G. S. Djordjevič, B. G. Dragovich, *p*-Adic and adelic harmonic oscillator with a time-dependent frequency,
TMF, 2000, Volume 124, Number 2, 239–248

https://www.mathnet.ru/eng/tmf636

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 124, № 2
август, 2000

Г.С. Джорджевич*, Б. Драгович†

p-АДИЧЕСКИЙ И АДЕЛЬНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ЧАСТОТОЙ

Развиты классический и квантовый формализмы для p-адического и адельного гармонических осцилляторов с зависящей от времени частотой, и получены общие формулы для основных теоретических величин. В частности, найден p-адический пропагатор, показано существование простого вакуумного состояния и адельной квантовой динамики. Отмечены дискретность пространства и наличие p-адической квантово-механической фазы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантово-механических экспериментах, как и во всех измерениях, численные результаты лежат в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. В принципе соответствущие теоретические модели могли бы быть созданы с помощью только $\mathbb{Q}$, но они потеряли бы при этом обычную эффективность и красоту математического анализа. Таким образом, вместо $\mathbb{Q}$ традиционно используются поле действительных чисел $\mathbb{R}$ в классической механике и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ в квантовой механике. $\mathbb{R}$ – это пополнение $\mathbb{Q}$ по метрике, индуцированной абсолютным значением, а $\mathbb{C}$ – алгебраическое расширение $\mathbb{R}$. В добавление к $\mathbb{R}$ существуют поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, являющиеся пополнением $\mathbb{Q}$ по p-адической норме (p – простое число) [1]. Согласно теореме Островского $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ (для всех p) исчерпывают все возможные пополения $\mathbb{Q}$. Таким образом, поле $\mathbb{Q}$ всюду плотно не только в $\mathbb{R}$, но и в каждом $\mathbb{Q}_p$. В последние годы появился ряд работ [2–5], в которых исследовались теоретические модели с p-адическими числами.

Имеется общее убеждение, что для физики важно не отдельное простое число p, т.е. необходимо рассматривать p-адические модели для всех простых чисел. Ясно, что p-адические модели, имеющие физический смысл, должны быть как-то связаны с обычными (вещественными) моделями. Пространство аделей $\mathbb{A}$ [6] является математическим инструментом, позволяющим нам рассматривать вещественные и p-адические числа одновременно и как единое целое. Следовательно, естественно ожидать, что адельный

*Department of Physics, University of Niš, Niš, Yugoslavia
†Institute of Physics, Belgrade, Yugoslavia; Математический институт им. В.А. Стеклова, Москва, Россия

подход даст более полное по сравнению с обычным подходом описание физической системы.

p-Адические числа проявляют ультраметрические (неархимедовы) свойства, которые могут быть реализованы в квантовых системах на очень малых расстояниях. Возможность того, что пространство-время на планковских масштабах проявляет p-адическую (или адельную) структуру, является одним из основных мотивов для исследования соответствующих моделей.

Для того чтобы осуществить систематический подход к p-адическим моделям в квантовых системах, была сформулирована p-адическая квантовая механика [7, 8]. Квантование проводится по Вейлю. Соответствующее гильбертово пространство $L_2(\mathbb{Q}_p)$ содержит комплекснозначные квадратично интегрируемые функции над $\mathbb{Q}_p$. Уравнение Шредингера не используется, а динамическая эволюция и спектральная задача системы связываются с унитарным представлением оператора эволюции $U_p(t)$ на $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Как обобщение и объединение p-адической и обычной квантовых механик недавно была сформулирована адельная квантовая механика [9].

До сих пор в p-адической и адельной квантовых механиках было рассмотрено совсем небольшое число систем: нерелятивистская свободная частица [7], гармонический осциллятор [7, 9], частица в постоянном поле [8], модель мини-суперпространства де Ситтера для Вселенной [10] и релятивистская свободная частица [11]. Несомненно, что рассмотрение других физических систем, которые проявляют p-адические и адельные свойства, позволит по-новому взглянуть на проблему в целом и на изучение планковских масштабов, в частности.

В этой статье рассмотрены некоторые свойства p-адического и адельного гармонических осцилляторов с зависящей от времени частотой (ГОЗВЧ). Модель ГОЗВЧ имеет большое количество приложений (от квантовой оптики [12] до квантовой космологии [13]). Однако многие свойства классического и квантового движений могут быть выявлены без конкретизации временной зависимости частоты.

2. p-АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И АДЕЛИ

Дадим вначале краткий обзор некоторых основных фактов из теории p-адических чисел и аделей.

Любое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде $x = p^\nu m/n$, где $\nu, m, n \in \mathbb{Z}$ и p – заданное простое число, на которое ни m, ни n не делятся. По теореме о разложении на простые множители целое число ν определяется единственным образом. По определению p-адическая норма от x имеет вид

$$|x|_p = p^{-\nu}, \qquad |0|_p = 0 \tag{2.1}$$

и при этом выполняется строгое неравенство треугольника

$$|x+y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p). \tag{2.2}$$

Норма со свойством (2.2) называется неархимедовой или ультраметрической нормой. Каждое p-адическое число x может быть единственным образом представлено с помощью канонического разложения

$$x = p^\nu \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i, \qquad x_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \quad x_0 \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Разложение (2.3) сходится по метрике, индуцированной p-адической нормой $d_p(x,y) = |x-y|_p$.

В основном существуют два типа анализа на $\mathbb{Q}_p$, базирующихся на двух различных отображениях: $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$. Мы используем оба эти анализа.

Элементарные p-адические функции, такие как $\exp x$, $\sin x$ и $\cos x$, задаются рядами такими же, как и в вещественном случае. Однако их область сходимости довольно ограниченна и для перечисленных функций определяется условием $|x|_p < |2|_p$. Производные p-адическизначных функций определены так же, как и в вещественном случае, но используют p-адическую норму вместо абсолютного значения.

Для комплекснозначных функций p-адического аргумента имеется хорошо определенное интегрирование по мере Хаара. В частности, мы используем гауссов интеграл [3]

$$\int_{|x|_p \leqslant p^\nu} \chi_p(\alpha x^2 + \beta x)\, dx = \\ = \begin{cases} p^\nu \Omega(p^\nu |\beta|_p), & |\alpha|_p \leqslant p^{-2\nu}, \\ \lambda_p(\alpha)|2\alpha|_p^{-1/2} \chi_p\bigl(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\bigr)\Omega\bigl(p^{-\nu}\bigl|\frac{\beta}{2\alpha}\bigr|_p\bigr), & |4\alpha|_p > p^{-2\nu}. \end{cases} \tag{2.4}$$

В формуле (2.4) функция $\chi_p(u) = \exp(2\pi i\{u\}_p)$ – p-адический аддитивный характер, где $\{u\}_p$ обозначает дробную часть, $u \in \mathbb{Q}_p$; $\lambda_p(\alpha)$ – арифметическая комплекснозначная функция со следующими основными свойствами [3]:

$$\begin{gathered} \lambda_p(0) = 1, \quad \lambda_p(a^2\alpha) = \lambda_p(\alpha), \\ \lambda_p(\alpha)\lambda_p(\beta) = \lambda_p(\alpha+\beta)\lambda_p(\alpha^{-1}+\beta^{-1}), \quad |\lambda_p(\alpha)|_\infty = 1. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Функция $\Omega(|u|_p)$ в (2.4) – характеристическая функция на $\mathbb{Z}_p$, т.е.

$$\Omega(|u|_p) = \begin{cases} 1, & |u|_p \leqslant 1, \\ 0, & |u|_p > 1, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leqslant 1\}$ – кольцо p-адических целых чисел.

Адель $a \in \mathbb{A}$ [6] – это бесконечная последовательность

$$a = (a_\infty, a_2, \dots, a_p, \dots), \tag{2.7}$$

где $a_\infty \in \mathbb{R}$ и $a_p \in \mathbb{Q}_p$ с ограничением, что $a_p \in \mathbb{Z}_p$ для всех, кроме конечного множества S, простых чисел p. Множество всех аделей $\mathbb{A}$ можно записать в форме

$$\mathbb{A} = \bigcup_S \mathcal{A}(S), \qquad \mathcal{A}(S) = \mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p. \tag{2.8}$$

Множество $\mathbb{A}$ – топологическое пространство, являющееся кольцом по отношению к покомпонентному сложению и умножению. Существует естественное обобщение анализа над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ до анализа над $\mathbb{A}$.

3. КЛАССИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР: ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, p-АДИЧЕСКИЙ И АДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАИ

Классический ГОЗВЧ задается лагранжианом

$$L(x,\dot{x},t)=\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{m\omega^2(t)}{2}x^2, \tag{3.1}$$

где $m\in\mathbb{Q}$. Зависящая от времени частота

$$\omega(t)=\sum_{n\geqslant 0}\omega_n t^n,$$

где $\omega_n\in\mathbb{Q}$, предполагается аналитической функцией на $\mathbb{D}_\infty\subset\mathbb{R}$ и на $\mathbb{D}_p\subset\mathbb{Z}_p$ для всех p. Другими словами, $\omega(t)\in\mathcal{A}(S')$ при $t\in\mathcal{A}(S)$, где S и S' – конечные множества простых чисел p. В вещественном случае $m,x,\dot{x},t,\omega(t)\in\mathbb{R}\equiv\mathbb{Q}_\infty$ (далее индекс ∞ обозначает величины, определенные над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и такая же ситуация выполняется для p-адических аналогов. Из-за формальной схожести анализа исследование системы с лагранжианом (3.1) проводится одинаково как в вещественном, так и в p-адическом случаях. Таким образом, в обоих случаях уравнения движения будут иметь вид

$$\ddot{x}(t)+\omega^2(t)x(t)=0 \tag{3.2}$$

с общим решением [14]

$$x(t)=G(t)[C_1\cos\gamma(t)+C_2\sin\gamma(t)]. \tag{3.3}$$

Амплитуда $G(t)$ и фаза $\gamma(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$G^3(t)\ddot{G}(t)+\omega^2(t)G^4(t)=C^2,\qquad \dot{\gamma}(t)G^2(t)=C, \tag{3.4}$$

где C – константа ($0<C\in\mathbb{R}$, $C\in 1+p\mathbb{Z}_p$), которую можно положить равной единице. Мы интересуемся аналитическими решениями (3.3), когда $G(t)$ и $\gamma(t)$ будут степенными рядами по t с рациональными коэффициентами. Дифференциальное уравнение для $G(t)$ является нелинейным. Однако оно не приводит к нелинейным алгебраическим уравнениям на неизвестные коэффициенты G_n в разложении

$$G(t)=\sum_{n\geqslant 0}G_n t^n,$$

и любой G_n может быть представлен как рациональное число, одно и то же в вещественном и всех p-адических случаях. Заметим, что обычные ряды с рациональными коэффициентами, которые сходятся на $\mathbb{D}_\infty\subset\mathbb{R}$ в вещественном случае, являются также p-адически сходящимися в некоторой области $\mathbb{D}_p\subset\mathbb{Z}_p$.

В качестве иллюстрации аналитических решений уравнений (3.4) (при $C=1$) рассмотрим два простых примера.

Пример 1. Пусть $\omega(t) = \omega_0/(1+at)^2$, где $\omega_0 = b^{-2}$ и $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда

$$G(t) = b(1+at), \qquad \gamma(t) = \frac{1}{b^2}\frac{t}{1+at}.$$

Так как функция $\gamma(t)$ является аргументом тригонометрических функций в (3.3), получаем, что общая область сходимости для всех аналитических разложений есть $|t|_p < |2b^2|_p$ для каждого p.

Пример 2. Пусть $\omega(t) = \omega_0/(1+at)$, где $\omega_0 = b^{-2}(1+a^2b^4/4)^{1/2}$ и $a, b \in 2\mathbb{N}$. Тогда по аналогии с примером 1 получаем

$$G(t) = b(1+at)^{\frac{1}{2}}, \qquad \gamma(t) = \frac{1}{ab^2}\ln(1+at), \qquad |t|_p < |2b^2|_p.$$

Таким образом, существуют нетривиальные адельные решения для $G(t)$ и $\gamma(t)$, и, следовательно, для $x(t)$ в (3.3).

Для определения констант C_1 и C_2 мы используем два типа условий на классическую траекторию.

3.1. Решение с граничными условиями. Классическая траектория, связывающая две пространственно-временные точки (x', t') и (x'', t''), описывается формулой

$$x(t) = \frac{G(t)}{\sin(\gamma'' - \gamma')}\left[\frac{x'}{G'}\sin(\gamma'' - \gamma(t)) + \frac{x''}{G''}\sin(\gamma(t) - \gamma')\right], \tag{3.5}$$

где $x' = x(t')$, $x'' = x(t'')$, $G' = G(t')$, $G'' = G(t'')$, $\gamma' = \gamma(t')$ и $\gamma'' = \gamma(t'')$. Заметим, что в вещественном случае должно быть выполнено условие $\gamma'' - \gamma' \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Напомним также, что $|\gamma'' - \gamma'|_p < |2|_p$. Как мы увидим далее, полезно записать соответствующий импульс в форме

$$k(t) = m\dot{x}(t) = m\frac{\dot{G}(t)}{G(t)}x(t) + \frac{mG(t)\dot{\gamma}(t)}{\sin(\gamma'' - \gamma')}\left[\frac{x''}{G''}\cos(\gamma(t) - \gamma') - \frac{x'}{G'}\cos(\gamma'' - \gamma(t))\right]. \tag{3.6}$$

3.2. Решение с начальными условиями. Налагая начальные условия $x^0 = x(t^0)$, $k^0 = m\dot{x}(t^0)$, находим эволюцию классического состояния в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left[\frac{G(t)}{G^0}\cos(\gamma(t) - \gamma^0) - \frac{G(t)\dot{G}^0}{C}\sin(\gamma(t) - \gamma^0)\right]x^0 + \\
&\quad + \frac{G(t)G^0}{mC}\sin(\gamma(t) - \gamma^0)k^0, \\
k(t) &= \left[m\left(\frac{\dot{G}(t)}{G^0} - \frac{G(t)\dot{\gamma}(t)\dot{G}^0}{C}\right)\cos(\gamma(t) - \gamma^0) - \right. \\
&\quad \left. - m\left(\frac{\dot{G}(t)\dot{G}^0}{C} + \frac{G(t)\dot{\gamma}(t)}{G^0}\right)\sin(\gamma(t) - \gamma^0)\right]x^0 + \\
&\quad + \frac{G^0}{C}\left[G(t)\dot{\gamma}(t)\cos(\gamma(t) - \gamma^0) + \dot{G}(t)\sin(\gamma(t) - \gamma^0)\right]k^0,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где $G^0 = G(t^0)$ и $\gamma^0 = \gamma(t^0)$. Полагая сначала $t = t'$ и затем $t = t''$ в первом уравнении (3.7), можно найти x^0 и k^0 как функции от x' и x''. Подставляя $x^0 = x^0(x', x'')$ и $k^0 = k^0(x', x'')$ во второе уравнение (3.7), получаем формулу (3.6) для $k(t)$.

Для удобства вычисления соответствующего классического действия

$$\overline{S}(x'', t''; x', t') = \frac{m}{2} \int_{t'}^{t''} [\dot{x}^2(t) - \omega^2(t) x^2(t)]\, dt \tag{3.8}$$

следует использовать интегрирование по частям и уравнение движения (3.2), что приводит к выражению

$$\overline{S}(x'', t''; x', t') = \frac{m}{2}(x''\dot{x}'' - x'\dot{x}'). \tag{3.9}$$

В силу уравнения (3.6), которое дает $\dot{x}$ как функцию от x, мы получаем действие в виде квадратичной формы по x'' и x', т.е.

$$\begin{aligned}\overline{S}(x'', t''; x', t') = \frac{m}{2} \bigg[\bigg(\frac{\dot{\gamma}''}{\operatorname{tg}(\gamma'' - \gamma')} + \frac{\dot{G}''}{G''} \bigg) x''^2 - \\ - \frac{2\sqrt{\dot{\gamma}''\dot{\gamma}'}}{\sin(\gamma'' - \gamma')} x'' x' + \bigg(\frac{\dot{\gamma}'}{\operatorname{tg}(\gamma'' - \gamma')} - \frac{\dot{G}'}{G'} \bigg) x'^2 \bigg],\end{aligned} \tag{3.10}$$

где использовано равенство

$$\frac{G''\dot{\gamma}''}{G'} + \frac{G'\dot{\gamma}'}{G''} = 2\sqrt{\dot{\gamma}''\dot{\gamma}'},$$

полученное с помощью (3.4).

Заметим, что примененный выше p-адический формализм имеет ту же форму, что и его вещественный аналог, или, другими словами, классический ГОЗВЧ инвариантен относительно замены числовых полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ для всех p. Это можно рассматривать как необходимое условие существования адельного классического ГОЗВЧ, который мы построим следующим способом. Пусть координата x, импульс k и время t будут адельными величинами, как (2.7). Соответствующий адельный лагранжиан задается в виде

$$L(x, \dot{x}, t) = \big(L(x_\infty, \dot{x}_\infty, t_\infty), L(x_2, \dot{x}_2, t_2), \dots, L(x_p, \dot{x}_p, t_p), \dots \big),$$

где $L(x_v, \dot{x}_v, t_v) = m[\dot{x}_v^2 - \omega^2(t_v)x_v^2]/2$ с $v = \infty, 2, \dots, p, \dots$ и $|L(x_p, \dot{x}_p, t_p)|_p \leqslant 1$ для всех, кроме конечного числа, простых чисел p. Все другие представленные выше величины, как вещественные, так и p-адические, также могут быть обобщены до адельных. Например, адельное классическое действие запишется в виде

$$\overline{S}(x'', t''; x', t') = \big(\overline{S}(x''_\infty, t''_\infty; x'_\infty, t'_\infty), \overline{S}(x''_2, t''_2; x'_2, t'_2), \dots, \overline{S}(x''_p, t''_p; x'_p, t'_p), \dots \big), \tag{3.11}$$

где вещественная и p-адические составляющие имеют вид (3.10).

4. КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР: ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, p-АДИЧЕСКИЙ И АДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАИ

Единственный формализм обычной квантовой механики, который допускает p-адические и адельные обобщения с комплекснозначными волновыми функциями, есть тройка [7, 9]

$$\big(L_2(\mathbb{R}), W(z_\infty), U(t_\infty)\big), \tag{4.1}$$

где $L_2(\mathbb{R})$ – гильбертово пространство, z_∞ – точка вещественного классического фазового пространства, $W(z_\infty)$ – унитарное представление группы Вейля–Гайзенберга на $L_2(\mathbb{R})$, $U(t_\infty)$ – унитарное представление эволюционного оператора на $L_2(\mathbb{R})$. Следовательно, под p-адической и адельной квантовыми механиками мы понимаем p-адический и адельный аналоги (4.1), т.е.

$$\big(L_2(\mathbb{Q}_p), W(z_p), U(t_p)\big), \tag{4.2}$$

$$\big(L_2(\mathbb{A}), W(z), U(t)\big), \tag{4.3}$$

соответственно. Таким образом, для нахождения адельных собственных состояний и их эволюции для ГОЗВЧ, заданной с помощью пропагатора $U(t'',t')$, необходимо решить уравнение

$$U(t'',t')\Psi_S^{(\alpha)}(x',t') = \chi[\alpha(\gamma''-\gamma')]\Psi_S^{(\alpha)}(x',t'), \tag{4.4}$$

где $\alpha = (\alpha_\infty, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots)$ – адельный аналог энергии,

$$\chi(u) = \prod_v \chi_v(u_v) = \exp\left(-2\pi i u_\infty\right) \prod_p \exp\left(2\pi i \{u_p\}_p\right)$$

и

$$\Psi_S^{(\alpha)}(x,t) = \Psi_\infty^{(\alpha_\infty)}(x_\infty, t_\infty) \prod_{p\in S} \Psi_p^{(\alpha_p)}(x_p,t_p) \prod_{p\notin S} \Omega(|x_p|_p). \tag{4.5}$$

Эволюционный оператор $U(t'',t') = \prod_v U_v(t''_v, t'_v)$ действует покомпонентно следующим образом:

$$[U_v\Psi_v](x''_v, t''_v) = \int_{\mathbb{Q}_v} \mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v)\Psi_v(x'_v,t'_v)\,dx'_v. \tag{4.6}$$

Ядро $\mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v)$ определено фейнмановским интегралом по траекториям

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v) &= \int \chi_v\left(-\frac{1}{h}S[x]\right)\mathcal{D}x = \\ &= \int \chi_v\left(-\frac{1}{h}\int_{t'_v}^{t''_v} L(x_v,\dot{x}_v,t_v)dt_v\right)\prod_{t_v} dx(t_v),\end{aligned} \tag{4.7}$$

где h – постоянная Планка. Ядро $\mathcal{K}$, называемое также квантово-механическим пропагатором, играет центральную роль не только в обычной, но и в p-адической и адельной механиках.

p-Адический фейнмановский интеграл по траекториям для классического действия, квадратичного по x'' и x', вычислен в работе [15] и имеет ту же форму, что и его вещественный аналог. А именно, если действие $\overline{S}(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v)$ квадратично по x''_v и x'_v, то

$$\mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v) = \lambda_v\left(-\frac{1}{2h}\frac{\partial^2\overline{S}}{\partial x''_v \partial x'_v}\right)\left|\frac{1}{h}\frac{\partial^2\overline{S}}{\partial x''_v \partial x'_v}\right|_v^{1/2} \chi_v\left(-\frac{1}{h}\overline{S}(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v)\right), \quad (4.8)$$

где $\lambda_\infty(\alpha) = (1 - i\,\mathrm{sign}\,\alpha)/\sqrt{2}$, $\lambda_\infty(0) = 1$ и выполняются свойства (2.5).

Применяя формулу (4.8) к ГОЗВЧ и используя (3.10), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v) = \lambda_v\left(\frac{m}{2h}\frac{\sqrt{\dot\gamma''\dot\gamma'}}{\sin(\gamma''-\gamma')}\right)\left|\frac{m}{h}\frac{\sqrt{\dot\gamma''\dot\gamma'}}{\sin(\gamma''-\gamma')}\right|_v^{1/2} \times \\ \times \chi_v\left\{-\frac{m}{2h}\left[\left(\frac{\dot\gamma''}{\mathrm{tg}(\gamma''-\gamma')} + \frac{\dot G''}{G''}\right)x''^2 - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{2\sqrt{\dot\gamma''\dot\gamma'}}{\sin(\gamma''-\gamma')}x''x' + \left(\frac{\dot\gamma'}{\mathrm{tg}(\gamma''-\gamma')} - \frac{\dot G'}{G'}\right)x'^2\right]\right\}, \quad (4.9)\end{aligned}$$

что содержит ранее полученный результат в вещественном случае (см., например, [14]). Можно явно показать, что пропагатор (4.9) удовлетворяет всем обычным свойствам вероятностной амплитуды квантовой частицы для прохождения из пространственно-временной точки (x'_v, t'_v) в пространственно-временную точку (x''_v, t''_v).

Соответствующий адельный пропагатор имеет вид

$$\mathcal{K}(x'', t''; x', t') = \prod_v \mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v), \quad (4.10)$$

где $\mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v)$ дается формулой (4.9). Произведение в (4.10) расходится, но его можно рассматривать как адельный функционал на пространстве пробных функций, являющихся обычными функциями Шварца–Брюа (см. также [16]).

В p-адической квантовой механике важную роль играет собственное состояние $\Omega(|x_p|_p)$ (2.6), которое инвариантно относительно $U_p(t''_p, t'_p)$-преобразований и может рассматриваться как p-адическое вакуумное состояние, т.к. у него $\{\alpha_p(\gamma''_p - \gamma'_p)\}_p = 0$. В силу (4.5) существование функции $\Omega(|x_p|_p)$ для всех p, кроме конечного числа, является необходимым условием для объединения обычной и p-адической квантовых механик в адельных формах. Это Ω-состояние существует тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\int_{|x'_p|_p \leqslant 1} \mathcal{K}_p(x''_p, t''_p; x'_p, t'_p)\, dx'_p = \Omega(|x''_p|_p). \quad (4.11)$$

Подставляя (4.9) с $v = p$ в (4.11) и используя интеграл (2.4) для $\nu = 0$, мы можем вывести некоторые условия на величины $G(t_p)$, $\gamma(t_p)$ и m, которые обеспечивают существование Ω-состояния. Например, если $\gamma(t_p) = \gamma_0 + \gamma_1 t_p + \gamma_2 t_p^2 + \cdots + \gamma_n t_p^n + \cdots$ и

$$\left|\frac{\dot G'}{G'}\right|_p < \left|\frac{\dot\gamma'}{\mathrm{tg}(\gamma''-\gamma')}\right|_p > \left|\frac{h}{2m}\right|_p,$$

то $\Omega(|x_p|_p)$ существует для всех $p \neq 2$. Полезно заметить, что не всякий ГОЗВЧ имеет Ω-состояние и может быть обобщен до адельного.

В качестве простейшей иллюстрации к перечисленным утверждениям можно взять частоту $\omega(t) = \omega_0$ и вывести ранее полученный результат [9].

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В соответствии с (4.5) адельная волновая функция $\Psi(x,t)$ дает больше информации о физической системе, чем ее стандартная часть $\Psi_\infty(x_\infty,t_\infty)$. Мы хотим особо отметить дискретность пространства и наличие p-адической фазы, что обусловлено и в основном следует из адельного квантового формализма.

Например, адельное состояние

$$\Psi(x,t)=\Psi_\infty(x_\infty,t_\infty)\prod_p\Omega(|x_p|_p)$$

показывает дискретную структуру пространства на длине $l_0=(hm^{-1}\omega^{-1})^{1/2}$. Действительно, в соответствии с обычной интерпретацией волновой функции следует рассматривать $|\Psi(x,t)|^2_\infty$ в рациональных точках x и t. В нашем адельном случае мы получаем

$$|\Psi(x,t)|^2_\infty=|\Psi_\infty(x,t)|^2_\infty\prod_p\Omega(|x|_p)\begin{cases}|\Psi_\infty(x,t)|^2_\infty & x\in\mathbb{Z},\\ 0, & x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Здесь использованы следующие свойства Ω-функции:

$$\Omega^2(|x|_p)=\Omega(|x|_p),\quad \prod_p\Omega(|x|_p)=1,$$

если $x\in\mathbb{Z}$, и

$$\prod_p\Omega(|x|_p)=0,$$

если $x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Таким образом, это означает, что координата x может иметь только дискретные значения: $x/l_0=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Для проверки этой дискретности пространства экспериментально нужно исследовать физическую систему в ее вакуумном состоянии и на расстояниях порядка длины l_0. Когда система находится в смешанном состоянии

$$\Psi(x,t)=\sum_{S,\alpha}C(S,\alpha)\Psi_S^{(\alpha)}(x,t),$$

дискретная структура не проявляется и пространство обнаруживает обычные непрерывные свойства. Таким образом, дискретность пространства есть квантовый эффект, который зависит от адельного квантового состояния.

Адельные волновые функции дают возможность исследования новых фаз, которые могут быть названы p-адическими. Действительно, выражение (4.5) содержит функции

$$\Psi_p(x_p,t_p)=\chi_p[\alpha_p(\gamma(t_p)-\gamma^0)]\Psi_p(x_p,0),$$

где $\chi_p[\alpha_p(\gamma(t_p)-\gamma^0)]$ можно интерпретировать как p-адическую динамическую фазу. Подобную фазу можно наблюдать, исследуя тонкую структуру процесса интерференции.

На реальных расстояниях, очень больших по сравнению с l_0, p-адические эффекты пропадают и адельная квантовая механика сводится к обычной. В этом случае мы должны проинтегрировать $|\Psi(x,t)|^2$ по p-адическим компонентам адельного пространства. Так как

$$\int_{|x_p|_p\leqslant 1} dx = 1, \qquad \int_{\mathbb{Q}_p} |\Psi_p(x_p,t_p)|_\infty^2\, dx_p = 1,$$

мы получаем, что

$$\int_{\mathcal{A}(S)\setminus\mathbb{R}} |\Psi_S(x,t)|_\infty^2\, dx = |\Psi_\infty(x_\infty,t_\infty)|_\infty^2\, dx_\infty \prod_{p\in S}\int_{\mathbb{Q}_p} |\Psi_p(x_p,t_p)|_\infty^2\, dx_p \times$$
$$\times \prod_{p\notin S}\int_{\mathbb{Z}_p} \Omega(|x_p|_p)\, dx_p = |\Psi_\infty(x_\infty,t_\infty)|_\infty^2\, dx_\infty.$$

Следовательно, обычная квантовая теория может рассматриваться как эффективная аппроксимация более тонкой адельной квантовой теории.

Благодарности. Работа была частично поддержана РФФИ (грант № 990100166) и грантом ведущих научных школ. Мы хотели бы поблагодарить наших коллег из Отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова в Москве за плодотворные обсуждения.

Список литературы

[1] *W. H. Schikhof*. Ultrametric Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
[2] *L. Brekke, P.G.O. Freund*. Phys. Rep. 1993. V. 233. P. 1.
[3] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов*. p-Адический анализ и математическая физика. М.: Физ.-мат. лит., Наука, 1994.
[4] *A. Khrennikov*. p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
[5] *A. Khrennikov*. Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
[6] *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро*. Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966; *A. Weil*. Adeles and Algebraic Groups. Boston: Birkhäuser, 1982.
[7] *V. S. Vladimirov, I. V. Volovich*. Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 659.
[8] *Ph. Ruelle, E. Thiran, D. Verstegen, J. Weyers*. J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2854.
[9] *Б. Драгович*. ТМФ. 1994. Т. 101. № 3. С. 349; *B. Dragovich*. Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 2349.
[10] *B. Dragovich*. Adelic Wave Function of the Universe. In: Proc. Third Friedmann Intern. Seminar on Gravitation and Cosmology. Eds. Yu. N. Gnedin, A. A. Grib, and V.M. Mostepanenko. St. Petersburg: Friedmann Lab. Publ., 1995. P. 311.
[11] *G. S. Djordjević, B. Dragovich, Lj. Nešić*. Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 317.
[12] *A. D. Jannussis, B. S. Bartzis*. Phys. Lett. A. 1988. V. 129. P. 263; *R. J. Glauber*. Quantum theory of particle trapping by oscillating fields. In: Quantum Measurements in Optics. Eds. P. Tombesi and D.F. Walls. N. Y.: Plenum Press, 1992. P. 3; *V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko*. Phys. Lett. A. 1993. V. 175. P. 1.
[13] *J. J. Halliwell, S. W. Hawking*. Phys. Rev. D. 1985. V. 31. P. 1777.
[14] *D. C. Khandekar, S. V. Lawande*. J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 384; *C. P. Natividade*. Am. J. Phys. 1988. V. 56. P. 921; *C. Farina, A. J. Segui-Santonja*. Phys. Lett. A. 1993. V. 184. P. 23.
[15] *G. S. Djordjević, B. Dragovich*. Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 1455.
[16] *B. Dragovich*. Integral Transforms and Special Functions. 1998. V. 6. P. 197.

Поступила в редакцию 24.IX.1999 г.,
после доработки 20.I.2000 г.