



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Гончаров, О коэффициентах Фурье непрерывных функций для систем типа Хаара,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1993,
номер 2, 101–104

<https://www.mathnet.ru/vmumm2362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

27 апреля 2025 г., 00:13:08



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.587

В. А. Гончаров

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА ХААРА

Хорошо известная теорема Бочкарева [1] утверждает, что если $f(t) \in \text{Lip}(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ на $[0, 1]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} < \infty$, где $a_n(f)$ — n -й коэффициент Фурье — Хаара на $[0, 1]$, то $f(t) \equiv \text{const}$ на $[0, 1]$. Пусть задана последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ натуральных чисел, таких, что $p_0 = 1$, а $p_n \geq 2$ ($n \geq 1$). Определим на $[0, 1]$ систему $\chi\{p_n\} \equiv \{\chi_m(t)\}$. Положим $\chi_1(t) \equiv 1$ на $[0, 1]$. Если же $m \geq 2$, то $m = m_n + r(p_{n+1} - 1) + s$, где $n = 0, 1, \dots$; $r = 0, 1, \dots, m_n - 1$; $s = 1, \dots, p_{n+1} - 1$; $m_n = p_0 p_1 \dots p_n$, причем такое представление числа m единственно. Обозначим через A множество точек вида l/m_k на отрезке $[0, 1]$. Если $t \in [0, 1] \setminus A \equiv B$, то разложение

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{m_k}, \quad 0 \leq \alpha_k(t) \leq p_k - 1,$$

единственно. Функцию $\chi_m(t) = \chi_{n,r}^{(s)}(t)$ определим следующим образом:

$$\chi_{n,r}^{(s)}(t) = \begin{cases} \sqrt{m_n} \exp\left(2\pi i s \frac{\alpha_{n+1}(t)}{p_{n+1}}\right) & \text{при } t \in \left(\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right) \cap B; \\ 0 & \text{при } t \notin \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right] \end{cases}$$

$$(0 \leq n < \infty, 0 \leq r < m_n, 1 \leq s < p_{n+1}).$$

Продолжим функцию $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ по непрерывности на интервал $(r/m_n, (r+1)/m_n)$. В точках разрыва функцию $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ положим равной полусумме ее предельных значений справа и слева, а на концах отрезка $[0, 1]$ — ее предельным значениям изнутри отрезка. Определенная таким образом система $\chi\{p_n\}$ называется системой типа Хаара, построенной по последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Класс всех систем типа Хаара $\chi\{p_n\}$ называется классом систем типа Хаара.

Для систем типа Хаара, построенных по последовательностям $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ограниченными p_n в совокупности, результат, аналогичный теореме Бочкарева, получен Бокаевым [2].

Теорема (Бокаев [2]). Если при некотором $\alpha \in (0, 1]$ функция $f(t) \in \text{Lip}(\alpha)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1} \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} |a_j(f)|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} < \infty$, то $f(t) \equiv \text{const}$ на $[0, 1]$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(t) \in \text{Lip}(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, на $[0, 1]$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} < \infty$, $a_n(f)$ — n -й коэффициент Фурье для системы типа Хаара, то $f(t) \equiv \text{const}$ на $[0, 1]$.

Докажем сначала теорему 2.

Теорема 2. Пусть $f(t)$ — непрерывная на $[0, 1]$ функция и

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\sqrt{m_s}) \sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} |a_t(f)| < \infty,$$

$a_t(f)$ — t -й коэффициент Фурье $f(t)$ для системы типа Хаара.

Тогда $f(t) \equiv \text{const}$ на $[0, 1]$.

Доказательство. Докажем, что $\int_0^1 f = 0$ ($\int_0^1 f$ — вариация f на $[0, 1]$). Полагаем

$$J_k^{(n)} = \left(\frac{k-1}{m_n}, \frac{k}{m_n} \right), \quad 1 \leq k \leq m_n.$$

Тогда ввиду непрерывности функции $f(t)$ имеем

$$\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \sup_{\xi_1, \xi_2 \in J_k^{(n)}} |f(\xi_1) - f(\xi_2)|.$$

Учитывая, что

$$S_{m_n}(\xi_1) = S_{m_n}(\xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in J_k^{(n)},$$

$S_{m_n}(t)$ — частные суммы ряда Фурье по системе типа Хаара от $f(t)$, а также, что $\sup |f(\xi_1) - f(\xi_2)|$ достигается в некоторых точках $\xi_{1,k}^{(n)}, \xi_{2,k}^{(n)} \in J_k^{(n)}$, получаем

$$\sup_{\xi_1, \xi_2 \in J_k^{(n)}} |f(\xi_1) - f(\xi_2)| = |f(\xi_{1,k}^{(n)}) - f(\xi_{2,k}^{(n)})|,$$

отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \sup_{\xi_1, \xi_2 \in J_k^{(n)}} |f(\xi_1) - f(\xi_2)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} |f(\xi_{1,k}^{(n)}) - f(\xi_{2,k}^{(n)})|.$$

Переобозначим $\xi_{1,k}^{(n)} = \xi_k^{(n)}$. Так как $\xi_k^{(n)} \in J_k^{(n)}$, то существует l_k :

$$(k-1) \frac{m_s}{m_n} < l_k \leq k \frac{m_s}{m_n}, \quad n \leq s,$$

такое, что $\xi_k^{(n)} \in J_k^{(n)}$. Тогда $\chi_l(\xi_k^{(n)}) = 0$, если

$$\left[\left((k_1-1) \frac{m_s}{m_n} < l \leq k_1 \frac{m_s}{m_n} \right) \& (k_1 \neq k) \& (1 \leq k_1 \leq m_n) \right];$$

$$\chi_l(\xi_k^{(n)}) = 0, \text{ если } \left[(l \neq l_k) \& \left((k-1) \frac{m_s}{m_n} < l \leq k \frac{m_s}{m_n} \right) \right].$$

Отсюда получаем

$$\sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} |a_t \chi_t(\xi_k^{(n)})| = \sum_{t=(p_{s+1}-1)(l_k-1)+1}^{(p_{s+1}-1)l_k} |a_t \chi_t(\xi_k^{(n)})|.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} |f(\xi_{1,k}^{(n)}) - S_{m_n}(\xi_{1,k}^{(n)}) - \{f(\xi_{2,k}^{(n)}) - S_{m_n}(\xi_{2,k}^{(n)})\}| \leq \\ & \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} |f(\xi_{1,k}^{(n)}) - S_{m_n}(\xi_{1,k}^{(n)})|, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} |f(\xi_{1,k}^{(n)}) - S_{m_n}(\xi_{1,k}^{(n)})| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left| \sum_{t=m_s+1}^{\infty} a_t \chi_t(\xi_k^{(n)}) \right| \leq \\ & \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left(\sum_{s=n}^{\infty} \left(\left| \sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} a_t \chi_t(\xi_k^{(n)}) \right| \right) \right) = \\ & = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left(\sum_{s=n}^{\infty} \left(\left| \sum_{t=(p_{s+1}-1)(l_k-1)+1}^{(p_{s+1}-1)l_k} a_t \chi_t(\xi_k^{(n)}) \right| \right) \right) \leq \\ & \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left(\sum_{s=n}^{\infty} \left(\sqrt{m_s} \sum_{t=(p_{s+1}-1)(l_k-1)+1}^{(p_{s+1}-1)l_k} |a_t| \right) \right) \leq \\ & \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left(\sum_{s=n}^{\infty} \sqrt{m_s} \sum_{t=(k-1) \frac{m_s}{m_n} (p_{s+1}-1)+1}^{k \frac{m_s}{m_n} (p_{s+1}-1)} |a_t| \right) \leq \\ & \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=n}^{\infty} \left(\sqrt{m_s} \sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} |a_t| \right), \end{aligned}$$

следовательно, $\bigvee_0^1 f = 0 \Rightarrow f(t) \equiv \text{const}$ на $[0, 1]$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя неравенство

$$|a_j(f)| \leq \frac{1}{\sqrt{m_k}} E_{m_k}(f), \quad m_k < j \leq m_{k+1}$$

из работы [3] и неравенство

$$E_{m_k}(f) \leq cw \left(f, \frac{1}{m_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

из работы [4], имеем $|a_j(f)| \leq cm_k^{-\frac{1}{2}}$, $m_k < j \leq m_{k+1}$. Отсюда

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\sqrt{m_s} \sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} |a_t(f)| \right) = \sum_{1}^{\infty} \left(\sqrt{m_s} \sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} t^{\alpha} |a(t)| \right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} |a_t(f)|^{\frac{1}{2\alpha+1}} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq c \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sqrt{m_s} \sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} |a_t(f)| \right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} \left((m_s)^{-\frac{1}{2}-\alpha} \right)^{\frac{1}{2\alpha+1}} = \\ &= c \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} |a_t(f)|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} \right) = c \sum_{t=m_1+1}^{\infty} |a_t|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, если $\sum_{t=m_1+1}^{\infty} |a_t|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} < \infty$, то из теоремы 2 получаем

$f(t) \equiv \text{const}$ на $[0, 1]$.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочкарев С. В. О коэффициентах рядов Фурье по системе Хаара//Матем. сб. 1969. 80(122), № 1 (9). 97—116.
2. Бокаев Н. А. О коэффициентах Фурье по обобщенной системе Хаара//Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. 1990. № 3. 13—16.
3. Тухлиев К. Коэффициенты Фурье и наилучшие приближения одного класса систем сходимости//Докл. АН Таджикской ССР. 1980. 23, № 11. 615—619.
4. Голубов Б. И. Об одном классе полных ортогональных систем//Сиб. матем. журн. 1968. 9, № 2. 297—314.

Поступила в редакцию
23.01.92

УДК 515.12

В. Л. Сухих

РАЗМЕРНО ПОЛНОЦЕННОЕ КЛЕТЧНОПОДОБНОЕ РАЗРЕШЕНИЕ ДЛЯ ANR-КОМПАКТОВ

Долгое время стоявшая проблема К. Борсука о размерной полноценности ANR-компактов была решена недавно А. Н. Дранишниковым [1], построившим два 4-мерных ANR-компакта с 7-мерным произведением. Следовательно, существуют размерно неполноценные ANR-компакты, т. е. ANR-компакты, для размерности произведения которых не выполняется логарифмический закон.

В связи с этим возникает естественный вопрос о возможности представления всякого ANR-компакта как образа при SE-отображении некоторого размерно полноценного ANR-компакта той же размерности.

Настоящая работа дает положительный ответ на этот вопрос.

При этом в качестве условия, гарантирующего размерную полноценность, используется так называемое условие (Δ) , введенное К. Борсуком [2]; в статье Дранишникова и Щепина [3] для компактов этого класса предложен термин размерно-регулярные.

Определение 1. Пространство X удовлетворяет условию DD^kP дизъюнктивной аппроксимации k -мерных дисков, если для любых двух отображений $f, g: D^k \rightarrow X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся отображения $f', g': D^k \rightarrow X$, такие, что $\text{dist}(f, f') < \varepsilon$, $\text{dist}(g, g') < \varepsilon$ и $\text{Im } f' \cap \text{Im } g' = \emptyset$.

Лемма 1 [4]. Пусть ANR-компакт $X \in DD^nP$. Тогда любое отображение $f: Y \rightarrow X$, где Y — компакт, $\dim Y \leq n$, может быть аппроксимировано вложением.