В. В. Петров, Односторонние теоремы о законе повторного логарифма без предположения о независимости, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 130, 150–156

В.В.Петров

ОДНОСТОРОННИЕ ТЕОРЕМЫ О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О НЕЗАВИСИМОСТИ

I. Пусть $\{X_n;\ n=1,2,\dots\}$ – последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, и пусть $\{b_n;\ n=1,2,\dots\}$ – последовательность положительных постоянных. Положим

$$S_{a,n}=\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i\,,\qquad S_n=S_{0,n}\,.$$

Во многих работах были исследованы условия, при которых имеет место соотношение

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}\leqslant 1\quad\text{почти наверное}\tag{I}$$

В частности, в работах [I] и [2] найдены условия, достаточные для соотношения (I), без дополнительных предположений о независимости или каком-либо типе зависимости рассматриваемых случайных величин. Настоящая работа примыкает к [I] и [2].

Обозначим через G множество положительных функций $g(n)$, определенных на множестве целых положительных чисел и удовлетворяющих следующим условиям:

(A) $$\liminf_{n\to\infty}\frac{g(Kn)}{g(n)}>1\quad\text{для некоторого целого } K\geqslant 2;$$

(B) для любого $\varepsilon>0$ существует положительное число $\tau<1$ такое, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{\tau n\leqslant i\leqslant n}g(i)}{g(n)}<1+\varepsilon\,;$$

(C) $$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n+1)}{g(n)}=1.$$

Условия (A), (B) и (C) выполнены, если $g(n)=n^{\alpha}L(n)$, где $\alpha>0$ и $L(\cdot)$ – медленно меняющаяся функция. Условие (B) выполнено, если функция $g(n)$ не убывает.

ТЕОРЕМА I. Пусть для последовательности случайных величин $\{X_n\}$ и некоторой функции $g\in G$ выполнены следующие условия:

($\mathcal{D}$) для любого b из некоторого интервала $1 < b < 1+\beta$ существуют положительные числа c, c_0 и n_0 такие, что

$$P\left(S_{a,n} \geqslant b\sqrt{2g(n)\log\log n}\right) \leqslant c_0 \exp\{-(1+c\log b)\log\log n\} \quad (2)$$

для всех $a \geqslant 0$ и $n \geqslant n_0$;

(E) существуют положительные числа $c, c_0, B>1$, a_1 и n_1 такие, что неравенство (2) имеет место для всех $b \geqslant B$, $a \geqslant a_1$ и $n \geqslant n_1$.

Пусть, далее, выполнено условие

$$\limsup_{a\to\infty} E^+\left(S^p_{a,n}\right) < \infty \quad (3)$$

для всех $n \geqslant 1$ и $p > 0$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2g(n)\log\log n}} \leqslant 1 \quad \text{п.н.} \quad (4)$$

В условии (3) использовано следующее обозначение:

$$E^+\varphi(X) = \int_0^\infty \varphi(x)\, d\mathcal{F}(x),$$

если X - случайная величина с функцией распределения $\mathcal{F}(x)$.

Теорема I представляет собой односторонний аналог одного результата Лаи и Стаута [I]. Все условия теоремы I налагаются на поведение распределений участвующих в них случайных величин только на положительной полупрямой.

Приведем одно просто формулируемое следствие теоремы I, которое имеет также односторонний характер.

ТЕОЕРМА 2. Пусть $\{X_n\}$ - последовательность случайных величин, и пусть

$$Ee^{tS_{a,n}} \leqslant Ce^{\frac{t^2}{2}g(n)} \quad (5)$$

для всех $a \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ и $0 < t \leqslant \sqrt{\frac{2\log\log(n+3)}{g(n)}}$ и некоторой функции $g \in G$, где C - положительная постоянная. Тогда имеет место соотношение (4).

Заметим, что для стационарной гауссовской последовательности $\{X_n\}$, удовлетворяющей условию $EX_1 = 0$, при любых t, $a \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$ справедливо равенство

$$Ee^{tS_{a,n}} = Ee^{tS_n} = e^{\frac{t^2}{2}B_n},$$

где $B_n = ES_n^2$. Таким образом, для этой последовательности условие (5) выполено для всех действительных t и всех $a \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ при $g(n) = B$. В теореме 2 условие (5) предполагается выполненным только для всех t из некоторого интервала на положительной полупрямой.

2. Перейдем к доказательству теоремы I. Мы будем следовать схеме доказательства теоремы 2 из [I] . Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \delta < 1$, $n = [2^{k\delta}]\,(k = 1, 2, \ldots)$. Введем события

$$A_k = [S_{n_k} \geqslant (1+\varepsilon)\chi(n_k)],$$

$$B_k = [\max_{n_k \leqslant n < n_{k+1}} (S_n - S_{n_k}) \geqslant 2\varepsilon\chi(n_k)],$$

где

$$\chi(n) = \sqrt{2g(n)\log\log n}\,. \tag{6}$$

В силу условия ($\mathcal{D}$) и определения чисел n_k имеем $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, поэтому

$$P(A_k \text{ б.ч.}) = 0 \tag{7}$$

вследствие леммы Бореля-Кантелли.

Покажем теперь, что если будет доказано равенство

$$P(B_k \text{ б.ч.}) = 0, \tag{8}$$

то теорема I будет доказана. Для этого достаточно убедиться в том, что (7) и (8) влекут за собой соотношение

$$P(S_n \geqslant (1+\gamma)\chi(n) \text{ б.ч.}) = 0 \tag{9}$$

для любого $\gamma > 0$ и, следовательно, соотношение (4).

Предположим, что имеет место (8). В силу условия (B) заданному $\varepsilon > 0$ соответствует такое k_0 , что $g(n) < (1+\varepsilon)\,g(n)$ для $n_k \leqslant n \leqslant n_{k+1}$ и $k \geqslant k_0$. Замечая, что $S_n = (S_n - S_{n_k}) + S_{n_k}$, получаем

$$[S_n \geqslant (1+3\varepsilon)\sqrt{1+\varepsilon}\,\chi(n)\ \text{б.ч.}] \subset$$

$$\subset [S_{n_k} \geqslant (1+\varepsilon)\chi(n_k)\,\text{б.ч.}] \cup [\max_{n_k \leqslant n < n_{k+1}} (S_n - S_{n_k}) \geqslant 2\varepsilon\chi(n_k)\,\text{б.ч.}],$$

как нетрудно доказать от противного. Отсюда с учетом (7) и (8) приходим к (9) для любого $\gamma > 0$.

Итак, доказательство теоремы I свелось к доказательству равенства (8). Для доказательства этого равенства определим целые положительные числа $j = j(k)$ с помощью неравенств $2^{j-1} \leqslant n_{k+1} - n_k < 2^j$. Поскольку $n_{k+1} - n_k < 2^{k\delta+\delta}$ и $n_{k+1} - n_k > 2^{k\delta-1} - 1$, имеем

$$j(k) = k\delta + O(1) \qquad (k \to \infty) \tag{10}$$

и

$$n_{k+1} - n_k = n_k(2^\delta - 1) + O(1) \quad (k \to \infty). \tag{11}$$

Далее,

$$n_k \geqslant \frac{2^{j(k)-1}}{2^\delta - 1} + O(1) \qquad (k \to \infty). \tag{12}$$

Если $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, то $n - n_k < n_{k+1} - n < 2^j$ и

$$n - n_k = e_{j-1} 2^{j-1} + e_{j-2} 2^{j-2} + \ldots + e_0,$$

где e_{i-1} равно 0 или I для $i = 1, \ldots, j$. Полагая

$$S(a,n) = S_{a,n} = \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i ,$$

получаем

$$S_n = S_{n_k} + \sum_{i=1}^{j} S(n_k + m_i 2^i,\ 2^{i-1} e_{i-1})$$

для $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, где

$$m_i = e_{j-1} 2^{j-i-1} + \ldots + e_i \ (i = 1, \ldots, j-1), \quad m_j = 0,$$

поэтому $0 \leqslant m_i < 2^{j-i}$.

Для $i = 1, \ldots, j$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$ определим события

$$B_k(i,m)=\left[S(n_k+m2^i,2^{i-1})>\frac{\varepsilon\chi(n_k)}{(j(k)-i+1)^2}\right],$$

где $\chi(n)$ определено равенством (6). Рассуждением от противного с использованием неравенства $\sum_{i=1}^{j}(j-i+1)^{-2}<2$ нетрудно доказать соотношение

$$B_k\subset\bigcup_{1\leqslant i\leqslant j(k)}\ \bigcup_{0\leqslant m<2^{j(k)-i}}B_k(i,m).$$

Пусть $0<\eta<1$. Положим

$$T_1=\sum_{\eta j(k)\leqslant i\leqslant j(k)}\ \sum_{0\leqslant m<2^{j(k)-i}}P(B_k(i,m)),$$

$$T_2=\sum_{N<i<\eta j(k)}\ \sum_{0\leqslant m<2^{j(k)-i}}P(B_k(i,m)),$$

$$T_3=\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{0\leqslant m<2^{j(k)-i}}P(B_k(i,m)),$$

Так что

$$P(B_k)\leqslant T_1+T_2+T_3. \tag{13}$$

Для завершения доказательства теоремы I достаточно показать, что

$$T_\nu=O(k^{-2})(k\to\infty;\ \nu=1,2,3), \tag{14}$$

посокльку из (13) и (14) вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k)$ и следовательно, равенство (8).

Рассмотрим сначала сумму T_1. Для ее оценки понадобится следующая лемма, в которой использовано обозначение

$$A=\liminf_{n\to\infty}\frac{g(K_n)}{g(n)}.$$

ЛЕММА. Если $g\in G$, то для любого положительного $\gamma<\frac{\log A}{\log K}$ существуют числа N и $C>0$ такие, что

$$\frac{g([an])}{g(n)} > C a^{\gamma}$$

для всех $a \geqslant N$ и $n \geqslant N$.

Эта лемма содержится в [I] и [3] .

В силу леммы и соотношения (I2) имеем

$$\frac{g(n_k)}{g(2^{i-1})} \geqslant C\left(\frac{2^{j(k)-i}}{2^{\delta}-1}\right)^{\gamma} \circ \log\log n_k \geqslant \log\log 2^{i-1}$$

для всех достаточно больших $i \leqslant j(k)$ и достаточно больших k , если взять достаточно малое $\delta > 0$. Поэтому

$$P(B_k(i,m)) \leqslant P(S(n_k + m2^{i}, 2^{i-1}) >$$

$$> \varepsilon_1(j(k)-i+1)^{-2}\left\{g(2^{i-1})\left(\frac{2^{j(k)-i}}{2^{\delta-1}}\right)^{\gamma}\log\log 2^{i-1}\right\}^{\frac{1}{2}}),$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon\sqrt{C}$. Учитывая условие (E) , получаем

$$\sum_{0 \leqslant m < 2^{j(k)-1}} P(B_k(i,m)) \leqslant c_0 2^{j(k)} \exp\{-c_1 \log\log 2^{i-1}\}.$$

Здесь

$$c_1 = c\left\{\frac{\gamma}{2}\log\frac{2^{j(k)-i}}{2^{\delta}-1} + \log\varepsilon_2 - 2\log(j(k)-i+1)\right\}$$

и $0 < \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, при всех достаточно больших k имеем в силу (I0)

$$T_1 \leqslant c_2 j(k) \max_{\nu \geqslant 0} \exp\left\{\nu\log 2 - c_3(\log\eta j(k))\left(\frac{\gamma}{2}\log\frac{2^{\nu}}{2^{\delta}-1} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\log(\nu+1) + \log\varepsilon_2\right)\right\} \leqslant c_4 k^{-2},$$

если δ выбрать достаточно малым. Здесь c_2, c_3 и c_4 - положительные постоянные. Первое из трех соотношений (I4) доказано. Второе соотношение доказывается аналогично; при этом мы считаем число N в определении T_2 достаточно большим.

Для оценки T_3 воспользуемся неравенством

$$P(X \geqslant x) \leqslant x^{-p} E^{+} X^{p}, \tag{15}$$

справедливом для любых положительных x и p и любой случайной величины X. Это неравенство следует из того, что

$$P(X \geqslant x) = \int_{x}^{\infty} d\mathcal{F}(t) \leqslant x^{-p} \int_{x}^{\infty} t^{p} d\mathcal{F}(t) \leqslant x^{-p} E^{+} X^{p},$$

где $\mathcal{F}(t)$ - функция распределения случайной величины X.

В силу определения $B_k(i,m)$, условия (3) и неравенства (15) получаем

$$T_3 \leqslant N 2^{j(k)} C(\varepsilon \chi(n_k))^{-p} f^{p}(k).$$

Используя (10) и сформулированную выше лемму, находим, что $T_3 \leqslant C k^{-2}$ при всех достаточно больших k. Таким образом мы доказали соотношения (14) и тем самым теорему 1.

Теорема 2 является непосредственным следствием теоремы 1 и неравенства

$$P(S_{a,n} \geqslant b\chi(n)) \leqslant e^{-tb\chi(n)} E e^{t S_{a,n}},$$

где $t > 0$.

Литература

1. L a i T.L., S t o u t W. Limit theorems for sums of dependent random variables. - Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1980, Bd.51, N 1,p.1-14.
2. П е т р о в В.В. О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин. - Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1980, т.97, с.186-194.
3. L a i T.L., S t o u t W. The law of the iterated logarithm and upper-lower class tests for partial sums of stationary Gaussian sequences. - Ann.Probability, 1978, vol.6, N 5,p. 731-750.