О. К. Шейнман, Двойственность в некоторых дискретных задачах минимизации, *УМН*, 1978, том 33, выпуск 2, 211

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ

О. К. Шейнман

В настоящей заметке для задач минимизации вида

$$(1)\qquad \min\Big\{\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \Big| \sum_{j=1}^{n} g_jx_j=g_0;\ x_j\in\mathbb{Z},\ x_j\geqslant 0\,(j=1,\ \ldots,\ n)\Big\}$$

(где числа c_j соизмеримы; $g_0, g_1, \ldots, g_n$ — элементы абелевой группы G, причем $g_1, \ldots, g_n$ порождают G) строится аналог двойственной задачи линейного программирования.

Если $G\subset\mathbb{Z}^m$ при некотором m, задача (1) является задачей целочисленного линейного программирования (ЦП); если G конечна, получаем так называемую задачу Гомори.

Пусть φ — гомоморфизм $\mathbb{Z}^n$ в G, определенный формулой $\varphi(x)=\sum_{j=1}^{n} g_jx_j$ $(x=(x_1,\ \ldots$ $\ldots,\ x_n)\in\mathbb{Z}^n)$, и пусть $(\mathbb{Z}^n)^+=\{x\in\mathbb{Z}^n\colon x\geqslant 0\}$. Тогда φ отображает $(\mathbb{Z}^n)^+$ на полугруппу G^+ всех неотрицательных целочисленных комбинаций элементов $g_1, \ldots, g_n$. Следовательно, каждой функции γ на G^+ можно сопоставить функцию $\varphi^*\gamma$ на $(Z^n)^+$, определяемую формулой $(\varphi^*\gamma)(x)=\gamma(\varphi(x))$.

Функция γ на G^+ называется субаддитивной, если для $\forall g',\ g''\in G^+$ $\gamma(g'+g'')\leqslant\leqslant\gamma(g')+\gamma(g'')$. Пусть Γ обозначает множество субаддитивных функций на G^+. Назовем следующую задачу двойственной к задаче (1):

$$(2)\qquad \max\ \{\gamma(g_0)\mid\gamma\in\Gamma;\quad \varphi^*\gamma\leqslant c\}$$

(запись $\varphi^*\gamma\leqslant c$, означает, что $(\varphi^*\gamma)(x)\leqslant\sum c_jx_j$ для $\forall x\in(\mathbb{Z}^n)^+$).

Лемма. *Задача* (2) *эквивалентна следующей задаче*:

$$(3)\qquad \max\{\gamma(g_0)\mid\gamma\in\Gamma;\quad \gamma(g_j)\leqslant c_j\ (j=1,\ \ldots,\ n)\}.$$

Пусть $c(x)=\sum c_jx_j$. Допустим, что области определения задач (1) и (3) непусты. Следующая теорема аналогична первой теореме двойственности линейного программирования.

Теорема 1. 1) *Если x удовлетворяет ограничениям задачи* (1), *а γ — ограничениям задачи* (3), *то* $\gamma(g_0)\leqslant c(x)$.

2) *Существуют такие x^* и γ^*, удовлетворяющие ограничениям соответствующих задач, что* $\gamma^*(g_0)=c(x^*)$.

Доказательство. 1) Пусть $x\in(\mathbb{Z}^n)^+$ и $\sum g_jx_j=g_0$; $\gamma\in\Gamma$ и $\gamma(g_j)\leqslant c_j$ $(j=$ $=1,\ \ldots,\ n)$. Тогда $\gamma(g_0)\leqslant\sum\gamma(g_j)x_j\leqslant\sum c_jx_j=c(x)$. 2) Рассмотрим граф F, вершинами которого служат элементы полугруппы G^+, и из каждой вершины g выходит n дуг, соединяющих g с $g+g_j$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$. Тогда любому $x\in(\mathbb{Z}^n)^+$, такому, что $\sum g_jx_j=g$, соответствует путь от 0 до g в графе F. Назовем длиной дуги $(g,\ g+g_j)$ число c_j (независимо от g). Пусть $\gamma^*(g)$ — длина кратчайшего пути от 0 до g в графе F (существование такового следует из соизмеримости чисел c_j). Тогда γ^* субаддитивна (неравенство треугольника) и $\gamma^*(g_j)\leqslant c_j$. Если x^* — кратчайший путь от 0 до g_0, то по определению $\gamma^*(g_0)=c(x^*)$. Теорема доказана.

Следствие. *x^* и γ^*, определенные теоремой* 1, *являются точкой минимума и точкой максимума соответствующих задач.*

Рассмотрим случай, когда (1) — задача ЦП. Тогда в численных методах решения задачи (1) большую роль играют отсечения — гиперплоскости, отделяющие вершину многогранника $M=\{x\geqslant 0\colon \sum g_jx_j=g_0\}$, в которой принимается $\min\limits_M c(x)$, от множества $M\cap(\mathbb{Z}^n)^+$. Говорят, что отсечение $(f,\ x)\geqslant f_0$ сильнее отсечения $(f',\ x)\geqslant f_0'$, если

$$M\cap\{x\colon (f,\ x)\geqslant f_0\}\subset M\cap\{x\colon (f',\ x)\geqslant f_0'\}.$$

Теорема 2. *Для любого отсечения найдется такая функция $\gamma\in\Gamma$, что $\sum\gamma(g_j)x_j\geqslant\gamma(g_0)$ — не менее сильное отсечение.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. Х у, Целочисленное программирование и потоки в сетях, М., «Мир», 1974.

Поступило в Правление общества 15 июня 1976 г.