Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Г. Кремлёв, Об оптимальном управлении ансамблем траекторий сингулярно возмущенной квазилинейной системы,

Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 11, 1892–1904

https://www.mathnet.ru/de8486

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
18 апреля 2025 г., 09:42:20

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.977

А. Г. КРЕМЛЁВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ АНСАМБЛЕМ ТРАЕКТОРИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В работе рассматривается задача оптимального управления в постановке [1, 2] для сингулярно возмущенных систем с неопределенностью по начальным условиям. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. Описывается асимптотическое представление оптимального решения, полученное на основе исследований [3—6].

1. Рассматривается управляемая система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_{11}(t)x + A_{12}(t)y + \mu f_1(t, x, y) + B_1(t)u, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathscr{X}_0, \\ \mu\frac{dy}{dt} &= A_{21}(t)x + A_{22}(t)y + \mu f_2(t, x, y) + B_2(t)u, \quad y(t_0) = y_0 \in \mathscr{Y}_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $x \in R^n$, $y \in R^m$; $\mathscr{X}_0$, $\mathscr{Y}_0$ — выпуклые компакты в соответствующих пространствах; $u \in R^r$ — управление, $u(t) \in P(t)$, $t \in T$, реализации $u(\cdot)$ — измеримые по Лебегу функции, $P(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов (в R^r), непрерывное по t в метрике Хаусдорфа; $A_{ij}(t)$, $B_j(t)$, $i, j = 1, 2,$— матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами; $f_i(t, x, y)$, $i = 1, 2,$— непрерывные вектор-функции, дважды дифференцируемые по переменным x, y в некотором компакте $Q \subset R^{n+m}$; $\mu > 0$ — малый параметр.

Введем обозначения (штрих — знак транспонирования): $z' = (x', y')$; $\mathscr{Z}_0 = \mathscr{X}_0 \times \mathscr{Y}_0$; $\mathscr{Z}(t; u(\cdot), \mathscr{Z}_0)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— множество (ансамбль) траекторий $z(\cdot; u(\cdot), z_0)$ системы (1.1), исходящих из $\mathscr{Z}_0$, при фиксированном $u(\cdot) \in P(\cdot)$. Будем считать, что $\mathscr{Z}(t; u(\cdot), \mathscr{Z}_0) \subset Q$ для любых $t \in T$, $u(\cdot) \in P(\cdot)$ при всех $0 < \mu \leqslant \mu_0$, μ_0 достаточно мало.

З а д а ч а 1.1. Среди $u(\cdot) \in P(\cdot)$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J(u(\cdot))$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min\{J(u(\cdot)) \mid u(\cdot) \in P(\cdot)\}, \ J(u(\cdot)) = \\ = \max\{\varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0)) \mid z_0 \in \mathscr{Z}_0\}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\varphi(\cdot): R^{n+m} \to R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Решение задачи 1.1 существует (при каждом фиксированном значении $\mu > 0$), причем справедливо

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = \min_{u(\cdot) \in P(\cdot)} \max_{z_0 \in \mathscr{Z}_0} \max_{l} (l'z(t_1; u(\cdot), z_0) - \varphi^*(l)),$$

$$l \in \partial\varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0)),$$

где $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная к $\varphi(z)$; $l \in R^{n+m}$; $\partial\varphi(z)$ — субдифференциал φ в точке z, $\partial\varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0))$ — выпуклый компакт в R^{n+m} [7]. Оптимальное управление $u^0(\cdot) = u^0(\cdot, \mu)$ удовлетворяет условию [8]:

$$\min_{u(\cdot)\in P(\cdot)} \quad \max_{\xi^0} \max_{l^0} \int_{t_0}^{t_1} l^{0\prime} H[t_1, t; \mu, \xi^0] B(t, \mu)(u(t) - u^0(t))\, dt = 0; \tag{1.3}$$

здесь максимум вычисляется по всем $l^0 \in \partial\varphi(z(t_1; u^0(\cdot), \xi^0))$,

$$\xi^0 \in \{\eta \mid \eta \in \mathscr{X}_0,\ \varphi(z(t_1; u^0(\cdot), \eta)) = \max_{z_0\in\mathscr{X}_0} \varphi(z(t_1; u^0(\cdot), z_0))\};$$

$H[t, \tau; \mu, \xi^0]$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{dz}{dt} = \left(A(t, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial z} f(t, z(t; u^0(\cdot), \xi^0))\right) z, \quad H[t, t; \mu, \xi^0] = E,$$
$$A(t, \mu) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ \hdashline \dfrac{1}{\mu} A_{21}(t) & \dfrac{1}{\mu} A_{22}(t) \end{array}\right), \quad B(t, \mu) = \left(\begin{array}{c} B_1(t) \\ \hdashline \dfrac{1}{\mu} B_2(t) \end{array}\right), \tag{1.4}$$
$$f'(t, z) = \left(f_1'(t, x, y), \frac{1}{\mu} f_2'(t, x, y)\right).$$

Полученные $u^0(\cdot, \mu)$, l^0, $\varepsilon^0(t_1, \mu)$ зависят от параметра μ. Однако в отличие от регулярного случая [3, 4] эти величины при $\mu \to +0$ могут не сходиться к соответствующим решениям задачи 1.1 для вырожденной системы, полученной из (1.1) при $\mu = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + B_0(t)u, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathscr{X}_0, \tag{1.5}$$

$$y = -A_{22}^{-1}(t) A_{21}(t) x - A_{22}^{-1}(t) B_2(t) u, \tag{1.6}$$

$$t \in T, \quad A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t) A_{22}^{-1}(t) A_{21}(t), \quad B_0(t) = $$
$$= B_1(t) - A_{12}(t) A_{22}^{-1}(t) B_2(t)$$

(предполагается существование $A_{22}^{-1}(t)$, $t \in T$).

В работе [5] приведено решение вырожденной задачи (для (1.5), (1.6)), показана его непригодность даже в качестве начального приближения решения исходной задачи (в [6] указанный факт иллюстрируется на примере). В данной работе асимптотика оптимального решения задачи 1.1 определяется на основе построенных аппроксимаций в [5, 6] для однородной системы при $\mu \neq 0$, полученной из (1.1) при $f(t, z) \equiv 0$:

$$\frac{dz}{dt} = A(t, \mu) z + B(t, \mu) u, \quad z(t_0) = z_0 \in \mathscr{X}_0. \tag{1.7}$$

2. Пусть $Z[t, \tau; \mu]$ есть фундаментальная матрица решений однородной системы (1.7) (при $u \equiv 0$), которую представим в блочном виде:

$$Z[t, \tau; \mu] = \left(\begin{array}{c|c} Z_{11}[t, \tau; \mu] & Z_{12}[t, \tau; \mu] \\ \hdashline Z_{21}[t, \tau; \mu] & Z_{22}[t, \tau; \mu] \end{array}\right);$$

здесь $Z_{ij}[t, \tau; \mu]$ — матрицы с размерами, соответствующими блокам $A_{ij}(t)$ в $A(t, \mu)$.

Пусть собственные значения $\lambda_s(t)$ матрицы $A_{22}(t)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda_s(t) < -2c < 0$ при $t \in T$, $c = \mathrm{const} > 0$. Тогда [9, с. 69] при достаточно малых μ $(0 < \mu \leqslant \mu_0)$ фундаментальная матрица решений $Y[t, \tau; \mu]$, $Y[\tau, \tau; \mu] = E$, системы $\mu\dot{y} = A_{22}(t) y$ при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$ имеет оценку $\|Y[t_1, \tau; \mu]\| \leqslant c_0 \exp\{-c(t - \tau)/\mu\}$, $c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

В работах [5, 6] приведены оценки для блоков $Z_{ij}[t, \tau; \mu]$, причем последние представлены в виде пределов равномерно сходящихся на T последовательностей (при $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 достаточно мало) $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau; \mu]$:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t, \tau; \mu] = X_0[t, \tau] - \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d}{ds}(Z_{12}^{(0)}[t, s; \mu])A_{22}^{-1}(s)A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s, \tau; \mu]\,ds,$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t, \tau; \mu] = Y[t, \tau; \mu] + \int\limits_{\tau}^{t} Z_{21}^{(k)}[t, s; \mu]A_{12}(s)Y[s, \tau; \mu]\,ds,$$

$$Z_{12}^{(k)}[t, \tau; \mu] = \int\limits_{\tau}^{t} Z_{11}^{(k)}[t, s; \mu]A_{12}(s)Y[s, \tau; \mu]\,ds, \tag{2.1}$$

$$Z_{21}^{(k)}[t, \tau; \mu] = \frac{1}{\mu}\int\limits_{\tau}^{t} Y[t, s; \mu]A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s, \tau; \mu]\,ds, \quad k=0, 1, 2, \ldots,$$

где $Z_{11}^{(0)}[t, \tau; \mu] = X_0[t, \tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t, \tau; \mu] = Y[t, \tau; \mu]$, $X_0[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (1.5) (при $u\equiv 0$).

Следующую задачу будем называть предельной [5, 6].

З а д а ч а 2.1. Среди управлений $u(\tau)\in P(\tau)$, $\tau\in[t_0, t_1]$, $v(s)\in P(t_1)$, $s\in[0, +\infty)$, найти $u^{(0)}=u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}=v^{(0)}(\cdot)$, доставляющие минимум

$$J^{(0)}(u^{(0)}, v^{(0)}) = \min\{J^{(0)}(u(\cdot), v(\cdot))\,|\,u(\cdot)\in P(\cdot),\ v(\cdot)\in P(t_1)\},$$

$$J^{(0)}(u(\cdot), v(\cdot)) = \max\{\varphi(\tilde{z}(t_1; u(\cdot), v(\cdot), x_0))\,|\,x_0\in\mathscr{X}_0\},$$

где

$$\tilde{z}(t_1; u(\cdot), v(\cdot), x_0) = (x_0'(t_1); (-A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1)x_0(t_1) + \int\limits_0^{\infty}\Phi_0[t_1, s]\times$$

$$\times B_2(t_1)v(s)\,ds)')'; \tag{2.2}$$

здесь $\Phi_0[t_1, s]$ — решение матричного уравнения

$$\frac{d}{ds}\Phi_0[t_1, s] = \Phi_0[t_1, s]A_{22}(t_1), \quad \Phi_0[t_1, 0] = E,$$

$x_0(\tau)$, $t_0\leqslant\tau\leqslant t_1$ — решение вырожденной системы (1.5) при $u=u(\cdot)$, $x(t_0)=x_0$.

П р е д п о л о ж е н и е 2.1. *i)* $\operatorname{rank}\{B_2(t_1), A_{22}(t_1)B_2(t_1), \ldots, A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1)\}=m$; *ii) система (1.5) вполне управляема [1, 2] на T; iii) вектор $l^{(0)\prime}=(p^{(0)\prime}, q^{(0)\prime})$, доставляющий максимум в*

$$\varepsilon^{(0)}(t_1) = \max\{\varkappa^{(0)}(p, q)\,|\,p\in R^n, q\in R^n\} = \varkappa^{(0)}(p^{(0)}, q^{(0)}), \tag{2.3}$$

таков, что $s'(t_1; p^{(0)}, q^{(0)})\neq 0$, $q^{(0)}\neq 0$.

Здесь

$$\varkappa^{(0)}(p, q) = -h_0^{**}(p, q) - \int\limits_{t_0}^{t_1}\rho(-s'(t_1; p, q)X_0[t_1, \tau]B_0(\tau)\,|\,P(\tau))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^{\infty}\rho(-q'\Phi_0[t_1, s]B_2(t_1)\,|\,P(t_1))\,ds, \tag{2.4}$$

$$s'(t_1; p, q) = p' - q'A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1),$$

$$h_0(p, q) = \varphi^*(p, q) - \rho(s'(t_1; p, q)X_0[t_1, t_0]\,|\,\mathscr{X}_0),$$

где $h_0^{**}(p, q)$ — нижняя огибающая [7] (или замыкание выпуклой оболочки) функции $h_0(p, q)$; $\rho(s\,|\,\mathscr{X})$ — опорная функция множества $\mathscr{X}$ на элементе s.

На основании теоремы 4 [6] имеем, что при предположении 2.1

задача 2.1 разрешима и оптимальная пара $u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям минимума: при почти всех $\tau\in[t_0, t_1]$, $s\geqslant 0$

$$s'(t_1;\,p^{(0)},\,q^{(0)})X_0[t_1,\tau]B_0(\tau)u^{(0)}(\tau)=\min_{u(\tau)\in P(\tau)} s'(t_1;\,p^{(0)},\,q^{(0)})\times$$
$$\times X_0[t_1,\tau]B_0(\tau)u(\tau), \tag{2.5}$$
$$q^{(0)\prime}\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v^{(0)}(s)=\min_{v(s)\in P(t_1)} q^{(0)\prime}\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v(s),$$

и доставляет функционалу $J^{(0)}$ значение $J^{(0)}(u^{(0)}, v^{(0)})=\varepsilon^{(0)}(t_1)$.

Рассмотрим управляющее воздействие

$$u_\mu^{(0)}(\tau)=\begin{cases} u^{(0)}(\tau), & t_0\leqslant\tau\leqslant t_1-\alpha(\mu),\\ v^{(0)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1-\alpha(\mu)<\tau\leqslant t_1,\end{cases} \tag{2.6}$$

где $\alpha=\alpha(\mu)\in R:\alpha(\mu)>0$, $\alpha(\mu)\to 0$, $(\alpha(\mu)/\mu)\to+\infty$ при $\mu\to+0$.

Пусть $\mu_k>0$ ($\mu_k<\mu_0$, $k=1, 2, \ldots$) есть некоторая, сходящаяся к нулю последовательность чисел; $u_k^{(0)}(\cdot)\equiv u_{\mu_k}^{(0)}(\cdot)$, $k=1, 2, \ldots$, — соответствующая последовательность управлений вида (2.6). В силу слабой компактности множества $\mathscr{P}=\{u(\cdot)\,|\,u(t)\in P(t),\ t\in T\}$ в пространстве $L_2^r(T)$ можно выделить подпоследовательность $u_{k_j}^{(0)}(\cdot)$, слабо сходящуюся (при $k_j\to\infty$) к некоторой функции $u^{(0)}(\cdot)\in\mathscr{P}$, удовлетворяющей для почти всех $\tau\in T$ условиям (2.5), причем имеет место равенство

$$\int_0^\infty q^{(0)\prime}\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v^{(0)}(s)\,ds=\lim_{k_j\to\infty}\frac{1}{\mu_{k_j}}\int_{t_1-\alpha(\mu_{k_j})}^{t_1} q^{(0)\prime}Y[t_1,\tau;\,\mu_{k_j}]\times$$
$$\times B_2(\tau)u_{k_j}^{(0)}(\tau)\,d\tau=\lim_{k_j\to\infty}\min_{u(\cdot)\in P(\cdot)}\frac{1}{\mu_{k_j}}\int_{t_1-\alpha(\mu_{k_j})}^{t_1} q^{(0)\prime}Y[t_1,\tau;\,\mu_{k_j}]B_2(\tau)u(\tau)\,d\tau. \tag{2.7}$$

Рассмотрим соответствующую последовательность оптимальных (для задачи 1.1) управлений $u_{k_j}^0(\cdot)\equiv u^0(\cdot,\mu_{k_j})$, $j=1, 2, \ldots$ Обозначим $v_{k_j}^0(\cdot)=$ $=v^0(\cdot,\mu_{k_j})$, $v^0(s,\mu)=u^0(t_1-\mu s,\mu)$, $0\leqslant s\leqslant 1/\varepsilon<\alpha/\mu$ при $0<\mu\leqslant\mu_0$, где $\varepsilon>0$ — произвольно выбранное число.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия предположения 2.1, причем максимум в (2.3) достигается на единственном векторе $l^{(0)}$. Тогда:*

i) $u_{k_j}^0(\cdot)$ слабо сходится к $u^{(0)}(\cdot)$, $v_{k_j}^0(\cdot)$ слабо сходится к $v^{(0)}(\cdot)$ (на $[0, 1/\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$), для которых выполняются (2.5), (2.7);

ii) при $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 достаточно мало, справедливы соотношения

$$\varepsilon^0(t_1)=J(u^0(\cdot))=J(u_\mu^{(0)}(\cdot))+o(1),\quad \varepsilon^0(t_1)=\varepsilon^{(0)}(t_1)+o(1);$$

iii) равномерно по всем $l\in R^{n+m}$, $l'l=1$,

$$|\rho(l\,|\,\mathscr{X}(t_1;\,u^0(\cdot),\mathscr{X}_0))-\rho(l\,|\,\mathscr{X}(t_1;\,u_\mu^{(0)}(\cdot),\,\mathscr{X}_0))|\leqslant\omega_0(\mu),$$

где $\omega_0(\mu)=o(1)$, $0<\mu\leqslant\mu_0$;

iiii) при $\mu\to+0$ множество $\mathscr{X}(t_1;\,u^0(\cdot),\,\mathscr{X}_0)$ сходится в хаусдорфовой метрике к выпуклому, замкнутому, ограниченному множеству $\tilde{\mathscr{X}}(t_1;$ $u^{(0)}, v^{(0)}, \mathscr{X}_0)=\{\tilde z\in R^{n+m}\,|\,\tilde z=\tilde z(t_1;\,u^{(0)},\,v^{(0)},\,x_0),\ x_0\in\mathscr{X}_0\}$.

Доказательство утверждения следует из теорем 4.2, 4.3 [5], 5 [6], условия (1.3) и с учетом представлений, справедливых для любых $t_0\leqslant\vartheta\leqslant t\leqslant t_1$, $z_0\in\mathscr{X}_0$, $u(\cdot)\in P(\cdot)$, $l'=(p', q')\in R^{n+m}$, при $0<\mu\leqslant\mu_0$:

$$H[t,\vartheta;\,\mu,z_0]=Z[t,\vartheta;\,\mu]+\mu\int_\vartheta^t Z[t,\tau;\,\mu]\,\frac{\partial}{\partial z}f(\tau,z(\tau;\,u(\tau),z_0))\times$$
$$\times Z[\tau,\vartheta;\,\mu]\,d\tau+o(\mu), \tag{2.8}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} l'Z[t_1, \tau; \mu] B(\tau, \mu) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1-\alpha(\mu)} s'(t_1; p, q) X_0[t_1, \tau] B_0(\tau) u(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^{\alpha(\mu)/\mu} q'Y[t_1, t_1 - \mu s; \mu] B_2(t_1 - \mu s) v(s) ds + \tilde{\varphi}(l, \mu), \qquad (2.9)$$

причем $|\tilde{\varphi}(l, \mu)| \leqslant \|l\| \tilde{\omega}(\mu)$, $\tilde{\omega}(\mu) = o(1)$; здесь обозначено $v(s) = u(t_1 - \mu s)$.

3. В работе [6] на основании свойств последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau; \mu]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, построены аппроксимации решения задачи 1.1 для однородной системы (1.7) (с заданной точностью $o(\mu^k)$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$). Используя эту процедуру и итерационную схему [4], получим асимптотику задачи 1.1 для исходной системы (1.1).

Предположение 3.1. *i) Максимум в (2.3) достигается на единственном векторе $l^{(0)\prime} = (p^{(0)\prime}, q^{(0)\prime})$;*

ii) максимум в предельной задаче при $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ достигается на единственном векторе $x_0^{(0)}$:

$$J^{(0)}(u^{(0)}, v^{(0)}) = \max_{x_0 \in \mathscr{X}_0} \varphi(\tilde{z}(t_1; u^{(0)}(\cdot), v^{(0)}(\cdot), x_0)) = \varphi(\tilde{z}(t_1; u^{(0)}(\cdot), v^{(0)}(\cdot), x_0^{(0)})); \qquad (3.1)$$

iii) выполняется хотя бы одно из условий:

a) существует постоянная $\gamma > 0$, что для любых возможных направлений $g \in R^{n+m}$, $\|g\| = 1$, производная по направлению (для функции $\varkappa^{(0)}(l)$ (2.4)) $\partial \varkappa^{(0)}(l^{(0)}) / \partial g \leqslant -\gamma$;

b) найдется такая постоянная $\delta > 0$ (не зависящая от μ), что для всех $l \in R(\delta) = \{l \in R^{n+m} | l \in \operatorname{dom} \varphi^*, \ \|l - l^{(0)}\| \leqslant \delta\}$ величина $\varkappa^{(0)}(l)$ (2.4) мажорируется сверху сильно вогнутой функцией $\chi(l)$ с коэффициентом вогнутости, не зависящим от μ, причем $\chi(l^{(0)}) = \varkappa^{(0)}(l^{(0)}) \geqslant \chi(l)$, $l \in R(\delta)$.

Применяя формулу Коши, выпишем решение уравнения (1.7) при $u = u_\mu^{(0)}(\cdot)$, $z(t_0) = z_0^{(0)} = (x_0^{(0)\prime}, y_0')'$ с точностью $O(\mu)$ (в качестве y_0 можно взять любой вектор из $\mathscr{Y}_0$):

$$z_{(0)}(t; u_\mu^{(0)}(\cdot), z_0^{(0)}) = Z^{(0)}[t, t_0; \mu] z_0^{(0)} + \int_{t_0}^{t} Z^{(0)}[t, \tau; \mu] B(\tau, \mu) u_\mu^{(0)}(\tau) d\tau =$$

$$= \left(\begin{array}{c} X_0[t, t_0] x_0^{(0)} + \int_{t_0}^{t} X_0[t, \tau] B_0(\tau) u_\mu^{(0)}(\tau) d\tau \\ \hdashline Z_{21}^{(0)}[t, t_0; \mu] x_0^{(0)} + Y[t, t_0; \mu] y_0 + \int_{t_0}^{t} Z_{21}^{(0)}[t, \tau; \mu] B_0(\tau) u_\mu^{(0)}(\tau) d\tau + \\ + \dfrac{1}{\mu} \int_{t_0}^{t} Y[t, \tau; \mu] B_2(\tau) u_\mu^{(0)}(\tau) d\tau \end{array} \right). \qquad (3.2)$$

Пользуясь методом последовательных приближений Пикара, вычислим с точностью $o(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$, движение системы (1.1) при $u_\mu^{(0)}(\cdot)$, $z_0^{(0)}$:

$$z(t; u_\mu^{(0)}(\cdot), z_0^{(0)}) = Z[t, t_0; \mu] z_0^{(0)} + \int_{t_0}^{t} Z[t, \tau; \mu] B(\tau, \mu) u_\mu^{(0)}(\tau) d\tau +$$

$$+ \mu \int_{t_0}^{t} Z[t, \tau; \mu] f(\tau, z_{(0)}(\tau; u_\mu^{(0)}(\cdot), z_0^{(0)})) d\tau. \qquad (3.3)$$

Составим вдоль движения (3.3) систему уравнений в вариациях

$$\frac{d\delta z}{dt} = \left(A(t, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial z} f(t, z_{(0)}(t; u_\mu^{(0)}(\cdot), z_0^{(0)})) \right) \delta z + B(t, \mu) \delta u \qquad (3.4)$$

с начальным условием $\delta z(t_0)=z_0-z_0^{(0)}$, $z_0\in\mathscr{X}_0$. Здесь δz есть отклонения от движения (3.3), вызванные вариацией δu управления $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ и начального условия $z_0^{(0)}$. Пусть $H^{(0)}[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (3.4) (при $\delta u\equiv 0$). Для всех τ, t из $[t_0, t_1]$, $0<\mu\leqslant\mu_0$, справедлива оценка $\|H^{(0)}[t,\tau]-Z[t,\tau;\mu]\|\leqslant\mu N$, N — некоторая положительная постоянная.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: среди всех $u=u(\cdot)\in P(\cdot)$ найти такое $u_*=u_*(\cdot,\mu)$, доставляющее минимум

$$\varepsilon_*(t_1,\mu)=J_*(u_*(\cdot))=\min_{u(\cdot)\in P(\cdot)} J_*(u(\cdot)),\quad J_*(u(\cdot))=\max_{z_0\in\mathscr{X}_0}\varphi(z_*(t_1;u,z_0)),\tag{3.5}$$

где

$$z_*(t_1;u,z_0)=z(t_1;u_\mu^{(0)}(\cdot),z_0^{(0)})+H^{(0)}[t_1,t_0](z_0-z_0^{(0)})+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}H^{(0)}[t_1,\tau]B(\tau,\mu)(u(\tau)-u_\mu^{(0)}(\tau))d\tau,\quad u=u(\cdot)\in P(\cdot).$$

Решение задачи (3.5) описывается соотношениями:

$$\varepsilon_*(t_1,\mu)=\max\{\varkappa_*(l;\mu)\,|\,l\in R^{n+m}\}=\varkappa_*(l_*;\mu),$$
$$\varkappa_*(l;\mu)=-h^{**}(l,\mu)-\int_{t_0}^{t_1}\rho(-l'H^{(0)}[t_1,\tau]B(\tau,\mu)\,|\,P(\tau))d\tau,$$
$$h(l,\mu)=\varphi^*(l)-\rho(l'H^{(0)}[t_1,t_0]\,|\,\mathscr{X}_0)-\mu\int_{t_0}^{t_1}l'Z[t_1,\tau;\mu]\times$$
$$\times f(\tau,z_{(0)}(\tau;u_\mu^{(0)}(\cdot),z_0^{(0)}))d\tau-l'(Z[t_1,t_0;\mu]-H^{(0)}[t_1,t_0])z_0^{(0)}-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}l'(Z[t_1,\tau]-H^{(0)}[t_1,\tau])B(\tau,\mu)u_\mu^{(0)}(\tau)d\tau,$$

причем управление $u_*=u_*(\cdot,\mu)$ удовлетворяет условию минимума: для почти всех $\tau\in T$

$$l_*'H^{(0)}[t_1,\tau]B(\tau,\mu)u_*(\tau,\mu)=\min_{u(\tau)\in P(\tau)} l_*'H^{(0)}[t_1,\tau]B(\tau,\mu)u(\tau).$$

Пусть $\varepsilon^{(1)}(t_1)$ есть следующая величина:

$$\varepsilon^{(1)}(t_1)=\max\{\varkappa^{(1)}(p,q;\mu)\,|\,p\in R^n,\ q\in R^m\}=\varkappa^{(1)}(p^{(1)},q^{(1)};\mu),\tag{3.6}$$
$$\varkappa^{(1)}(p,q;\mu)=-h_1^{**}(p,q)-\int_{t_0}^{t_1-\alpha_1}\rho(-r_1^{(1)}(\tau,t_1;p,q,\mu)\,|\,P(\tau))d\tau-$$
$$-\int_0^{\alpha_1/\mu}\rho(-r_2^{(1)}(s,t_1;p,q,\mu)\,|\,V(s))ds,\quad V(s)=P(t_1-\mu s);$$
$$h_1(p,q)=\varphi^*(p,q)-\rho\Big((p'Z_{11}^{(1)}[t_1,t_0;\mu]+\int_0^{\alpha_1/\mu}q'\Phi[t_1,s;\mu]\times$$
$$\times A_{21}(t_1-\mu s)Z_{11}^{(1)}[t_1-\mu s,t_0;\mu]ds-\mu\psi(t_0,t_1;p,q))\,|\,\mathscr{X}_0\Big)-$$
$$-\rho(s'(t_1;p,q)Z_{12}^{(0)}[t_1,t_0;\mu]\,|\,\mathscr{Y}_0)-\int_{t_0}^{t_1}s'(t_1;p,q)(\mu X_0[t_1,\tau]\times$$
$$\times f_1(\tau,z_{(0)}(\tau;u_\mu^{(0)},z_0^{(0)}))+Z_{12}^{(0)}[t_1,\tau;\mu]f_2(\tau,z_{(0)}(\tau;u_\mu^{(0)},z_0^{(0)})))d\tau-$$
$$-\mu\int_0^{\alpha_1/\mu}q'\Phi[t_1,s;\mu]f_2(t_1-\mu s,z_{(0)}(t_1-\mu s;u_\mu^{(0)},z_0^{(0)}))ds+$$

$$+\mu\left(\psi(t_0, t_1; p, q)x_0^{(0)}+\int_{t_0}^{t_1}\psi(\tau, t_1; p, q)B_0(\tau)u_\mu^{(0)}(\tau)d\tau\right)-$$

$$-\mu\int_{t_0}^{t_1}s'(t_1; p, q)X_0[t_1, \tau]\,(A_{12}^{(0)}(\tau)-A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)A_{22}^{(0)}(\tau))\times$$

$$\times A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)u_\mu^{(0)}(\tau)d\tau+\mu\int_0^{\alpha_1/\mu}\int_0^s q'\Phi[t_1, \sigma; \mu]A_{22}^{(0)}(t_1)\Phi[t_1-$$

$$-\mu\sigma, s; \mu]\,d\sigma B_2(t_1)v^{(0)}(s)ds,$$

$$\psi(\tau, t_1; p, q)=\int_\tau^{t_1}s'(t_1; p, q)X_0[t_1, s]A_0^{(0)}(s)X_0[s, \tau]ds-$$

$$-q'A_{22}^{-1}(t_1)\,(A_{21}^{(0)}(t_1)-A_{22}^{(0)}(t_1)A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1))X_0[t_1, \tau],$$

$$\Phi[t_1, s; \mu]=Y[t_1, t_1-\mu s; \mu],$$

$$A_{i1}^{(0)}(t)=\frac{\partial}{\partial x}f_i(t, z_{(0)}(t; u_\mu^{(0)}, z_0^{(0)})),\ A_{i2}^{(0)}(t)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}f_i(t, z_{(0)}(t; u_\mu^{(0)}, z_0^{(0)})),\ i=1, 2,$$

$$A_0^{(0)}(t)=A_{11}^{(0)}(t)-A_{12}^{(0)}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)-A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}^{(0)}(t)+$$

$$+A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{22}^{(0)}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t),$$

вектор-функции $r_i^{(1)}(\tau, t_1; p, q, \mu)$ имеют следующий вид:

$$r_1^{(1)}(\tau, t_1; p, q, \mu)=\Big(p'Z_{11}^{(1)}[t_1, \tau; \mu]+\int_0^{\alpha_1/\mu}q'\Phi[t_1, s; \mu]A_{21}(t_1-$$

$$-\mu s)Z_{11}^{(1)}[t_1-\mu s, \tau; \mu]ds+\mu\psi(\tau, t_1; p, q)\Big)\,B_0(\tau)-\bigg(\frac{d}{d\tau}\big(p'Z_{12}^{(0)}[t_1, \tau; \mu]+$$

$$+\int_0^{\alpha_1/\mu}q'\Phi[t_1, s; \mu]A_{21}[t_1-\mu s]Z_{12}^{(0)}[t_1-\mu s, \tau; \mu]ds\big)+$$

$$+\mu s'(t_1; p, \rho)X_0[t_1, \tau]\,(A_{12}^{(0)}(\tau)-A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)A_{22}^{(0)}(\tau))\bigg)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),$$

$$t_0\leqslant\tau\leqslant t_1-\alpha_1(\mu),$$

$$r_2^{(1)}(s, t_1; p, q, \mu)=(q'\Phi[t_1, s; \mu]+\mu(p'A_{12}(t_1)A_{22}^{-1}(t_1)\Phi[t_1, s; \mu]+$$

$$+\int_0^s q'\Phi[t_1, \sigma; \mu]\,(A_{22}^{(0)}(t_1-\mu\sigma)+A_{21}(t_1-\mu\sigma)A_{12}(t_1-\mu\sigma)\times$$

$$\times A_{22}^{-1}(t_1-\mu\sigma))\Phi[t_1-\mu\sigma, s; \mu]d\sigma))B_2(t_1-\mu s)+\mu\big(p'+$$

$$+\int_0^s q'\Phi[t_1, \sigma; \mu]A_{21}(t_1-\mu\sigma)X_0[t_1-\mu\sigma, t_1]d\sigma\big)\,X_0[t_1, t_1-$$

$$-\mu s]B_0(t_1-\mu s),\ 0\leqslant s<\alpha_1/\mu,$$

$\alpha_1=\alpha_1(\mu)$ обладает теми же свойствами, что $\alpha(\mu)$, и при этом для $\tau\in[t_0, t_1-\alpha_1(\mu)]$ выполняется оценка $\|Y[t_1, \tau; \mu]\|\leqslant\mu^3N_0$, $N_0=\mathrm{const}>$ >0. В условиях предположения 3.1 существует ненулевой вектор $l^{(1)\prime}=(p^{(1)\prime}, q^{(1)\prime})$, доставляющий максимум в (3.6), и при $0<\mu\leqslant\mu_0$ выполняется $l_*=l^{(1)}+o(\mu)$. На основании теоремы 3.1 [5], леммы 1.2 [10] имеет место

Теорема 3.1. *При* $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 *достаточно мало, справедливо равенство* $\varepsilon_*(t_1, \mu)=\varepsilon^{(1)}(t_1)+o(\mu)$.

Пусть управление $u_\mu^{(1)}(\tau,\mu)$ имеет следующий вид:

$$u_\mu^{(1)}(\tau,\mu)=\begin{cases} u^{(1)}(\tau,\mu), & t_0\leqslant\tau\leqslant t_1-\alpha_1(\mu),\\ v^{(1)}((t_1-\tau)/\mu,\mu), & t_1-\alpha_1(\mu)<\tau\leqslant t_1,\end{cases}\tag{3.7}$$

где $u^{(1)}(\tau,\mu)$, $v^{(1)}(s,\mu)$ определяются условиями: для почти всех $\tau\in[t_0,t_1-\alpha_1(\mu)]$, $s\in[0,\alpha_1(\mu)/\mu)$

$$r_1^{(1)}(\tau,t_1;p^{(1)},q^{(1)},\mu)u^{(1)}(\tau,\mu)=\min_{u(\tau)\in P(\tau)} r_1^{(1)}(\tau,t_1;p^{(1)},q^{(1)},\mu)u(\tau),$$

$$r_2^{(1)}(s,t_1;p^{(1)},q^{(1)},\mu)v^{(1)}(s,\mu)=\min_{v(s)\in V(s)} r_2^{(1)}(s,t_1;p^{(1)},q^{(1)},\mu)v(s).$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия предположений 2.1, 3.1. Тогда при* $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 *достаточно мало, справедливы равенства:*

i) $\varepsilon_*(t_1,\mu)=J_*(u_*(\cdot))=J_*(u_\mu^{(1)}(\cdot))+o(\mu)$;

ii) $\varepsilon^0(t_1,\mu)=\varepsilon_*(t_1,\mu)+o(\mu)$, $\varepsilon^0(t_1,\mu)=J(u_\mu^{(1)}(\cdot))+o(\mu)$.

Обозначим $z_0^{(1)}=(x_0^{(1)\prime},y_0^{(0)\prime})'$ вектор, максимизирующий (3.5) при $u_\mu^{(1)}(\cdot)$.

4. Реализация итерационной схемы [4] для сингулярно возмущенной системы (1.1) приводит на очередном k-м шаге к вспомогательной задаче (3.5) с функцией $z_*(t_1;u,z_0)$ следующего вида:

$$z_*(t_1;u,z_0)=z(t_1;u_\mu^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)})+H^{(k-1)}[t_1,t_0](z_0-z_0^{(k-1)})+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}H^{(k-1)}[t_1,\tau]B(\tau,\mu)(u(\tau)-u_\mu^{(k-1)}(\tau))d\tau,\tag{4.1}$$

где $H^{(k-1)}[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы уравнений в вариациях (при $\delta u\equiv0$), составленной вдоль движения $z(t;u_\mu^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)})$:

$$\frac{d\delta z}{dt}=\left(A(t,\mu)+\mu\frac{\partial}{\partial z}f(t,z(t;u_\mu^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)}))\right)\delta z+B(t,\mu)\delta u\tag{4.2}$$

с начальным условием $\delta z(t_0)=z_0-z_0^{(k-1)}$, $z_0\in\mathcal{X}_0$. На предыдущих шагах процедуры находятся управления $u_\mu^{(s)}(\cdot)$, векторы $z_0^{(s)}$, $l^{(s)}$ и величины $\varepsilon^{(s)}(t_1)$ $(s=0,1,\ldots,k-1)$, причем $z_0^{(s)}$ доставляет максимум по $z_0\in\mathcal{X}_0$ в (3.5) на s-м шаге.

Используя теорему 6 [6], для вспомогательной задачи (3.5) (при $z_*(t_1;u,z_0)$ (4.1)) на текущей итерации построим управление $u_\mu^{(k)}(\cdot)$, удовлетворяющее

$$\int_{t_0}^{t_1}l^{(k)\prime}H^{(k-1)}[t_1,\tau]B(\tau,\mu)u_\mu^{(k)}(\tau)d\tau=\min_{u(\tau)\in P(\tau)}\int_{t_0}^{t_1}l^{(k)\prime}H^{(k-1)}[t_1,\tau]B(\tau,\mu)u(\tau)d\tau,$$

представимое в виде

$$u_\mu^{(k)}(\tau)=\begin{cases} u^{(k)}(\tau,\mu), & t_0\leqslant\tau\leqslant t_1-\alpha_1(\mu),\\ v^{(k)}((t_1-\tau)/\mu,\mu), & t_1-\alpha_1(\mu)<\tau\leqslant t_1,\end{cases}$$

и доставляющее оценку для вспомогательной задачи $\varepsilon_*(t_1,\mu)=$ $=\varepsilon^{(k)}(t_1)+O(\mu^{k+1})$, причем $u^{(k)}(\cdot,\mu)$, $v^{(k)}(\cdot,\mu)$ определяются условиями: для почти всех $\tau\in[t_0,t_1-\alpha_1(\mu)]$, $s\in[0,\alpha_1(\mu)/\mu)$

$$r_1^{(k)}(\tau,t_1;p^{(k)},q^{(k)},\mu)u^{(k)}(\tau,\mu)=\min_{u(\tau)\in P(\tau)} r_1^{(k)}(\tau,t_1;p^{(k)},q^{(k)},\mu)u(\tau),$$

$$r_2^{(k)}(s,t_1;p^{(k)},q^{(k)},\mu)v^{(k)}(s,\mu)=\min_{v(s)\in V(s)} r_2^{(k)}(s,t_1;p^{(k)},q^{(k)},\mu)v(s),$$

где $l^{(k)\prime}=(p^{(k)\prime},q^{(k)\prime})$ — максимизирующий вектор в выражении

$$\varepsilon^{(k)}(t_1)=\max\{\varkappa^{(k)}(p,q;\mu)\,|\,p\in R^n,q\in R^m\}=\varkappa^{(k)}(p^{(k)},q^{(k)};\mu),$$

$$\varkappa^{(k)}(p, q; \mu) = -h^{**}_{(k)}(p, q) - \int_{t_0}^{t_1-\alpha_1} \rho(-r_1^{(k)}(\tau, t_1; p, q, \mu) | P(\tau)) d\tau -$$

$$- \int_0^{\alpha_1/\mu} \rho(-r_2^{(k)}(s, t_1; p, q, \mu) | V(s)) ds,$$

$$h_{(k)}(p, q) = \varphi^*(p, q) + l'(H^{(k-1)}[t_1, t_0] - Z[t_1, t_0; \mu]) z_0^{(k-1)} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} l'(H^{(k-1)}[t_1, \tau] - Z[t_1, \tau; \mu]) B(\tau, \mu) u_\mu^{(k-1)}(\tau) d\tau -$$

$$- \mu \int_{t_0}^{t_1} l' Z[t_1, \tau; \mu] f(\tau, z(\tau; u_\mu^{(k-1)}(\cdot), z_0^{(k-1)})) d\tau - \rho(p' H_{11}^{(k-1)}[t_1, t_0] +$$

$$+ q' H_{21}^{(k-1)}[t_1, t_0] | \mathscr{X}_0) - \rho(p' H_{12}^{(k-1)}[t_1, t_0] + q' H_{22}^{(k-1)}[t_1, t_0] | \mathscr{Y}_0);$$

здесь $l' = (p', q')$; $H_{ij}^{(k-1)}[t, \tau]$, $i, j = 1, 2$,— соответствующие блоки матрицы $H^{(k-1)}[t, \tau]$, последовательные приближения которых могут быть вычислены с необходимой точностью из рекуррентных формул, подобных (2.1), но составленных для системы (4.2); функции $r_i^{(k)}(\tau, t_1; p, q, \mu)$, $i = 1, 2$, определяются аналогично (21) в [6]:

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1; p, q, \mu) = (p' H_{11}^{(k-1)}[t_1, \tau] + q' H_{21}^{(k-1)}[t_1, \tau]) B_0^{(k)}(\tau) +$$

$$+ \frac{1}{\mu} q' Y^{(k-1)}[t_1, \tau] B_2(\tau) - \frac{d}{d\tau}\Big(p' H_{12}^{(k-1)}[t_1, \tau] +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \int_\tau^{t_1} q' Y^{(k-1)}[t_1, s] \tilde{A}_{21}^{(k-1)}(s) H_{12}^{(k-1)}[s, \tau] ds\Big) (\tilde{A}_{22}^{(k-1)}(\tau))^{-1} B_2(\tau),$$

$$t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1 - \alpha_1(\mu),$$

$$r_2^{(k)}(s, t_1; p, q, \mu) = \mu r_1^{(k)}(t_1 - \mu s, t_1; p, q, \mu), \quad 0 \leqslant s < \alpha_1(\mu)/\mu,$$

$$B_0^{(k)}(t) = B_1(t) - \tilde{A}_{12}^{(k-1)}(t) (\tilde{A}_{22}^{(k-1)}(t))^{-1} B_2(t); \quad \tilde{A}_{ij}^{(k-1)}(t) = A_{ij}(t) + \mu A_{ij}^{(k-1)}(t),$$

$$A_{i1}^{(k-1)}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f_i(t, z(t; u_\mu^{(k-1)}(\cdot), z_0^{(k-1)})), \quad A_{i2}^{(k-1)}(t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} f_i(t, z(t; u_\mu^{(k-1)}(\cdot), z_0^{(k-1)})), \quad i, j = 1, 2,$$

$Y^{(k-1)}[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений ($Y^{(k-1)}[\tau, \tau] = E$) системы $\mu \dot{y} = \tilde{A}_{22}^{(k-1)}(t) y$.

Сходимость описанной итерационной процедуры может гарантироваться различными условиями. Это достигается, в частности, при следующих ограничениях.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 3.1, причем* $\mathscr{X}_0$, $\mathscr{Y}_0$, $P(\tau)$, $\tau \in T$,— *локально сильно выпуклые множества в точках* $x_0^{(0)}$, $y_0^{(0)}$, $u^{(0)}(\tau)$ *соответственно, а* $P(t_1)$ — *в точках* $v^{(0)}(s)$, $s \geqslant 0$, *с коэффициентами выпуклости, не зависящими от* μ. *Тогда имеет место равномерная по* μ (*в области* $0 < \mu \leqslant \mu_0$) *сходимость по соответствующим нормам* $u_\mu^{(k)}(\cdot) \to u_\mu^0(\cdot) \in \mathscr{P}$, $l^{(k)} \to l^0$, $z_0^{(k)} \to z_0^0 \in \mathscr{X}_0$, $H^{(k)}[t, \tau] \to H^0[t, \tau]$, $\varepsilon^{(k)}(t_1) \to \varepsilon^0$, *причем справедливы утверждения:*

i) *функция* $u_\mu^0(t) \in P(t)$, $t \in T$, *удовлетворяет условию минимума*

$$\int_{t_0}^{t_1} l^{0\prime} H^0[t_1, \tau] B(\tau, \mu) u_\mu^0(\tau) d\tau = \min_{u(\tau) \in P(\tau)} \int_{t_0}^{t_1} l^{0\prime} H^0[t_1, \tau] B(\tau, \mu) u(\tau) d\tau; \tag{4.3}$$

ii) для векторов z_0^0, l^0 *выполняются равенства*

$$\varepsilon^0=\varphi(z(t_1;u_\mu^0(\cdot),z_0^0))=\max\{\varphi(z(t_1;u_\mu^0(\cdot),z_0^0))+ \\ +H^0[t_1,t_0](z_0-z_0^0)\,|\,z_0\in\mathscr{X}_0\}=l^{0\prime}z(t_1;u_\mu^0(\cdot),z_0^0)-\varphi^*(l^0). \tag{4.4}$$

iii) $H^0[t,\tau]$ *есть фундаментальная матрица решений системы (1.4) при* $u^0(\cdot)\equiv u_\mu^0(\cdot)$, $\xi^0=z_0^0$.

Если $\mathscr{X}\subset R^n$ есть некоторое компактное, локально сильно выпуклое множество в точке $z^*\in\mathscr{X}$, то справедливо свойство: существует окрестность $\mathscr{A}(z^*)$ и постоянная $L>0$, что для любых $l\in N_{z^*}(\mathscr{X})$ выполняется неравенство

$$l'(z-z^*)\leqslant -L\|l\|\,\|z-z^*\|^2 \text{ для всех } z\in\mathscr{A}(z^*)\cap\mathscr{X}, \tag{4.5}$$

где $N_{z^*}(\mathscr{X})$ — нормальный конус в точке z^* к множеству $\mathscr{X}$.

Пусть $u^*(\cdot)=u_\mu^0(\cdot)+w(\cdot)$, где $w(\cdot)$ — произвольная вариация управления (при $u^*(\cdot)\in P(\cdot)$), доставляет значение $\varepsilon^*(t_1)$ функционалу (1.2): $\varepsilon^*(t_1)=J(u^*(\cdot))$.

Предположение 4.1. *i) Существуют окрестность* $\mathscr{A}(z_0^0)\subset R^{n+m}$ *и постоянные* $N_1>0$, $N_2>0$, *не зависящие от* μ, *что для любых* $z_0\in\in\mathscr{A}(z_0^0)\cap\mathscr{X}_0$ *при* $0<\mu\leqslant\mu_0$ *выполняется неравенство*

$$l^{0\prime}H^0[t_1,t_0](z_0-z_0^0)\leqslant -N_1\|x_0-x_0^0\|^2-\mu N_2\|y_0-y_0^0\|^2, \tag{4.6}$$

где $z_0^{0\prime}=(x_0^{0\prime},\ y_0^{0\prime})$, $z_0'=(x_0',y_0')$;

ii) существуют окрестность $\mathscr{B}(u_\mu^0(\cdot))\subset L_2^r(T)$ *и постоянная* $N_3>0$, *не зависящие от* μ, *что для любых* $w(\cdot)=u^*(\cdot)-u_\mu^0(\cdot)$, $u^*(\cdot)\in\in\mathscr{B}(u_\mu^0(\cdot))\cap\mathscr{P}$ *при* $0<\mu\leqslant\mu_0$ *выполняется неравенство*

$$\alpha(w(\cdot))\equiv\int_{t_0}^{t_1} l^{0\prime}H^0[t_1,\tau]B(\tau,\mu)w(\tau)d\tau\geqslant N_3\int_{t_0}^{t_1}\|w(\tau)\|^2d\tau. \tag{4.7}$$

Используя формулу Тейлора, получим для любых $u^*(\cdot)\in P(\cdot)$, $z_0\in\mathscr{X}_0$, $t\in T$

$$\Delta z(t)\equiv z(t;u^*(\cdot),z_0)-z(t;u_\mu^0(\cdot),z_0^0)=H^0[t,t_0](z_0-z_0^0)+ \\ +\int_{t_0}^{t}H^0[t,\tau]B(\tau,\mu)(u^*(\tau)-u_\mu^0(\tau))d\tau+ \\ +\frac{1}{2}\mu\int_{t_0}^{t}H^0[t,\tau]\sum_{i,j=1}^{n+m}\frac{\partial^2 f(\tau,z_\vartheta(\tau))}{\partial z_i\partial z_j}\Delta z_i(\tau)\Delta z_j(\tau)d\tau,$$

$$z_\vartheta(\tau)=z(\tau;u_\mu^0(\cdot),z_0^0)+\vartheta(\tau)\Delta z(\tau),\ 0\leqslant\vartheta(\tau)\leqslant 1,\ \tau\in T, \\ \Delta z(t)=(\Delta z_1(t),\ldots,\Delta z_{n+m}(t)).$$

Тогда (с учетом (4.4)) справедливо

$$\varepsilon^*(t_1)-\varepsilon^0\geqslant l^{0\prime}(z(t_1;u^*(\cdot),z_0^0)-z(t_1;u_\mu^0(\cdot),z_0^0))= \\ =\alpha(w(\cdot))+\beta(\mu,w(\cdot))', \tag{4.8}$$

причем существуют постоянные $L_1>0$, $L_2>0$, что для $0<\mu\leqslant\mu_0$

$$|\beta(\mu,w(\cdot))|\leqslant\mu L_1\int_{t_0}^{t_1}\|\Delta z(\tau;u^*(\cdot),z_0^0)\|^2d\tau\leqslant\mu L_2\int_{t_0}^{t_1}\|w(\tau)\|^2d\tau. \tag{4.9}$$

Теорема 4.2. *Пусть при* $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 *достаточно мало, выполнены условия предположения 4.1, причем*

i) управление $u_\mu^0(\cdot)\in\mathscr{P}$ *удовлетворяет (4.5);*

ii) векторы z_0^0, l^0 в (4.4) есть единственное решение, доставляющее

$$\varepsilon^0 = J(u_\mu^0(\cdot)) = \max_{z_0} \max_{l} \{ l'z(t_1; u_\mu^0(\cdot), z_0) - \varphi^*(l) \,|\, z_0 \in \mathscr{X}_0,\ l \in R^{n+m} \}.$$

Тогда движение $z(t; u_\mu^0(\cdot), z_0^0)$, $t \in T$, является локально минимаксным равномерно по μ [4].

Доказательство следует из оценок (4.6) — (4.9).

Теорема 4.3. *Пусть выполнены предположения 2.1, 3.1. Тогда*

i) функция $u_\mu^0(\cdot)$ (4.3) удовлетворяет теореме 2.1, причем $v^0(s, \mu) = u_\mu^0(t_1 - \mu s)$, $0 \leqslant s < \alpha_1(\mu)/\mu$; $u_{k_j}^0(\cdot)$, $v_{k_j}^0(\cdot)$ определяются при $\mu = \mu_{k_j}$ соответственно для $u_\mu^0(\cdot)$, $v^0(\cdot, \mu)$;

ii) последовательность $z_{k_j}^0(t) = z(t; u_{k_j}^0(\cdot), z_{k_j}^0)$ при $k_j \to \infty$ сходится к $\tilde{z}(t; u^{(0)}(\cdot), v^{(0)}(\cdot), x_0^{(0)})$ (2.2) для каждого $t \in T$, где (при $\mu = \mu_{k_j}$) $z_{k_j}^0 = z_0^0 \to z_0^{(0)} = (x_0^{(0)\prime}, y_0^{(0)\prime})' \in \mathscr{X}_0$, $\tilde{z}(t_0; u^{(0)}(\cdot), v^{(0)}(\cdot), x_0^{(0)}) = z_0^{(0)}$;

iii) функция $z_{(0)}(\cdot; u_\mu^{(0)}(\cdot), z_0^{(0)})$ (3.2), $z_0^{(0)} = (x_0^{(0)\prime}, y_0^{(0)\prime})'$, является равномерным асимптотическим представлением на T движения $z^0(\cdot; u_\mu^0(\cdot), z_0^0)$ системы (1.1) при $0 < \mu \leqslant \mu_0$: $\| z^0(\cdot; u_\mu^0(\cdot), z_0^0) - z_{(0)}(\cdot; u_\mu^{(0)}(\cdot), z_0^{(0)}) \| = o(1)$.

Для доказательства используются оценки (2.8), (2.9), свойства седловой точки $(p^{(0)}, q^{(0)}, u^{(0)}(\cdot), v^{(0)}(\cdot))$ для функции

$$L_{(0)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = h_0^{**}(p, q) + \int_{t_0}^{t_1} s'(t_1; p, q) X_0[t_1, \tau] B_0(\tau) u(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty q' \Phi_0[t_1, s] B_2(t_1) v(s) ds.$$

Из теорем 2.1, 4.2, 4.3, оптимальности $u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}(\cdot)$ (в задаче 2.1) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия предположений 2.1, 3.1, теоремы 4.2. Тогда при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ управление $u_\mu^0(\cdot)$ (4.5) является оптимальным в задаче 1.1, доставляющим значение $\varepsilon^0(t_1, \mu) = \varepsilon^0$.*

Если выполнены условия теоремы 4.1, то на основании свойства (4.5) имеет место предположение 4.1, и, следовательно, описанный выше итерационный процесс в соответствии с теоремой 4.4 определяет оптимальное решение задачи 1.1.

5. Рассмотрим следующий пример: управляемая система описывается уравнениями $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$

$$\dot{x} = x + y_1 + \mu(x^2 + y_1^2) + b_1 u, \quad \mu \dot{y}_1 = -x - y_1 + \mu x^2 + b_2 u, \quad \mu \dot{y}_2 = -2y_2 + b_3 u, \tag{5.1}$$

где $b_i = b_i(t)$, $i = 1, 2, 3$,— заданные непрерывные функции; $u = u(t)$ удовлетворяет ограничению $|u(t)| \leqslant \lambda$, $\lambda = \text{const} > 0$; целевая функция $\varphi(z) = \|z\|$, $z = (x, y_1, y_2)$. Множества начальных состояний: $\mathscr{X}_0$ — отрезок $|x_0 - d| \leqslant \nu_0$, $\nu_0 = \text{const} > 0$, $d = \text{const}$, $x_0 \in R$; $\mathscr{Y}_0$ — круг $\|y_0 - c\| \leqslant \nu_1$, $\nu_1 = \text{const} > 0$, $c = (c_1, c_2) \in R^2$, $y_0 \in R^2$, c — постоянный вектор.

В работе [6] приведены решения вырожденной и предельной задач для системы (5.1), а также начальное приближение решения задачи 1.1 для однородной системы (вида (1.7)). Вводя обозначения $|d| + \nu_0 - \lambda \int_{t_0}^{t_1} |b_0(t)| dt = \lambda m$, $b_0(t) = b_1(t) + b_2(t)$ и полагая $b_2(t_1) = 2$, $b_3(t_1) = 4$, получим при ограничении $m > 4$ (на основании предположения 2.1) для задачи 2.1

$$\varepsilon^{(0)}(t_1)=\max_{\|l\|\leqslant 1}\Big(-h_0^{**}(p,q_1,q_2)-\lambda|p-q_1|\int_{t_0}^{t_1}|b_0(\tau)|d\tau-\lambda|q_1b_2(t_1)+$$

$$+\frac{1}{2}q_2b_3(t_1)+q_1^2b_2^2(t_1)q_2^{-1}b_3^{-1}(t_1)|\Big),\quad l=(p,q_1,q_2), \tag{5.2}$$

$$h_0(p,q_1,q_2)=-(p-q_1)d-|p-q_1|\nu_0.$$

После вычислений имеем

$$u_\mu^{(0)}(t)=\begin{cases}u^{(0)}(t)=-\lambda\operatorname{sgn}(db_0(t)), & t_0\leqslant t\leqslant t_1-\alpha(\mu),\\ v^{(0)}((t_1-t)/\mu)=\begin{cases}\lambda\operatorname{sgn}(db_0(t_1)), & t_1-\alpha(\mu)<t\leqslant t_1-\mu s_{(0)},\\ \lambda\operatorname{sgn}(d((m+2)^{1/3}-2)), & t_1-\mu s_{(0)}<t\leqslant t_1;\end{cases}\end{cases}$$

$$\varepsilon^{(0)}(t_1)=\lambda\rho^{(0)},\quad \rho^{(0)}=(2m^2+4m+8-3(m+2)^{4/3})^{1/2},$$

где $s_{(0)}=\ln(2(m+2)^{-1/3})$ есть значение s_0 при $l=l^{(0)}$, $s_0=\ln(-q_2b_3(t_1)\times\times q_1^{-1}b_2^{-1}(t_1))$, причем для $4<m<6$ будет $s_{(0)}>0$, т. е. $v^{(0)}(\cdot)$ имеет точку переключения на $(t_1-\alpha(\mu),t_1]$. В качестве $\alpha(\mu)$ можно взять $\alpha(\mu)=\sqrt{\mu}$ или $\alpha(\mu)=-\mu\ln\mu$. Максимизирующие $l^{(0)}$ (в (5.2)) и $x_0^{(0)}$ (в (3.1)) есть:

$$l^{(0)}=(p^{(0)},q_1^{(0)},q_2^{(0)})=(\rho^{(0)})^{-1}\operatorname{sgn}(d)\,(m,2(m+2)^{1/3}-m-2,$$
$$(m+2)^{2/3}-2),\quad x_0^{(0)}=d+\nu_0\operatorname{sgn}(d).$$

Построим теперь управление $u_\mu^{(1)}(\cdot,\mu)$ (3.7), доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1,\mu)=J(u^0(\cdot))$ исходной системе (в задаче 1.1) с точностью $o(\mu)$. Решая вспомогательную задачу (3.5), получим (используя соотношения (3.6))

$$\varepsilon^{(1)}(t_1,\mu)=\max_{\|l\|\leqslant 1}\Big(-h_1^{**}(p,q_1,q_2)-\lambda\int_{t_0}^{t_1-\alpha_1}|r_1^{(1)}(\tau,t_1;p,q,\mu)|d\tau-$$

$$-\lambda|q_1b_2+\frac{1}{2}q_2b_3+q_1^2b_2^2q_2^{-1}b_3^{-1}-\alpha_1(p-q_1)b_0-\mu((p-q_1)\times$$

$$\times(b_2-2b_0s_1)-q_1b_0+2q_1b_2q_2^{-1}b_3^{-1}(pb_2-q_1b_0-q_1b_2(1+s_1))))|\Big), \tag{5.3}$$

$$h_1(p,q_1,q_2)=h_0(p,q_1,q_2)-\mu(p-q_1)(d(1-2\eta_3(t_0))+c_1+2\eta_1)+$$
$$+2\mu q_1(x_{(0)}(t_1)(d+\nu_0\operatorname{sgn}(p-q_1))+\eta_2)-\mu\nu_1,$$

$$r_1^{(1)}(\tau,t_1;p,q,\mu)=((p-q_1)(1+\mu+2\mu\eta_3(\tau))+2\mu q_1x_{(0)}(t_1))b_0(\tau)+$$
$$+2\mu(p-q_1)y_1(\tau)b_2(\tau),$$

где $b_i=b_i(t_1)$; $x_{(0)}(\tau)$, $y_1(\tau)$, $y_2(\tau)$ — компоненты траектории (3.2);

$$\eta_1=\int_{t_0}^{t_1}\Big(x_{(0)}^2(\tau)+\frac{1}{2}y_1^2(\tau)\Big)d\tau-x_0^{(0)}\eta_3(t_0)-\int_{t_0}^{t_1}\eta_3(\tau)b_0(\tau)u_\mu^{(0)}(\tau)d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}y_1(\tau)b_2(\tau)u_\mu^{(0)}(\tau)d\tau,$$

$$\eta_2=x_{(0)}(t_1)\Big(x_0^{(0)}+\int_{t_0}^{t_1}b_0(\tau)u_\mu^{(0)}(\tau)d\tau\Big)-\frac{1}{2}\int_0^{\alpha_1/\mu}e^{-s}x_{(0)}^2(t_1-\mu s)ds,$$

$$\eta_3(t)=\int_t^{t_1}(2x_{(0)}(\tau)-y_1(\tau))d\tau,$$

$$s_1 = -\ln(-q_1 b_2 (q_2 b_3)^{-1} + \mu\beta), \ \beta = \beta_0 (1 + \mu (A + \beta_0) q_2 b_3 (q_1 b_2)^{-1}),$$

$$\beta_0 = (p - q_1) b_0 q_2 b_3 (q_1 b_2)^{-1} - A, \ A = q_1 b_0 - (p - q_1 s_0) b_2;$$

здесь предполагается (для упрощения вычислений), что при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ $b_i(t_1 - \mu s) = b_i(t_1) + o(\mu)$, $0 \leqslant s \leqslant \alpha_1/\mu$. Тогда управление $u_\mu^{(1)}(\cdot, \mu)$ (3.7) определяется функциями

$$u^{(1)}(\tau, \mu) = -\lambda \operatorname{sgn}(r_1^{(1)}(\tau, t_1; p^{(1)}, q^{(1)}, \mu)), \ t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1 - \alpha_1,$$

$$v^{(1)}((t_1 - \tau)/\mu, \mu) = \begin{cases} \lambda \operatorname{sgn}(d b_0), & t_1 - \alpha_1 < \tau \leqslant t_1 - \mu s_{(1)}, \\ \lambda \operatorname{sgn}(d((m+2)^{1/3} - 2)), & t_1 - \mu s_{(1)} < \tau \leqslant t_1, \end{cases}$$

где $s_{(1)}$ есть значение s_1 при $l = l^{(1)} = (p^{(1)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$, максимизирующем (5.3), причем предполагается, что $b_0 \neq 0$, $s_{(0)} > 0$ (и не зависят от μ).

Литература

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., 1968.
2. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
3. Альбрехт Э. Г. // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 3. С. 430—442.
4. Кремлёв А. Г. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1967—1979.
5. Кремлёв А. Г. Об оптимальном управлении сингулярно возмущенной системой. Свердловск, 1991. Деп. в ВИНИТИ 23.05.91, № 2119—В91.
6. Кремлёв А. Г. // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61—78.
7. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М., 1973.
8. Ананьина Т. Ф. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 4. С. 612—620.
9. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
10. Кремлёв А. Г. Минимаксная задача управления сингулярно возмущенной системой. Екатеринбург, 1991. Деп. в ВИНИТИ 12.12.91, № 4606—В91.

Уральский государственный университет им. А. М. Горького, г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 28 мая 1993 г.