

© Академик А.Б. КУРЖАНСКИЙ, Т.Ф. ФИЛИППОВА

О МЕТОДЕ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известен метод сингулярных возмущений, опирающийся, в частности, на классическую теорему А.Н.Тихонова, определяющую принцип разделения быстрых и медленных изолированных движений [1]. Аналогичная задача возникает и для дифференциальных включений, решениями которых являются многозначные функции — "пучки траекторий" [2–4]. Прямая аналогия со схемой Тихонова здесь, однако, не имеет места. В настоящей заметке указан подход, позволяющий сводить решения задач о выживаемости для дифференциальных включений к исследованию систем возмущенных включений и дающий, в некотором смысле, ответ на вопрос о разделении пучков траекторий для таких классов систем. Отмечено приложение полученного результата к задаче о гарантированном оценивании динамики систем с недоопределенными параметрами на основе сенсорных наблюдений [5, 6].

1. Постановка задачи. Основные обозначения. Пусть R^n означает n -мерное евклидово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $S = \{x \in R^n: \|x\| \leq 1\}$, $\text{cl}R^n$ и $\text{conv}R^n$ — множество всех замкнутых выпуклых и компактных выпуклых подмножеств R^n соответственно. Символом $h(A, B)$ обозначим хаусдорфово расстояние между множествами $A, B \in \text{conv}R^n$; $A \times B$ — прямое произведение множеств A и B : $A \times B = \{z: z = \{a, b\}, a \in A, b \in B\}$. Пусть $\mathfrak{R}^{n, k}[a, b]$ означает пространство всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $M(\cdot)$ со значениями $M(t)$ во множестве матриц размерности $n \times k$; $\mathfrak{R}^{k, k}[a, b] = \mathfrak{R}^k[a, b]$.

Для произвольного линейного подпространства $\mathcal{L} \subseteq R^k$ обозначим $\pi_{\mathcal{L}}q$ проекцию вектора $q \in R^k$ на \mathcal{L} и $\pi_{\mathcal{L}}Q$ — проекцию множества $Q \subseteq R^k$ на \mathcal{L} . В случае $R^k = R^n \times R^m$, $k = n + m$, будем использовать также обозначение $\pi_x q = \pi_{R^n} \times \{0\} q$ и $\pi_x Q = \pi_{R^n} \times \{0\} Q$. Символом \mathcal{L}^\perp обозначим ортогональное дополнение подпространства \mathcal{L} . Пусть L — некоторый линейный оператор, $L: R^k \rightarrow R^m$. Для ядра оператора L будем использовать обозначение $\ker L: \ker L = \{x \in R^k: Lx = 0\}$.

Рассмотрим линейное дифференциальное включение

$$(1) \quad \dot{x}(t) \in A(t)x(t) + P(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

с начальным условием

$$(2) \quad x(t_0) = x_0 \in X_0;$$

здесь $x \in R^n$, $A(\cdot) \in \mathfrak{R}^n[t_0, t_1]$, $X_0 \in \text{conv}R^n$, многозначная функция $P: [t_0, t_1] \rightarrow \text{conv}R^n$ предполагается измеримой.

Траекторией $x(t) = x(t; t_0, x_0)$, $x(t_0) = x_0$, дифференциального включения (1) будем называть решение включения (1) в смысле К. Каратеодори [7].

Предположим, что на траектории $x(\cdot)$ включения (1) с начальным усло-

вием (2) наложено фазовое ("мгновенное" или "геометрическое") ограничение:

$$(3) \quad x(t) \in Y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где $Y: [t_0, t_1] \rightarrow \text{conv } R^n$ — заданное измеримое многозначное отображение.

О п р е д е л е н и е [2, 3]. Траекторию $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ назовем выживающей к моменту τ , $t_0 < \tau \leq t_1$, если при всех $t \in [t_0, \tau]$ справедливо включение $x(t) \in Y(t)$.

Множество всех выживающих к моменту τ траекторий $x(\cdot)$, отвечающих некоторому начальному вектору $x_0 = x(t_0) \in X_0$, обозначим $X(\cdot; \tau, t_0, x_0)$. Примем также обозначения

$$X(\cdot; \tau, t_0, X_0) = \cup \{X(\cdot; \tau, t_0, x_0), x_0 \in X_0\},$$

$$X(\tau; t_0, X_0) = X(\tau; \tau, t_0, X_0) = \{x_* \in R^n; \exists x(\cdot) \in X(\cdot; \tau, t_0, X_0),$$

$$x_* = x(\tau)\}.$$

Отметим, что множество $X(\tau; t_0, X_0)$ есть в точности область достижимости системы (1), (2) в момент τ при ограничении (3), рассматриваемом на отрезке $[t_0, \tau]$.

Целью настоящей работы является изложение схемы, основанной на замене фазового ограничения, стесняющего траектории включения (1), дополнительным "возмущенным" дифференциальным включением и используемой, в частности, для построения ансамблей выживающих траекторий $X(\cdot; \tau, t_0, X_0)$ или их оценок.

2. С и н г у л я р н ы е в о з м у щ е н и я. Рассмотрим для каждого $\epsilon > 0$ дифференциальное включение в $R^n \times R^n$

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &\in A(t)x + P(t), \\ \epsilon \dot{y} &\in -x + B(t)y + Y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$(5) \quad x(t_0) \in X_0, \quad y(t_0) \in Y_0,$$

где $B(\cdot) \in \mathfrak{M}^n [t_0, t_1]$, $Y_0 \in \text{conv } R^n$, $0 \in Y_0$. Положим $z = \{x, y\} \in R^n \times R^n$ и обозначим $z(t) = z(t; t_0, x_0, y_0, \epsilon)$ решение включения (4), $z(t_0) = z_0 = \{x_0, y_0\}$. Пусть $Z(\cdot; t_0, x_0, y_0, \epsilon)$ — пучок всех решений $\{z(t; t_0, x_0, y_0, \epsilon)\}$, исходящих в начальный момент t_0 из точки $z_0 = \{x_0, y_0\}$. Обозначим также

$$Z(\cdot; t_0, X_0, Y_0, \epsilon) = \cup \{Z(\cdot; t_0, x_0, y_0, \epsilon), x_0 \in X_0, y_0 \in Y_0\},$$

$$Z(\tau; t_0, X_0, Y_0, \epsilon) = \{z_* \in R^n \times R^n; \exists z(\cdot) \in Z(\cdot; t_0, X_0, Y_0, \epsilon),$$

$$z(\tau) = z_*\}.$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2.1. Для каждого $\tau \in (t_0, t_1]$ имеют место следующие оценки:

а) при любом $\epsilon > 0$

$$X(\tau; t_0, X_0) \times \{0\} \subseteq Z(\tau; t_0, X_0, Y_0, \epsilon);$$

$$\text{б) } X(\tau; t_0, X_0) \subseteq \pi_x(\cap \{Z(\tau; t_0, X_0, Y_0, \epsilon), \epsilon > 0\});$$

в) если $B(t) \equiv 0$, $t_0 \leq t \leq t_1$, то при всех $\epsilon > 0$ справедливо включение

$$X(\tau; t_0, X_0) \times Y_0 \subseteq Z(\tau; t_0, X_0, Y_0, \epsilon).$$

Отметим, что, формально полагая $\epsilon = 0$, $B(t) = 0$, $t_0 \leq t \leq t_1$, в (4), приходим к исходной системе включений (1)–(3), определяющей τ -сечения $X(\tau; t_0, X_0)$ пучка выживающих к моменту τ траекторий $\{x(\cdot)\}$. Известно, что хаусдорфов предел при $\epsilon \rightarrow 0$ множеств достижимости $Z(\tau; t_0, X_0, Y_0, \epsilon)$ сингулярно возмущенных дифференциальных включений вида (4) не совпадает, вообще говоря, со

множеством решений системы (4), отвечающих значению $\epsilon = 0$. Верен, однако, следующий результат [8].

Теорема 2.2. *Предположим, что для каждого $t \in [t_0, t_1]$ собственные числа матрицы $B(t)$ имеют отрицательные вещественные части. Тогда при любом $\tau \in (t_0, t_1]$*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} h(Z(\tau; t_0, X_0, Y_0, \epsilon), Z_0(\tau; t_0, X_0)) = 0,$$

где

$$Z_0(\tau; t_0, X_0) = \{z = \{x, y\}: x \in X_*(\tau; t_0, X_0), y \in B^{-1}(\tau)x + \int_0^\infty \exp(B(\tau)s) Y(s) ds\},$$

а множество $X_*(\tau; t_0, X_0)$ есть область достижимости включения (1) в момент τ при начальном условии (2).

Следует отметить, к сожалению, что оценки для множеств $X(\tau; t_0, X_0)$, которые можно извлечь из приведенной теоремы, являются слишком "грубыми", поскольку в данном случае

$$\pi_x(Z_0(\tau; t_0, X_0)) = X_*(\tau; t_0, X_0)$$

и, следовательно, в силу теоремы 2.1 $X(\tau; t_0, X_0) \subseteq X_*(\tau; t_0, X_0)$, что очевидно априори. В следующем разделе дана иная схема, базирующаяся не на предельном переходе по $\epsilon \rightarrow 0$, а опирающаяся на операцию пересечения множеств достижимости специальным образом возмущенных систем.

3. Дифференциальные включения с матричными возмущениями. Для произвольной матричной функции $R(\cdot) \in \mathfrak{R}^n[t_0, t_1]$ такой, что при каждом $t \in [t_0, t_1]$ $R(t)$ — невырожденная матрица с ненулевыми элементами, рассмотрим дифференциальное включение с распределенным по времени матричным возмущением

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} \in A(t)x + P(t), \\ R(t)\dot{y} \in -x + B(t)y + Y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \end{cases}$$

с начальным условием (5).

Сохраним прежнее обозначение $Z(\cdot; t_0, X_0, Y_0, R(\cdot))$ для пучка решений системы (5), (6) (здесь в отличие от предыдущего пункта последний аргумент ϵ заменен на функцию $R(\cdot)$).

Теорема 3.1. *Для любого $\tau \in (t_0, t_1]$ справедливы следующие утверждения.*

а) Пусть $B(t) \equiv 0, t_0 \leq t \leq t_1$. Тогда, каково бы ни было начальное множество $Y_0 \in \text{conv } R^n$, имеет место равенство

$$X(\tau; t_0, X_0) = \pi_x(\cap \{Z(\tau; t_0, X_0, Y_0, R(\cdot)), R(\cdot) \in \mathfrak{R}^n[t_0, \tau]\}).$$

б) Для любой матричной функции $B(\cdot) \in \mathfrak{R}^n[t_0, t_1]$ и произвольного множества $Y_0 \in \text{conv } R^n$ такого, что $0 \in Y_0$, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} X(\tau; t_0, X_0) &= \pi_x(\cap \{Z(\tau; t_0, X_0, \{0\}, R(\cdot)), R(\cdot) \in \mathfrak{R}^n[t_0, \tau]\}) \subseteq \\ &\subseteq \{\pi_x(\cap Z(\tau; t_0, X_0, Y_0, R(\cdot)), R(\cdot) \in \mathfrak{R}^n[t_0, \tau]\}). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что многозначное отображение $Y(\cdot)$, задающее фазовое ограничение (3), может иметь неограниченные значения $Y(t) \in \text{cl } R^n$. Именно, предположим, что даны функция $G(\cdot) \in \mathfrak{R}^{m, n}[t_0, t_1]$ и измеримое многозначное

отображение $Q: [t_0, t_1] \rightarrow \text{conv} R^m$. Пусть

$$(7) \quad Y(t) = \{x \in R^n: G(t)x \in Q(t)\}.$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{x} &\in A(t)x + P(t), \\ M(t)\dot{q} &\in -G(t)x + Q(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \end{aligned}$$

при начальном условии

$$(9) \quad x(t_0) \in X_0, \quad q(t_0) \in Q_0,$$

где $q \in R^m$, $M(\cdot) \in \mathfrak{M}^n[t_0, t_1]$, $Q_0 \in \text{conv} R^m$.

Пусть, как и ранее, множество $X(\cdot; \tau, t_0, X_0)$ ($X(\tau; t_0, X_0)$) означает пучок (τ – сечение пучка) всех выживающих к моменту τ траекторий системы (1), (2), но рассматриваемых уже по отношению к фазовому ограничению вида (7). Обозначим $Z^*(\cdot; t_0, X_0, Q_0, M(\cdot))$ ансамбль всех решений $z(\cdot) = \{x(\cdot), q(\cdot)\}$ включения (8), удовлетворяющих в начальный момент условию (9).

Т е о р е м а 3.2. Для любых $\tau \in (t_0, t_1]$ и $Q_0 \in \text{conv} R^m$ верно равенство

$$X(\tau; t_0, X_0) = \pi_x(\cap \{Z^*(\tau; t_0, X_0, Q_0, M(\cdot)), M(\cdot) \in \mathfrak{M}^m[t_0, \tau]\}).$$

Подчеркнем в заключение данного раздела, что многозначные функции $Y(\cdot)$ и $Q(\cdot)$, определяющие фазовые ограничения (3) и (7), здесь предполагались измеримыми. В частности, отображение Q может иметь вид $Q(t) = f(t) + W(t)$, где $f(\cdot)$ – однозначная измеримая функция, а многозначная функция $W(\cdot)$ непрерывна. Последнее замечание представляется существенным при использовании указанных построений в следующем пункте для решения задач оценивания состояний недоопределенных систем.

4. Задача о гарантированном наблюдении. Пусть дана система, динамика которой описывается линейными дифференциальными уравнениями ($x \in R^n$)

$$(10) \quad \dot{x} = A(t)x + C(t)u(t);$$

$$(11) \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

и уравнение измерения ($t_0 < \tau \leq t_1$)

$$(12) \quad y_\tau(t) = G(t)x(t) + \xi(t), \quad t_0 \leq t \leq \tau.$$

Предположим также, что величины $u(t)$, x_0 , $\xi(t)$ в системе (10)–(12) точно не определены. Известно, что функции $u(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ измеримы, и указаны соответствующие геометрические ограничения на неточно заданные величины:

$$(13) \quad x_0 \in X_0, \quad u(t) \in U(t), \quad \xi(t) \in Q(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1;$$

здесь $A(\cdot) \in \mathfrak{M}^n[t_0, t_1]$, $C(\cdot) \in \mathfrak{M}^{n,k}[t_0, t_1]$, $G(\cdot) \in \mathfrak{M}^{m,n}[t_0, t_1]$, $X_0 \in \text{conv} R^n$, многозначные функции $U: [t_0, t_1] \rightarrow \text{conv} R^k$ и $Q: [t_0, t_1] \rightarrow \text{conv} R^m$ измеримы.

Пусть на отрезке $[t_0, \tau]$ реализовалось наблюдение $y_*(t) = y_\tau(t)$, вызванное некоторой допустимой тройкой $\{x_{0*}, u_*(\cdot), \xi_*(\cdot)\}$. Обозначим: $X(\tau; y_*(\cdot))$ – информационное множество системы (10)–(13), порожденное $y_*(\cdot)$ и состоящее из всех точек $x \in R^n$, в которые может прийти система (10), (11) в момент τ

по траекториям $x(\cdot)$, определяющим вместе с некоторой допустимой помехой $\xi(\cdot)$ одно и то же измерение $y_*(\cdot)$ [6].

Рассмотрим дифференциальное включение $(M(\cdot) \in \mathfrak{M}^m [t_0, \tau])$:

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{x} &\in A(t)x + C(t)U(t), \\ M(t)\dot{q} &\in -G(t)x + Q_*(t), \quad t_0 \leq t \leq \tau, \end{aligned}$$

при условии

$$(15) \quad x(t_0) \in X_0, \quad q(t_0) \in Q_0,$$

где $Q_*(t) = y_*(t) - Q(t)$, $Q_0 \in \text{conv} R^m$.

Сохраним обозначение $Z^*(\cdot; t_0, X_0, Q_0, M(\cdot))$ предыдущего раздела за множеством всех решений системы (14), (15). Следующий результат прямо следует из теоремы 3.2.

Теорема 4.1. *При всех $\tau \in (t_0, t_1]$ и $Q_0 \in \text{conv} R^m$ имеет место равенство*

$$X(\tau; y_*(\cdot)) = \pi_x(\cap \{Z^*(\tau; t_0, X_0, Q_0, M(\cdot)), M(\cdot) \in \mathfrak{M}^m [t_0, \tau]\}).$$

5. Дифференциальные включения с вырожденной матрицей. Пусть дана некоторая вырожденная $(n \times n)$ -матрица L . Рассмотрим дифференциальное включение $(x \in R^n)$

$$(16) \quad L\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + P(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

с начальным условием

$$(17) \quad x(t_0) \in X_0$$

в предположениях п. 2 относительно $A(\cdot)$, $P(\cdot)$ и X_0 .

Как и ранее, под решением $x(\cdot)$ системы (16), (17) будем понимать произвольную абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющую условию (17) и включению (16) при почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Отметим, что в данном случае множество решений системы (16), (17) — обозначим его символом $X(\cdot; t_0, X_0)$ — может оказаться неограниченным в пространстве $C^n [t_0, t_1]$.

Обозначим $\mathfrak{R}_*^n [t_0, t_1]$ множество всех матричных функций $R(\cdot) \in \mathfrak{R}^n [t_0, t_1]$, обладающих следующим свойством: при любом $t \in [t_0, t_1]$ $\mathcal{L} = (\ker L)^\perp \subseteq \ker R(t)$ ($\mathfrak{R}_*^n [t_0, t_1]$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathfrak{R}^n [t_0, t_1]$).

Для каждой функции $R(\cdot) \in \mathfrak{R}_*^n [t_0, t_1]$ рассмотрим возмущенное дифференциальное включение

$$(18) \quad (L + R(t))\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + P(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

с начальным условием (17). Пусть $X_R(\cdot; t_0, X_0)$ означает пучок всех решений $\{x(\cdot)\}$ системы (17), (18).

Теорема 5.1. *Предположим, что выполнено следующее условие: при всех $t \in [t_0, t_1]$ $\ker L \subseteq \ker A(t)$. Тогда для любого $\tau \in (t_0, t_1]$ имеет место равенство*

$$(19) \quad \pi_{\mathcal{L}} X(\tau; t_0, X_0) = \pi_{\mathcal{L}}(\cap \{X_R(\tau; t_0, X_0), R(\cdot) \in \mathfrak{R}_*^n [t_0, \tau]\}).$$

З а м е ч а н и я. 1. Отметим, что, хотя множество $X(\cdot; t_0, X_0)$ и является, вообще говоря, неограниченным, его проекция $\pi_{\mathcal{L}} X(\tau; t_0, X_0)$ в условиях теоремы 5.1 компактна.

2. Для справедливости равенства (19) достаточно рассмотреть пересечение множеств $X_R(\tau; t_0, X_0)$ лишь по тем матричным функциям $R(\cdot) \in \mathfrak{R}_*^n[t_0, \tau]$, для которых матрица $(L + R(t))$ не вырождена при любом $t \in [t_0, \tau]$.

3. Нетрудно видеть, что теорема 5.1 обобщает результаты, сформулированные в теоремах 3.1–3.2.

Институт математики и механики
Уральского отделения Академии наук СССР
Екатеринбург

Поступило
3 X 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. — Мат. сб., 1952, т. 31, вып. 3, с. 575–586.
2. Куржанский А.Б. — ДАН, 1986, т. 287, № 5, с. 1047–1050.
3. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. — ДАН, 1986, т. 289, № 1, с. 38–41.
4. Куржанский А.Б., Никонов О.И. — ДАН, 1990, т. 311, № 4, с. 788–793.
5. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
6. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
7. Aubin J.P., Cellina A. Differential inclusions. В.: Springer, 1984.
8. Dontchev A.L., Veliov V.M. — SIAM J. Control and Optimization, 1983, vol. 21, № 4, p. 566–581.