Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, М. С. Антимонов, Аналитические решения задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2008, часть 3, 164–167

УДК 536.2(075)

Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, М. С. Антимонов

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛООТДАЧИ

При протекании естественных процессов теплового взаимодействия наряду с изменением температурного состояния тел происходит также изменение и граничных условий теплообмена. Особенно это характерно для коэффициента теплоотдачи α. Переменность коэффициента теплоотдачи в процессе нагрева (охлаждения) тел в условиях конвекции является твёрдо установленным экспериментальным фактом [1, 2]. В связи с чем допущение о его постоянстве во многих практических расчётах может быть весьма грубым приближением к реальным физическим процессам теплообмена.

Покажем, что на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий можно получать решения задач теплообмена с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи [3,4]. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу теплопроводности для бесконечной пластины при граничных условиях третьего рода в случае линейной зависимости коэффициента теплоотдачи от времени $\alpha(\tau) = \alpha_0(1 + \beta\tau)$.

Используя понятие фронта температурного возмущения $q_1(\mathrm{Fo})$, разделив процесс теплообмена на две стадии по времени [3,4], приходим к следующей математической постановке задачи для первой стадии процесса:

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} \quad (0 < \mathrm{Fo} \leqslant \mathrm{Fo}_1;\ 0 \leqslant \xi \leqslant q_1(\mathrm{Fo})); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} - \mathrm{Bi}\,(1 + \mathrm{Pd}\,\mathrm{Fo})\,[\Theta\,(0,\,\mathrm{Fo}) - 1] = 0; \qquad (2)$$

$$\Theta(q_1,\,\mathrm{Fo}) = 0; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\Theta(q_1,\,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} = 0, \qquad (4)$$

где $\Theta = \frac{T - T_0}{T_{\text{ср}} - T_0}$, $\rho = \frac{r}{R}$, $\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{R^2}$, $\mathrm{Pd} = \frac{\beta R^2}{a}$, $\mathrm{Bi} = \frac{\alpha_0 R}{\lambda}$.

Решение задачи (1)–(4), полученное интегральным методом теплового баланса, в первом приближении имеет вид

$$\Theta(\xi,\,\mathrm{Fo}) = \frac{\mathrm{Bi}(1+\mathrm{Pd\,Fo})\left(q_1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{q_1}\right)}{\mathrm{Bi}\,q_1(1+\mathrm{Pd\,Fo})+2}, \tag{5}$$

где $q_1(\mathrm{Fo}) = 2{,}558\sqrt{\mathrm{Fo}}$ при $\mathrm{Bi}=1$, $\mathrm{Pd}=1$.

Положив $q_1(\mathrm{Fo}_1)=1$, найдём время окончания первой стадии процесса $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}1528$.

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса будет:

$$\frac{\partial\Theta(\xi\,,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} \quad (\mathrm{Fo}\geqslant \mathrm{Fo}_1;\ 0\leqslant\xi\leqslant 1); \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Theta\,(0,\,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} - \mathrm{Bi}\,(1+\mathrm{Pd\,Fo})\,[\Theta(0,\,\mathrm{Fo})-1]=0; \tag{7}$$

$$\Theta(1,\,\mathrm{Fo}) = q_2(\mathrm{Fo}); \tag{8}$$

$$\frac{\partial\Theta(1,\,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} = 0. \tag{9}$$

Решение задачи (6)–(9), найденное интегральным методом теплового баланса, записывается в виде

$$\Theta(\xi,\,\mathrm{Fo}){=}\frac{\mathrm{Bi}[1{+}\mathrm{Pd\,Fo}_1{+}(q_2-1)(1{+}\mathrm{Pd\,Fo}_1)(2\xi{-}\xi^2)]{+}2q_2}{2+\mathrm{Bi}(1+\mathrm{Pd\,Fo})}, \tag{10}$$

где

$$q_2\,(\mathrm{Fo}) = 1{-}\exp\left[\ln\frac{3+\mathrm{Bi}\,(1+\mathrm{Pd\,Fo}_1)}{3+\mathrm{Bi}\,(1+\mathrm{Pd\,Fo})} - \ln\frac{2+\mathrm{Bi}\,(1+\mathrm{Pd\,Fo}_1)}{2+i\,(1+\mathrm{Pd\,Fo})} - \right.$$
$$\left. - \frac{9}{\mathrm{BiPd}}\ln\frac{3+\mathrm{Bi}\,(1+\mathrm{Pd\,Fo}_1)}{3+\mathrm{Bi}\,(1+\mathrm{Pd\,Fo})} - 3\,(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_1)\right]. \tag{11}$$

Выражая переменную ξ через Θ и Fo, из соотношений (5) и (8) можно получить формулы для определения изотерм и скоростей их движения.

Графики распределения изотерм и скоростей их движения даны на рис. 1, 2. Их анализ позволяет сделать вывод, что каждая

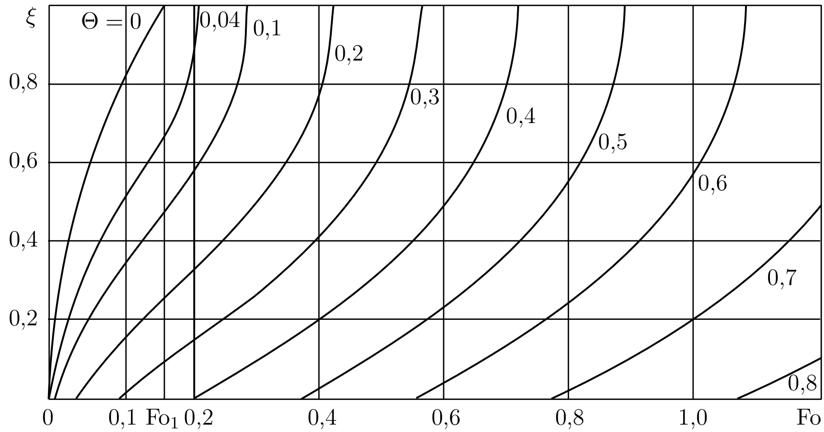

Рис. 1. Распределение изотерм в пластине ($\mathrm{Fo}_1 = 0{,}1528$; $\mathrm{Bi} = 1$; $\mathrm{Pd} = 1$)

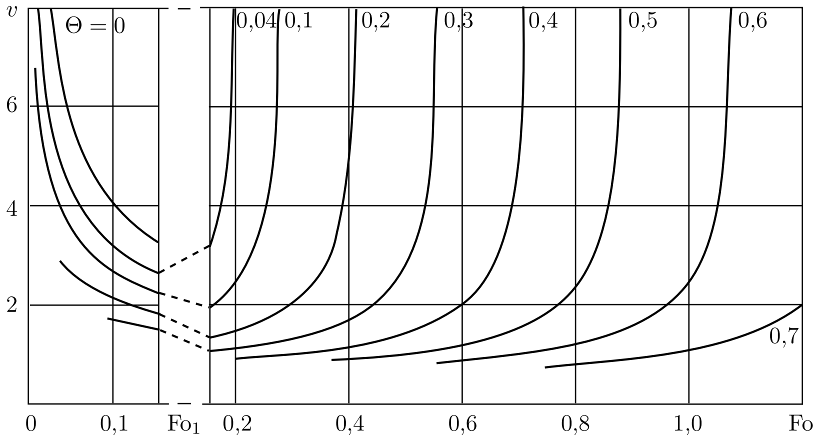

Рис. 2. Распределение скоростей изотерм в пластине ($\mathrm{Fo}_1 = 0{,}1528$; $\mathrm{Bi} = 1$; $\mathrm{Pd} = 1$)

изотерма появляется на поверхности пластины в строго определённый момент времени, имея при этом некоторую начальную скорость (см. рис. 1, 2).

Для изотерм малого потенциала ($0 \leqslant \Theta < 0{,}1$) наблюдаются высокие начальные скорости, устремляющиеся к бесконечности при $\Theta \to 0$ (рис. 2). При увеличении Θ начальные скорости уменьшаются и, начиная с $\Theta = 0{,}4$, они незначительно отличаются друг от друга, стабилизируясь в пределах $0{,}7 \leqslant v_0 \leqslant 0{,}8$. Скорости изотерм при их приближении к значению координаты $\xi = 1$ устремляются к бесконечным величинам.

1. *Шумаков, Н. В.* Метод последовательных интервалов в теплометрии нестационарных процессов [Текст] / Н. В. Шумаков. — М.: Атомиздат, 1979. — 212 с.
2. *Тихонов, А. Н.* Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука. 1974. — 224 с.
3. Аналитические решения задач теплопроводности с переменным начальным условием на основе определения фронта температурного возмущения [Текст] / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Е. В. Стефанюк и др. // Инженерно-физический журнал. — 2007. — Т. 80, № 3. — С. 27–35.
4. *Кудинов, В. А.* Решения задач теплопроводности при переменных во времени граничных условиях на основе определения фронта температурного возмущения [Текст] / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Е. В. Стефанюк // Известия АН Энергетика. — 2007. — № 1. — С. 55–68.

Самарский государственный технический университет, г. Самара

stef-kate@yandex.ru

УДК 519.6

Ш. И. Таюпов

СХЕМЫ МКЭ С ЧИСЛЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ЗАДАЧИ

Введение. В настоящей работе рассматривается граничная задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с вырождающимися коэффициентами. Решение данной задачи в окрестности точки вырождения имеет неограниченную производную [1]. Для численного решения задач с такими особенностями в [2] был предложен метод, основывающийся на мультипликативном выделении особенности. В [3] получены оценки скорости сходимости метода для правых частей заданного класса гладкости, которые подтверждают его эффективность. Однако они справедливы только при условии, что все интегралы, входящие в вариационное уравнение, вычисляются точно. На практике для произвольных коэффициентов и правой части это условие не выполняется. В данной работе рассматривается схема с численным интегрированием для задачи с вырождением, в которой интегралы заменяются специальными квадратурными формулами. Доказано, что эта схема разрешима однозначно и погреш-