравнений с марковскими процессами [20]–[23].

1. РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

При изучении нестационарных интенсивных процессов массоэнергопереноса часто возникает необходимость решения задачи Коши для многомерного гиперболического уравнения диффузии, т.е. уравнения второго порядка

$$\sigma\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{\partial C}{\partial t} = D\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \tag{1.1}$$

с начальными условиями общего вида

$$C(\mathbf{x}, 0) = \Phi(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial C(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi(\mathbf{x}). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – вектор, n – размерность пространства, $C(\mathbf{x}, t)$ – концентрация переносимой массы, σ – время релаксации среды, D – коэффициент диффузии.

Ограничимся случаем $n = 3$.

Уравнение (1.1) описывает распространение затухающего концентрационного фронта волны с конечной скоростью v. Имеет место соотношение $D = v^2\sigma$. Если положить $a = 1/(2\sigma)$, то при допущенном ограничении (1.1) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial C}{\partial t} = v^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}, \tag{1.3}$$

называемом трехмерным телеграфным уравнением.

Учитывая [10] и [12], для решения задачи Коши (1.3), (1.2) получаем формулу

$$C(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E}\{S(v\xi_a(t))\Phi(\mathbf{x})\} + \mathbb{E}\left\{\int_0^{\xi_a(t)} S(v\tau)\Psi(\mathbf{x})d\tau\right\}, \tag{1.4}$$

где $\mathbb{E}$ – операция математического ожидания, $\xi_a(t)$ – случайное ("рандомизированное") время:

$$\xi_a(t) = \int_0^t (-1)^{N(\tau)} d\tau.$$

Здесь $N(\tau)$ – однородный пуассоновский процесс с интенсивностью a, $S(t)\Phi(\mathbf{x})$ – операторная функция (в данном случае – функция Кирхгофа), представляющая собой решение задачи Коши уже для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = v^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \tag{1.5}$$

при $v = 1$ с начальными условиями

$$C(x, 0) = \Phi(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial C(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{1.6}$$

Целью настоящего раздела является представление выражения (1.4) в форме, удобной для численной реализации ее методом Монте-Карло.

Нам потребуется выражение формулы Кирхгофа в сферической системе координат, поэтому для простоты записи употребим сокращение $(\,,\,,\,)$ для обозначения скобки

$$(x_1 + v\bar{t}\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 + v\bar{t}\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 + v\bar{t}\cos\theta),$$

где за $\bar{t}$ принято $\xi_a(t)$, а через $\Phi_i'(\,,\,,\,)$ обозначим $\partial\Phi(\,,\,,\,)/\partial x_i$. Формула Кирхгофа [24] для решения задачи Коши (1.5), (1.6) имеет вид

$$S(vt)\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi v}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{vt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi(x_1 + vt\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 + vt\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 + vt\cos\theta)v^2t^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\right)\right].$$

Поэтому для первого слагаемого в правой части (1.4) имеем

$$\mathbb{E}\{S(v\bar{t})\Phi(\mathbf{x})\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\,,\,,\,)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\Phi_1'(\,,\,,\,)\sin\theta\cos\varphi + \Phi_2'(\,,\,,\,)\sin\theta\sin\varphi + \Phi_3'(\,,\,,\,)\cos\theta)v\bar{t}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\right]\right\}, \tag{1.7}$$

где $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Если теперь сделать замену переменных $\tau = \bar{t}\,r^3$, то для второго слагаемого в правой части (1.4) получим

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^{\bar{t}} S(v\tau)\Psi(\mathbf{x})\,d\tau\right\} = \mathbb{E}\left\{3\bar{t}\int_0^1 S(v\bar{t}\,r^3)\Psi(\mathbf{x})r^2\,dr\right\} = \mathbb{E}\left\{\frac{3}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Psi(\,,\,,\,)\bar{t}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{\Psi_1'(\,,\,,\,)\sin\theta\cos\varphi + \Psi_2'(\,,\,,\,)\sin\theta\sin\varphi + \Psi_3'(\,,\,,\,)\cos\theta\}v\bar{t}^{\,2}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi r^5\,dr\right\}. \tag{1.8}$$

В (1.8) за $(\,,\,,\,)$ принято уже

$$(x_1 + v\bar{t}\,r^3\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 + v\bar{t}\,r^3\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 + v\bar{t}\,r^3\cos\theta).$$

Заметим, что интегралы в выражении (1.7) представляют собой интегралы по единичной сфере, а в (1.8) – по единичному шару. Известно [4], что моделируемые случайные величины при этом можно находить по формулам $r = \sqrt[3]{\alpha_1}$, $\varphi = 2\pi\alpha_2$, $\cos\theta = 2\alpha_3 - 1$, где α_1, α_2, α_3 – независимые случайные числа, равномерно распределенные на (0.1).

Обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере: $\boldsymbol{\omega} = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}$. Обозначим оператор дифференцирования по направлению $\boldsymbol{\omega}$ через $\nabla_{\boldsymbol{\omega}}$. Учитывая, что совместная плотность распределения сферических координат случайной

точки, равномерно распределенной в шаре радиуса R, равна $3r^3\sin\theta/(4\pi R^3)$, в нашем случае ($R = 1$) выражению (1.4) можно придать вид

$$C(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\Phi(\mathbf{x} + v\bar{t}\,\omega) + v\bar{t}\,\nabla_\omega\Phi(\mathbf{x} + v\bar{t}\,\omega)\}\} + \\ + \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\bar{t}\,\Psi(\mathbf{x} + v\bar{t}\,r^3\omega) + v\bar{t}^{\,2}r^3\nabla_\omega\Psi(\mathbf{x} + v\bar{t}\,r^3\omega)\}\}. \tag{1.9}$$

Внешнее математическое ожидание берется относительно случайной величины $\bar{t}$, внутреннее – относительно ω и r. Вычисление сводится при этом к моделированию некоторой показательно распределенной случайной величины λ с параметром a (времени ожидания очередного скачка пуассоновского процесса $N(\tau)$), что удобно осуществлять по известной формуле [25]: $\lambda = -\ln r/a$, где r – случайная величина, равномерно распределенная на $(0, 1)$.

Если обозначить через $\bar{t}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, M$, $\omega^{(k)}$, $r^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, T$, соответствующие реализации случайных величин, то из (1.9) получим

$$C(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{MT}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{T}[\Phi(\mathbf{x} + v\bar{t}^{(j)}\omega^{(k)}) + v\bar{t}^{(j)}\nabla_{\omega^{(k)}}\Phi(\mathbf{x} + v\bar{t}^{(j)}\omega^{(k)}) + \\ + \bar{t}^{(j)}\Psi(\mathbf{x} + v\bar{t}^{(j)}(r^{(k)})^3\omega^{(k)}) + v(\bar{t}^{(j)})^2(r^{(k)})^3\nabla_{\omega^{(k)}}\Psi(\mathbf{x} + v\bar{t}^{(j)}(r^{(k)})^3\omega^{(k)})]. \tag{1.10}$$

Формулой (1.10) можно пользоваться также для нахождения решения задачи Коши (1.3), (1.2) и в случае, когда $a = a(t)$. При этом моделирование неоднородного пуассоновского процесса $N_{a(t)}(\tau)$ с переменной интенсивностью $a(t)$ удобно проводить уже по методу из [26].

Заметим также, что вычисления по формуле (1.10) были компьютерно апробированы. В химической технологии считается допустимой относительная погрешность вычислений в пределах 10%, поэтому невысокий порядок сходимости метода Монте-Карло был для нас вполне приемлемым. Для вычислений в каждой точке бралось 10000 реализаций процесса Пуассона.

2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Вернемся к исходному выражению (1.4) и обозначим $S(t)\Phi(\mathbf{x})$ через $F(\mathbf{x}, t, \Phi(\mathbf{x}))$, а $S(t)\Psi(\mathbf{x})$ через $F(\mathbf{x}, t, \Psi(\mathbf{x}))$. Тогда (1.4) представится в виде

$$C(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E}\{F(\mathbf{x}, v\bar{t}, \Phi(\mathbf{x}))\} + \mathbb{E}\left\{\int_0^{\bar{t}} F(\mathbf{x}, v\tau, \Psi(\mathbf{x}))d\tau\right\}. \tag{2.1}$$

Разложим F в ряд Тейлора по степеням t в окрестности 0 до второго члена и запишем остаток в форме Лагранжа. Имеем

$$F(\mathbf{x}, t, \Phi(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}, 0, \Phi(\mathbf{x})) + \frac{\partial F(\mathbf{x}, h_1 t, \Phi(\mathbf{x}))}{\partial t}t, \tag{2.2}$$

$$F(\mathbf{x}, t, \Psi(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}, 0, \Psi(\mathbf{x})) + \frac{\partial F(\mathbf{x}, h_2 t, \Psi(\mathbf{x}))}{\partial t}t, \tag{2.3}$$

где $0 < h_1, h_2 < 1$.

Введем еще следующие обозначения:

$$\eta_1 = F(\mathbf{x}, v\bar{t}, \Phi(\mathbf{x})), \quad \eta_2 = \int_0^{\bar{t}} F(\mathbf{x}, v\tau, \Psi(\mathbf{x}))d\tau,$$

$$\nu_1 = \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, h_1 v\bar{t}, \Phi(\mathbf{x}))v\bar{t}, \quad \nu_2 = \int_0^{\bar{t}}\frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, h_2 v\tau, \Psi(\mathbf{x}))v\tau d\tau.$$

Тогда для (2.1) получим следующую краткую запись: $C(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E}\{\eta\}$, где $\eta = \eta_1 + \eta_2$. Дисперсия η, как дисперсия суммы независимых случайных величин, находится по формуле

$$\mathbb{D}\eta = \mathbb{D}\eta_1 + \mathbb{D}\eta_2 = \mathbb{E}\{\eta_1^2\} + \mathbb{E}\{\eta_2^2\} - (\mathbb{E}\{\eta_1\})^2 - (\mathbb{E}\{\eta_2\})^2.$$

Заменив в (2.2) время t на случайное $\bar{t}$, умноженное на v, получим $\eta_1 = \Phi(\mathbf{x}) + \nu_1$. Умножив в (2.3) t на v и проинтегрировав полученное выражение от 0 до $\bar{t}$, найдем

$$\eta_2 = \int_0^{\bar{t}} \Psi(\mathbf{x})d\tau + \nu_2.$$

Положим

$$d_1 = \max_{u \in (-vt,\, vt)} \left|\frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, u, \Phi(\mathbf{x}))\right|, \quad d_2 = \max_{u \in (-vt,\, vt)} \left|\frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, u, \Psi(\mathbf{x}))\right|,$$

тогда легко видеть, что

$$\eta_1^2 \le 2\Phi^2(\mathbf{x}) + 2\nu_1^2 \le 2\Phi^2(\mathbf{x}) + 2d_1^2 v^2 \bar{t}^2,$$

$$\eta_2^2 \le 2\Psi^2(\mathbf{x}) + 2\nu_2^2 \le 2\Psi^2(\mathbf{x})\bar{t}^2 + \frac{1}{2}d_2^2 v^2 \bar{t}^4.$$

Оценим теперь $\mathbb{D}\eta$:

$$\mathbb{D}\eta \le \mathbb{E}\{\eta_1^2\} + \mathbb{E}\{\eta_2^2\} \le 2\Phi^2(\mathbf{x}) + 2(\Psi^2(\mathbf{x}) + d_1^2 v^2)\mathbb{E}\{\bar{t}^2\} + \frac{1}{2}d_2^2 v^2 \mathbb{E}\{\bar{t}^4\}. \tag{2.4}$$

Найдем второй и четвертый моменты случайной величины $\bar{t}$. Вычисление второго момента имеется в [10]; если опустить детали, то

$$\mu_2(t) = \mathbb{E}\{\bar{t}^2\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^t\int_0^t (-1)^{N(\tau_1)}(-1)^{N(\tau_2)}d\tau_1 d\tau_2\right\} =$$

$$= 2\int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \exp[-2a(\tau_2 - \tau_1)]d\tau_1 = \frac{t}{a} - \frac{1}{2a^2}[1 - \exp(-2at)].$$

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$\mu_4(t) = \mathbb{E}\{\bar{t}^4\} = \frac{8}{(2a)^2}\left[\frac{t^2}{2} + \frac{3}{(2a)^2} - \frac{t}{a} - \frac{2at+3}{(2a)^3}\exp(-2at)\right].$$

Подставляя теперь найденные выражения для $\mu_2(t)$, $\mu_4(t)$ в (2.4), получаем

$$\mathbb{D}\eta \le 2\Phi^2(\mathbf{x}) + 2(\Psi^2(\mathbf{x}) + d_1^2 v^2)\frac{t}{a} + \frac{1}{2a^2}d_2^2 v^2\left(t^2 + \frac{3}{2a^2}\right). \tag{2.5}$$

Из (2.5) видно, что при ограниченных $\Phi(\mathbf{x})$ и $\Psi(\mathbf{x})$ дисперсия $\mathbb{D}\eta$ конечна для конечных t. Такой результат дает основания для оценки погрешности в методе Монте-Карло [4].

Пусть

$$\bar{\eta}_M = \left(\sum_{j=1}^{M} \eta^{(j)}\right)/M,$$

тогда при достаточно больших значениях M имеет место оценка

$$\mathbb{P}\{|\bar{\eta}_M - C(\mathbf{x}, t)| < \varepsilon\sqrt{(\mathbb{D}\eta)/M}\} = L(\varepsilon), \tag{2.6}$$

где $L(\varepsilon) = (2/\sqrt{2\pi})\int_0^\varepsilon \exp(-\tau^2/2)d\tau$ есть интеграл вероятностей. Формула (2.6) содержит целое семейство оценок, зависящих от параметра ε. Задаваясь коэффициентом доверия β, можно найти ε_β – корень уравнения $L(\varepsilon) = \beta$.

Несмещенную эмпирическую оценку величины $\mathbb{D}\eta$ можно получить в процессе вычисления $C(\mathbf{x}, t)$ по формуле

$$\mathbb{D}\eta \approx \frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M}(\eta^{(j)})^2 - \frac{1}{M(M-1)}\left(\sum_{j=1}^{M}\eta^{(j)}\right)^2.$$

Из (2.6) видно, что погрешность метода убывает, как $1/\sqrt{M}$. Так как такой порядок убывания представляется недостаточно высоким для точных вычислений, обычно применяют различные приемы преобразования случайных величин, сохраняющие средние значения, но уменьшающие дисперсию.

3. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сначала вернемся к замечанию о том, что в [17] также исследуется метод решения задачи (1.3), (1.2), основанный на вероятностном представлении решения в виде континуального интеграла по пуассоновской мере, причем там использована формула из [20]. К сожалению, в [17] интересующая нас функция задана неявно, и в то же время имеются таблицы как точных, так и приближенных ее значений. Это создает определенные трудности при сравнении расчетов, проводимых по нашей формуле (1.10), с таковыми из [17]. Отметим, что в обоих методах используется двойная рандомизация, общим является моделирование случайного времени. Отличие состоит в том, что вторым моделируемым параметром в [17] является положение точки, равномерно распределенной на сфере, в нашем же методе (за счет некоторой замены переменной) – в шаре. В разд. 2 вычислялись необходимые моменты величины $\bar{t}$ точно, в [17] же приводились лишь асимптотические оценки моментов, получаемые из теории восстановления.

Известно [25], что "трудоемкость" алгоритма решения задачи методом Монте-Карло (в обозначениях настоящей работы) представляется величиной $t_p\mathbb{D}\eta$, где t_p – время, затрачиваемое ЭВМ в среднем на вычисление одного значения $\eta^{(j)}$. Как видно из (2.5), порядок роста $\mathbb{D}\eta$ в нашем методе $O(t^2)$, а "трудоемкость" алгоритма из [17], как отмечается в этой работе, $O(t^4)$.

Рассмотрим теперь частный случай уравнения (1.3) при $a = 1/t$, $\nu = 1$, т.е. трехмерное уравнение Дарбу

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{2}{t}\frac{\partial C}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}. \tag{3.1}$$

Решение задачи Коши (3.1), (1.6) будет определяться тогда первым слагаемым формулы (1.9) с учетом того, что $a = a(t)$. Кроме предложенной нами в разд. 1, в [27] приводится еще одна формула решения этой задачи, а именно

$$C(\mathbf{x}, t) = \int_{-1}^{1} F(\mathbf{x}, t\lambda)d\lambda, \tag{3.2}$$

где $F(\mathbf{x}, t)$ – решение волнового уравнения (1.5) с $\nu = 1$ и теми же начальными условиями (1.6), т.е. $F(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t, \Phi(\mathbf{x}))$ в обозначениях разд. 2.

Если сделать замену переменной $\lambda = 2\kappa - 1$ и использовать формулу Кирхгофа, то из (3.2) получим вероятностную интерпретацию $C(\mathbf{x}, t)$:

$$C(\mathbf{x}, t) = 2\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\Phi(\mathbf{x} + t(2\kappa - 1)\boldsymbol{\omega}) + t(2\kappa - 1)\nabla_{\boldsymbol{\omega}}\Phi(\mathbf{x} + t(2\kappa - 1)\boldsymbol{\omega})\}\}. \tag{3.3}$$

При вычислении $C(\mathbf{x}, t)$ по формуле (3.3), используя метод Монте-Карло, в отличие от (1.9), вместо моделирования пуассоновского процесса $N_{a(t)}(\tau)$ с переменной интенсивностью $a(t) = 1/t$ следует проводить моделирование случайной величины κ, равномерно распределенной на (0, 1).

Таким образом, имеем две формулы для расчета $C(\mathbf{x}, t)$:

$$C(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E}\{F(\mathbf{x}, \bar{t})\}, \tag{3.4}$$

$$C(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E}\{2F(\mathbf{x}, t(2\kappa - 1))\}, \tag{3.5}$$

причем (3.4) получена из (1.9), а (3.5) – из (3.3).

Для сравнения точности расчетов по этим формулам вычислим дисперсии случайных величин $F(\mathbf{x}, \bar{t})$ и $2F(\mathbf{x}, t(2\kappa - 1))$:

$$\mathbb{D}\{F(\mathbf{x}, \bar{t})\} = \mathbb{E}\{F^2(\mathbf{x}, \bar{t})\} - (\mathbb{E}\{F(\mathbf{x}, \bar{t})\})^2;$$

$$\mathbb{D}\{2F(\mathbf{x}, t(2\kappa - 1))\} = 4\mathbb{E}\{F^2(\mathbf{x}, t(2\kappa - 1))\} - (\mathbb{E}\{2F(\mathbf{x}, t(2\kappa - 1))\})^2.$$

Первые моменты случайных величин $\bar{t}$ и $t(2\kappa - 1)$ совпадают и равны 0:

$$\tilde{\mu}_1 = \mathbb{E}\{\bar{t}\} = \int_0^t \mathbb{E}\{(-1)^{N(\tau)}\}d\tau = \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau \frac{1}{y}dy\right)d\tau = 0;$$

$$\tilde{\tilde{\mu}}_1 = \mathbb{E}\{t(2\kappa - 1)\} = \int_0^1 t(2\kappa - 1)d\kappa = 0.$$

Это обстоятельство показывает, что

$$\mathbb{E}\{F^2(\mathbf{x}, \bar{t})\} = \mathbb{E}\{F^2(\mathbf{x}, t(2\kappa - 1))\}$$

и, поэтому

$$\mathbb{D}\{2F(\mathbf{x}, t(2\kappa - 1))\} \geq \mathbb{D}\{F(\mathbf{x}, \bar{t})\}.$$

Таким образом, при одинаковом числе реализаций в методе Монте-Карло, погрешность вычислений по формуле (1.9), вообще говоря, меньше погрешности вычисления по формуле (3.3). Меньшее значение дисперсии определяется лишь более выигрышным в этом отношении выражением случайной величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Таганов И.Н.* Моделирование процессов массо- и энергопереноса. Нелинейные системы. Л.: Химия, 1979.
2. *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.
3. *Гладкий В.С.* Вероятностные вычислительные модели. М.: Наука, 1978.
4. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
5. *Михайлов Г.А.* Некоторые вопросы теории метода Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1974.
6. *Веселовская А.З.* О решении первой краевой задачи для волнового уравнения методом Монте-Карло // Методы Монте-Карло в вычисл. матем. и матем. физ. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974. С. 128–135.
7. *Веселовская А.З.* Несмещенные оценки функционалов от решений некоторых гиперболических уравнений // Там же, 1976. С. 121–128.
8. *Кац М.* О некоторых связях между теорией вероятностей и дифференциальными и интегральными уравнениями // Математика. Сб. перев. 1957. Т. 1. № 2. С. 95–124.
9. *Сиренек В.А., Таганов И.Н.* Вероятностный метод решения краевых задач для нелинейных гиперболических уравнений // Матем. методы в химии. Тр. III. Всес. конф. Т. 3, Матем. обработка экспериментов. Ярославль: Всес. хим. об-во, 1979. С. 25–26.
10. *Кац М.* Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука, 1967.
11. *Kaplan S.* Differential equations in which the Poisson process plays a role // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 264–268.
12. *Kisynski J.* On M. Kac's probabilistic formula for the solution of the telegraphist's equations // Ann. Polonici Math. 1974. V. 29. P. 259–272.
13. *Polya G.* Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitrechung betreffend die Irrfahrt im Straénnetz // Math. Ann. 1921. Bd. 84. S. 149–160.
14. *Сиренек В.А.* Решение многомерного уравнения гиперболической диффузии методом Монте-Карло. – Деп. в ВИНИТИ 06.02.79, № 439.
15. *Сиренек В.А.* Оценка точности решения многомерного уравнения гиперболической диффузии методом Монте-Карло. – Деп. в ВИНИТИ 02.08.1979, № 2890.
16. *Сиренек В.А.* Решение многомерного уравнения Дарбу вероятностными методами. – Деп. в ВИНИТИ 21.08.79, № 3123.
17. *Кабанихина И.И.* Численная реализация вероятностного представления решения задачи Коши для телеграфного уравнения // Методы статистич. моделирования. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. С. 86–90.
18. *Sirenek V.A., Cholodnov V.A., Taganov I.N.* Mathematische Modellierung des instationären Auslaugens von Glas unter Beachtung der Verzögerung der Diffusionsströme // Wiss. Z. TH Leuna-Merseburg. 1987. Bd. 29. № 4. S. 470–478.
19. *Сиренек В.А., Таганов И.Н.* К расчету оптимальных режимов диффузии для получения светофокусирующих элементов. – Деп. в ВИНИТИ 28.09.84, № 6466.

20. *Hersh R., Griego R.* Theory of random evolutions with application to partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 156. № 2. P. 405–418.
21. *Hersh R.* Stochastic solutions of hyperbolic equations // Lect. Notes Math. 1975. V. 446. P. 283–300.
22. *Hersh R.* The method of transmutations // Там же, 1975. V. 446. P. 264–282.
23. *Крючков А.Ф., Сиренек В.А.* Марковские процессы и некоторые гиперболические уравнения математической физики // Математика в вузе – стандарты образования. Тр. междунар. научно-методич. конф. СПб: ГТУ, 1996. С. 176.
24. Годунов С.К.Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
25. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976.
26. *Coleman W.A.* Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the technique to radiation transport problems // Nucl. Sci. and Engng. 1968. V. 32. P. 78–81.
27. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.