



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Гольдман, О вложении обобщенных
гельдеровых классов,
Матем. заметки, 1972, том 12, вы-
пуск 3, 325–336

<https://www.mathnet.ru/mzm9885>

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны
с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

30 апреля 2025 г., 13:56:49



О ВЛОЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ГЕЛЬДЕРОВЫХ КЛАССОВ

М. Л. Гольдман

Для обобщенных гельдеровых классов $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ с функцией гладкости в метрике $L_p(R_N)$ получены необходимые и достаточные условия вложения. Из этих условий, в частности, вытекает новая теорема вложения по индексу θ для этих классов. Библ. 5 назв.

1°. Пусть U — класс непрерывных, возрастающих на $[0, 1]$ функций $\varphi(t)$, таких, что $\varphi(0) = 0$. Функция φ удовлетворяет условию (S) (кратко: $\varphi \in (S)$), если $\varphi \in U$ и существует постоянная α , $0 < \alpha < 1$, такая, что $\varphi(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает; $\varphi \in (S_k)$, где $k \geq 1$ — некоторое целое число, если $\varphi \in U$ и существует постоянная β , $\beta < k$, такая, что $\varphi(t)t^{-\beta}$ почти убывает. Почти убывание (возрастание) функции означает, что соответствующее неравенство монотонности верно с постоянным множителем, не обязательно равным единице. Условия (S) и (S_k) введены С. Б. Стечкиным, их совокупность эквивалентна (\mathfrak{R}_k) условию С. М. Лозинского (см. [1]). Мы будем для краткости писать $\varphi \in (\mathfrak{R}_k)$, понимая под этим условие $\varphi \in (S) \cap (S_k)$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_N) \in R_N$ — N -мерному евклидову пространству, $x = (u, z)$, где $u = (x_1, \dots, x_m)$, $m \leq N$. При фиксированном $z = (x_{m+1}, \dots, x_N)$ $u \in R_m$. Пусть далее $l = (l_1, \dots, l_N)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $|l| = l_1 + \dots + l_N$; $D^l f(x) = f^{(l)}(x)$ — обобщенная частная производная порядка l , т. е. порядков l_j по x_j ($1 \leq j \leq N$).

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ принадлежит классу $B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N)$, где $a \geq 0$ — целое число; $\varphi(t) \in U$, $\varphi(t)t^{-k}$

почти убывает; $1 \leq p, \theta \leq \infty$, если $f \in L_p(R_N)$ имеет все обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные порядка l с $|l| = a$ и конечна полуорма

$$\|f\|_b = \sum_{|l|=a} \left\{ \int_0^1 [\omega_k(f^{(l)}, t)_p \varphi(t)^{-1}]^\theta t^{-1} dt \right\}^{1/\theta} < \infty$$

$$(1 \leq \theta < \infty), \quad (1)$$

$$\|f\|_b = \sum_{|l|=a} \sup_{0 < t \leq 1} [\omega_k(f^{(l)}, t)_p \varphi(t)^{-1}] < \infty \quad (\theta = \infty). \quad (2)$$

При этом норма в $B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N)$ равна

$$\|f\|_B = \|f\|_p + \|f\|_b. \quad (3)$$

Здесь $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p}$; $\omega_k(g, t)_p$ — модуль непрерывности порядка k функции $g(x)$ в метрике $L_p(R_N)$. В случае $\theta < \infty$, для того чтобы класс $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ содержал не только функции, эквивалентные нулю, нужно дополнительно потребовать, чтобы $\int_0^1 [t^k \varphi(t)^{-1}]^\theta t^{-1} dt < \infty$. Последнее условие выполнено, например, при $\varphi \in (\mathfrak{Q}_k)$. Класс функций $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ с нормой (3) образует банахово пространство, обобщающее пространство О. В. Бесова $B_{p\theta}^r$, которое получится из (1)–(3), если положить $k = 2$ и взять $\varphi(t) = t^\alpha$, где $0 < \alpha \leq 1, r = a + \alpha$.

Классы, включающие $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ при $\varphi \in (\mathfrak{Q}_k)$ (а именно, построенные над более общим пространством, чем L_p), изучались в работе А. С. Джафарова [2]. Из результатов этой работы вытекает вложение

$$B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N) \rightarrow B_{p'\theta'}^{b,\psi}(R_m) \quad (1 \leq p \leq p' \leq \infty, 1 \leq \theta \leq \theta' \leq \infty, m \leq N) \quad (4)$$

при условии, что $\varphi(t) \in (\mathfrak{Q}_k), \psi(t) = t^b \varphi(t) \in (\mathfrak{Q}_n)$ с некоторыми k и n , где $b \geq 0$ — целое число, а буквой κ обозначена постоянная

$$\kappa = a - b - (N - m)/p' - N(1/p - 1/p'). \quad (5)$$

Утверждение (4) самое сильное при $\theta' = \theta$ (см. 2°, свойство 2).

Теорема (4), являющаяся непосредственным обобщением теоремы вложения для классов $B_{p'}^r$ (см. книгу С. М. Никольского [3]), не полностью использует возмож-

ности, которые открываются при переходе к классам $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ для изучения их зависимости от θ . В классах $B_{p\theta}^r$ известно расширение класса с ростом θ и вложение $B_{p\theta}^{r+\varepsilon} \rightarrow B_{p\theta}^r$ при любом $\varepsilon > 0$ и любом θ' . Последнее показывает, что зависимость класса от r гораздо сильнее, чем от θ . Ниже мы увидим, что в классах $B_{p\theta}^{a,\varphi}$, улавливающих тонкие дифференциальные свойства, можно получать уже более содержательные теоремы вложения по индексу θ .

ТЕОРЕМА. Пусть $1 \leq m \leq N$; $1 \leq p \leq p' \leq \infty$; $1 \leq \theta, \theta' \leq \infty$; $a \geq 0, b \geq 0$ — целые числа, κ определено, как в (5). Пусть $\varphi \in (\mathcal{L}_\kappa)$, $\psi \in (\mathcal{L}_n)$ при некоторых натуральных κ и n , и в определении классов $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ и $B_{p'\theta'}^{b,\psi}$ взяты модули непрерывности порядков κ и n соответственно. Следующие условия необходимы и достаточны для того, чтобы имело место вложение $B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N) \rightarrow B_{p'\theta'}^{b,\psi}(R_m)$ (кратко: $B \rightarrow B'$):

1) Если $\theta' < \theta$, то

$$A \equiv \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(2^{-s}) \psi(2^{-s})^{-1} 2^{-s\kappa}]^q \right\}^{1/q} < \infty, \quad (6)$$

где $q = \theta'\theta/(\theta - \theta')$ при $\theta < \infty$; $q = \theta'$ при $\theta = \infty$.

2) Если $\theta' \geq \theta$, то

$$A \equiv \sup_{0 < t \leq 1} [\varphi(t) \psi(t)^{-1} t^\kappa] < \infty. \quad (7)$$

Доказательство теоремы отложим до $\S 3^\circ$, а пока отметим следующее. Пусть задан класс $B = B_{p\theta}^{a,\varphi}$ и числа $p' \geq p$, $\theta' \geq \theta$. Если $\psi_0(t) = \varphi(t)t^\kappa \in (\mathcal{L}_n)$ при некотором натуральном n , то в силу (7) вложение $B \rightarrow B'$ при $\psi(t) = \psi_0(t)$ является точным в том смысле, что оно не имеет места, если $\psi(t) = o(\psi_0(t))$ ($t \rightarrow 0$). Тем самым вложение (4) вместе с доказательством его неулучшаемости содержится в (7). Если же $\theta' < \theta$, то из (6) легко следует, что, каков бы ни был класс $B_{p'\theta'}^{b,\psi}$, в который вложен класс B , всегда найдется более узкий класс $B_{p'\theta'}^{b,\psi}$ с условием $\mu(t) = o(\psi(t))$ ($t \rightarrow 0$), в который класс B также вложен.

Отметим еще, что в работе П. Л. Ульянова [5] получена теорема вложения в одномерном периодическом случае для $\theta' = \theta = \infty$, но для классов с произвольными модулями непрерывности первого порядка. Условия вложения,

полученные там, эквивалентны (7) при дополнительных ограничениях, наложенных нами на модули непрерывности.

2°. Мы приведем здесь известные свойства функций класса $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ с $\varphi \in (\mathcal{Q}_k)$, а также свойства целых функций конечной степени. Они понадобятся в дальнейшем.

1. Пусть

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x), \quad (8)$$

где $Q_s(x)$ — целые функции степени 2^s по каждой переменной x_j , причем ряд (8) сходится в $L_p(R_N)$. Тогда, если

$$f \|_B = \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} [\|Q_s\|_p 2^{as} \varphi(2^{-s})^{-1}]^{\theta} \right\}^{1/\theta} < \infty \quad (1 \leq p, \theta \leq \infty), \quad (9)$$

то $f \in B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N)$, причем $\|f\|_B \leq c \|f\|'_B$, где c не зависит от f . Верно и обратное. Следовательно, нормы $\|\cdot\|_B$ и $\|\cdot\|'_B$ эквивалентны. Эти утверждения фактически были получены в работе [2]. В дальнейшем вместо нормы (3) мы будем использовать норму (9), опуская штрих.

2. Справедливо вложение

$$B_{p\theta}^{a,\varphi} \rightarrow B_{p\theta'}^{a,\varphi} \quad \text{при} \quad \theta' \geq \theta. \quad (10)$$

Это сразу следует из нормы (9).

3. Для целых функций $Q_s(x)$ степени 2^s по всем x_j справедливо неравенство разных метрик и измерений [3] гл. 3:

$$\|Q_s\|_{p'}^{(m)} \leq c 2^{s[(N-m)/p' + N(1/p - 1/p')]} \|Q_s\|_p^{(N)} \\ (1 \leq p \leq p' \leq \infty; 1 \leq m \leq N), \quad (11)$$

где $\|\cdot\|_q^{(m)}$ и $\|\cdot\|_q^{(N)}$ нормы в $L_q(R_m)$ и $L_q(R_N)$ соответственно, c — абсолютная постоянная, и неравенство

$$\|\Delta_{x_j h} Q_s\|_p \leq |h| \left\| \frac{\partial Q_s}{\partial x_j} \right\|_p \leq \nu |h| \cdot \|Q_s\|_p \quad (\nu = 2^s), \quad (12)$$

следующее из 4.4.4 книги [3] и неравенства С. Н. Берштейна. Здесь $\Delta_{x_j h} f(x)$ — первая разность функции f по переменной x_j с шагом h .

3°. Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть $A < \infty$, функция $f(x) \in B$. Тогда

она представима рядом (8), причем норма (9) конечна. Пусть $m < N$, $x = (u, z)$. Зафиксируем z в разложении (8), тогда

$$\left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \left(\|Q_s\|_{p'}^{(m)} 2^{bs} \psi^{-1}(2^{-s}) \right)^{\theta'} \right\}^{1/\theta'} \leq \\ \leq c \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \left(\|Q_s\|_{p'}^{(N)} 2^{as} \varphi^{-1}(2^{-s}) \right)^{\theta'} \left(\varphi(2^{-s}) \psi^{-1}(2^{-s}) 2^{-sk} \right)^{\theta'} \right\}^{1/\theta'} \leq \\ \leq cA \|f\|_B. \quad (13)$$

Первая оценка в (13) следует из (11). В случае $\theta' < \theta < \infty$ для получения второй оценки в (13) надо применить неравенство Гельдера с показателями $q = \theta'/(\theta - \theta')$, $q' = \theta/\theta'$, а затем (9) и (6). При $\theta' < \theta = \infty$ достаточно просто выделить в среднем члене (13) $\|f\|_B$. В силу (10) осталось рассмотреть лишь случай $\theta' = \theta$, в котором последнее неравенство в (13) сразу следует из (7).

В случае $m = N$ неравенство (13) также справедливо, причем оно исчерпывает доказательство достаточности. Итак, всюду ниже $m < N$.

Из (13) следует сходимость ряда (8) в $L_{p'}(R_m)$ при любом фиксированном z к некоторой функции $f_1(u, z) \in L_{p'}(R_m)$, причем $f_1(u, z) = f(x)$ почти всюду в смысле N -мерной меры Лебега (см. [3], 1.3.9). Более того, $f_1(u, z) \in B'$. Осталось показать, что $f_1(u, z)$ при любом фиксированном z есть след функции f на $R_m = R_m(z)$, для чего достаточно установить, что

$$\| \Delta_{x_j h} f_1(x) \|_{p'}^{(m)} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (m+1 \leq j \leq N). \quad (14)$$

Справедливы оценки

$$\| \Delta_{x_j h} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leq c |h| 2^{-s(x+b-a-1)} \|Q_s\|_{p'}^{(N)}, \quad (15)$$

$$\| \Delta_{x_j h} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leq 2 \|Q_s\|_{p'}^{(m)} \leq c_1 2^{-s(x+b-a)} \|Q_s\|_{p'}^{(N)}, \quad (16)$$

вытекающие из (11), (12). В силу (6) или (7) $\psi(t) \geq c\varphi(t)t^k$, поэтому, используя конечность нормы (9), эти оценки можно продолжить:

$$\| \Delta_{x_j h} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leq c |h| 2^{s(1-b)} \psi(2^{-s}), \\ \| \Delta_{x_j h} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leq c_1 2^{-bs} \psi(2^{-s}). \quad (17)$$

Переходим к доказательству (14). Пусть $0 < |h| < 1$, $\mu \geq 1$ — целое, $\|\Delta_{x_j} h f_1\|_{p'}^{(m)} \leq c |h| \sum_{s=0}^{\mu-1} 2^{s(1-b)} \psi(2^{-s}) + c \sum_{s=\mu}^{\infty} 2^{-bs} \psi(2^{-s}) = c |h| c_\mu + c'_\mu$. Из свойства (S) функции ψ вытекает оценка

$$c'_\mu = O[2^{-b\mu} \psi(2^{-\mu})], \quad (18)$$

а из свойства (S_n) — оценка

$$c_\mu \leq c \psi(2^{-\mu}) 2^{\beta\mu} \sum_{s=0}^{\mu-1} 2^{s(1-b-\beta)} \leq \leq c_1 \psi(2^{-\mu}) \begin{cases} 2^{\mu(1-b)} & \text{при } b + \beta < 1, \\ 2^{\mu(1-b)} \ln(2^\mu) & \text{при } b + \beta = 1, \\ 2^{\beta\mu} & \text{при } b + \beta > 1. \end{cases} \quad (19)$$

В случае $b + \beta \leq 1$ (это возможно лишь при $b = 0$) выберем μ так, чтобы $2^{-\mu} \leq |h| < 2^{-(\mu-1)}$. В случае $b + \beta > 1$ выберем μ так, чтобы $2^{-\mu(b+\beta)} \leq |h| < 2^{-(\mu-1)(b+\beta)}$, при этом c'_μ и $|h| c_\mu$ имеют одинаковый порядок при $|h| \rightarrow 0$. В итоге получим оценки:

$$\Delta_{x_j} h f_1 \|_{p'}^{(m)} \leq c \begin{cases} \psi(|h|) & \text{при } \beta < 1, \\ \psi(|h|) \ln(|h|^{-1}) & \text{при } \beta = 1, \\ \psi(|h|^{1/(b+\beta)}) |h|^{b/(b+\beta)} & \text{при } b + \beta > 1. \end{cases} \quad (20)$$

Эти неравенства доказывают (14). Более того, при $\psi(t) = t^\alpha \varphi(t)$ они дают порядок стремления следов функций из класса $H_p^{\alpha, \varphi} \equiv B_{p^\infty}^{\alpha, \varphi}(R_N)$. При $\psi(t) = t^\beta$ эти оценки переходят в известные (см. [3], 6.5). Достаточность полностью доказана.

Необходимость. Покажем, что при $A = \infty$ существует функция $f(x) \in B$, след которой на R_m (или она сама, если $m = N$) не принадлежит B' . Придется рассмотреть несколько случаев.

1. Пусть $1 \leq \theta' < \theta < \infty$. Обозначим для краткости

$$a_s = \varphi(2^{-s}) \psi(2^{-s})^{-1} 2^{-s\alpha}. \quad (21)$$

Тогда $\sum_{s=0}^{\infty} a_s^q = \infty$. Найдем монотонно убывающую

к нулю последовательность $\{\varepsilon_s\}$ со свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \varepsilon_s a_s^{q/\theta'} \leq 1, \\ 2) \quad & \sum_{s=0}^{\infty} a_s^q \varepsilon_s^\theta < \infty, \\ 3) \quad & \sum_{s=0}^{\infty} a_s^q \varepsilon_s^{\theta'} = \infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Например, эту последовательность можно задать в виде $\varepsilon_s = S_s^{-1/\theta'}$, где $S_s = \sum_{m=0}^s a_m^q$. Тогда (22) следует из известной теоремы Абеля.

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{q/\theta'} \varepsilon_s \psi(2^{-s}) 2^{-sd} \left(\prod_{j=1}^N x_j^{-2} \sin^2 2^{s-1} x_j \right) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x), \end{aligned} \quad (23)$$

где $d = N(2-1/p') + (N-m)/p' + b$. Известно, что $Q_s(x)$ — целые функции типа 2^s по всем x_j , и для

$$\begin{aligned} q_s(x) &= \prod_{j=1}^N x_j^{-2} \sin^2 2^{s-1} x_j, \\ \|q_s\|_r &= c_r 2^{sN(2-1/r)} \quad (1 \leq r \leq \infty). \end{aligned} \quad (24)$$

Несложный подсчет показывает, что

$$f\|_B = \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (\|Q_s\|_p^{(N)} 2^{as} \varphi^{-1}(2^{-s}))^\theta \right\}^{1/\theta} = c \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a_s^q \varepsilon_s^\theta \right\}^{1/\theta} < \infty,$$

т. е. $f \in B$. Отсюда следует также, что ряд (23) сходится в $L_p(R_N)$. Покажем, что если в (23) фиксировать $z = (0, \dots, 0)$, то получится след $f|_{R_m}$, который не принадлежит B' . Справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \|\Delta_{xjh} Q_s\|_{p'}^{(m)} &\leq c_1 |h| \psi(2^{-s}) 2^{-s(b-1)}, \\ \|\Delta_{xh} Q_s\|_{p'}^{(m)} &\leq 2 \|Q_s\|_{p'}^{(m)} \leq c_2 \psi(2^{-s}) 2^{-sb}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для их вывода надо последовательно применить (15), (16), (24) и первую оценку в (22). Справа в (25) стоят величины, не большие чем справа в (17), поэтому стремление

к нулю $\| \Delta_{x_j h} f \|_{p'}^{(m)}$ следует из оценок (20). Из второй оценки (25) следует сходимость ряда (23) в $L_{p'}(R_m)$ при фиксированном z . Итак, $f(x)$ имеет след $f|_{R_m} \in L_{p'}(R_m)$, который получится, если в ряде (25) фиксировать z . Положим $z = 0 \equiv (0, \dots, 0)$ и покажем, что $f(u, 0) \in B'$. Действительно,

$$\| Q_s(u, 0) \|_{p'}^{(m)} = c a_s^{q/\theta'} \varepsilon_s \psi(2^{-s}) 2^{-sb}$$

и

$$\begin{aligned} \| f(u, 0) \|_{B'} &= \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (\| Q_s(u, 0) \|_{p'}^{(m)} 2^{bs} \psi^{-1}(2^{-s}))^{\theta'} \right\}^{1/\theta'} = \\ &= c \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a_s^q \varepsilon_s^{\theta'} \right\}^{1/\theta'} = \infty. \end{aligned}$$

2. Пусть $1 \leq \theta' < \theta = \infty$. Сохраним прежнее обозначение для a_s и выберем ε_s так же, как выше. Тогда верны первое и третье соотношения в (22), только теперь $q = \theta'$. Определим $f(x)$ по формуле (23). Тогда

$$\| f \|_B = \sup_{s \geq 0} (\| Q_s \|_p^{(N)} 2^{as} \varphi(2^{-s})^{-1}) = c_p \sup_{s \geq 0} \varepsilon_s < \infty,$$

т. е. $f \in B$. Все дальнейшие рассуждения переносятся дословно из предыдущего случая.

3. Пусть $\theta \leq \theta'$. Условие (7) не зависит от θ и θ' . В силу свойства 2.2° для доказательства необходимости нужно рассмотреть лишь случай $\theta = 1, \theta' = \infty$. Сохранив обозначения (21), получим, что $\sup a_s = \infty$. Выберем подпоследовательность $\{s_i\}$ так, чтобы $2^{3i} \leq a_{s_i}$ и $2^{2i} \leq 2^{\alpha s_i/2}$. Здесь α из условия (S) для функции ψ . Зададим ограниченную последовательность $\{\varepsilon_i\}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$2^{2i} \leq a_{s_i} \varepsilon_i \leq 2^{\alpha s_i/2}. \quad (26)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon_i \varphi(2^{-s_i}) 2^{-s_i[a+N(2-1/p)]} q_{s_i}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{s_i}(x), \quad (27)$$

где q_s из (24), $x = (u, z)$. Тогда

$$\| f \|_B = \sum_{i=0}^{\infty} \| Q_{s_i} \|_p^{(N)} 2^{\alpha s_i} \varphi^{-1}(2^{-s_i}) = c_p \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon_i < \infty,$$

т. е. $f \in B$, ряд (27) сходится в $L_p(R_N)$. Мы покажем, что если фиксировать в (27) z , то получится след, который не принадлежит B' . Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\Delta_{x_j h} Q_{s_i}\|_{p'}^{(m)} &\leq c |h| \cdot 2^{-i-s_i(\alpha/2+b-1)}, \\ \|\Delta_{x_j h} Q_{s_i}\|_{p'}^{(m)} &\leq 2 \|Q_{s_i}\|_{p'}^{(m)} \leq c 2^{-i-s_i(\alpha/2+b)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Их вывод аналогичен (25); мы учли также неравенство $\varepsilon_i a_{s_i} \psi(2^{-s_i}) \leq c 2^{-\alpha s_i/2}$, следующее из (26) и свойства (S).

Выбирая μ так, чтобы $2^{-s_\mu} \leq |h| < 2^{-(s_\mu-1)}$, мы рассуждениями, аналогичными (15)–(18), но более простыми, ибо в оценках (28), заменяющих (17), стоит вместо $\psi(t)$ чистая степень t , получим, что $\|\Delta_{x_i h} f(u, z)\|_{p'}^{(m)} \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$. Кроме того, $f(u, z) \in L_{p'}(R_m)$ при фиксированном z , что следует из второй оценки (28). Итак, положив в (27) $z = 0 \equiv (0, \dots, 0)$, получим след $f(u, 0) \in L_{p'}(R_m)$. Однако $f(u, 0) \notin B'$. Действительно,

$$\|Q_{s_i}(u, 0)\|_{p'}^{(m)} = c_p a_{s_i} \varepsilon_i \psi(2^{-s_i}) 2^{-b s_i^{-i}},$$

и в силу оценки снизу в (26)

$$\|f(u, 0)\|_{B'} = \sup_i (\|Q_{s_i}(u, 0)\|_{p'}^{(m)} 2^{b s_i} \psi^{-1}(2^{-s_i})) \geq \sup_i (c 2^i) = \infty.$$

Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е 1. Пусть $\varphi(t) \in (\mathfrak{S}_k)$, $\varphi(t)\chi(t) \in (\mathfrak{S}_l)$ с некоторыми k и l . Для того чтобы имело место вложение по индексу θ

$$B_{p\theta}^{a, \varphi\chi}(R_N) \rightarrow B_{p\theta'}^{a, \varphi}(R_N) \quad (1 \leq p \leq \infty; 1 \leq \theta' < \theta \leq \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \chi^q(2^{-s}) \right\}^{1/q} < \infty$$

($q = \theta'/(\theta - \theta')$ при $\theta < \infty$; $q = \theta'$ при $\theta = \infty$). (29)

Это следствие точно указывает, насколько надо увеличить гладкость, чтобы при увеличении θ' до θ класс тем не менее не расширился. Например, в логарифмической шкале гладкости для $\chi(t) = \ln^{-\alpha}(1+t^{-1})$ искомое вложение верно при $\alpha > q^{-1}$, но неверно при $\alpha \leq q^{-1}$.

Отметим, что это вложение необратимо. Именно, лишь только $\chi(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), вложение $B_{p\theta}^{\alpha, \varphi} \rightarrow B_{p\theta'}^{\alpha, \varphi \times}$ ($\theta > \theta'$) неверно, как бы ни увеличивать θ (необходимость условия (7)). Следовательно, увеличение гладкости и уменьшение θ — неравносильные операции, хотя обе они приводят к сужению класса.

С л е д с т в и е 2. Из теоремы следует и вложение классов Бесова $B_{p\theta}^r(R_N) \rightarrow B_{p'\theta'}^r(R_m)$ при условии $0 < \rho \leq \gamma \equiv r - N(1/p - 1/p') - (N - m)/p'$, если $\theta \leq \theta'$, и при условии $0 < \rho < \gamma$, если $\theta > \theta'$, причем это вложение неверно при $\rho > \gamma$ в случае $\theta \leq \theta'$ и при $\rho \geq \gamma$ для $\theta > \theta'$.

З а м е ч а н и е 1. Условия типа (29) встречаются в качестве достаточных условий при аналогичной ситуации в работе [4] для классов, несколько отличных от $B_{p\theta}^{\alpha, \varphi}$.

З а м е ч а н и е 2. Покажем, что при $m = N$ (вложение разных метрик) теорема может быть обобщена.

Пусть $\Phi(t) > 0$ — непрерывная функция на $(0, 1]$, для которой существуют две постоянные α и β , $-\infty < \alpha \leq \beta < +\infty$, такие, что $\Phi(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает, а $\Phi(t) \cdot t^{-\beta}$ почти убывает. Скажем, что $f(x) \in {}_1B_{p\theta}^{\Phi}(R_N)$ ($1 \leq p, \theta \leq \infty$), если $f(x) \in S_p'(R_N)$, т. е. регулярная в смысле L_p обобщенная функция (см. [3], гл. 1 и 8), и ее ряд Валле-Пуссена по целым функциям степеней 2^s

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x, f), \quad (30)$$

сходящийся к ней слабо, таков, что

$$\|f\|_{1B} = \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (\|Q_s(x, f)\|_p \Phi^{-1}(2^{-s}))^{\theta} \right\}^{1/\theta} < \infty. \quad (31)$$

Используя (8) и (9), можно показать, что если Φ представима в виде $\Phi(t) = t^a \varphi_-(t)$, $a \geq 0$ — целое, $\varphi \in (\mathfrak{L}_k)$, то классы ${}_1B_{p\theta}^{\Phi}$ и $B_{p\theta}^{\alpha, \varphi}$ эквивалентны. В общем случае из результатов главы 8 книги [3] о применении операции I_r Лиувилевского типа к рядам Валле-Пуссена следует, что верна теорема об изоморфизме $I_r({}_1B_{p\theta}^{\Phi}) = {}_1B_{p\theta}^{\Phi_1}$, где $\Phi_1(t) = \Phi(t) \cdot t^r$ ($-\infty < r < +\infty$). Из сказанного вытекает, что необходимое и достаточное условие вложения ${}_1B_{p\theta}^{\Phi}(R_N) \subset {}_1B_{p'\theta'}^{\Psi}(R_N)$ получится, если в неравенствах

(6) и (7) заменить $\varphi(t) \cdot t^a$ и $\psi(t) \cdot t^b$ на $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ соответственно и положить $m = N$. Для доказательства надо классы, фигурирующие в искомом вложении, перевести с помощью операции I_r в такие, для которых верна теорема, а затем применить обратную операцию I_{-r} .

Отметим, что если $\Phi(t) = t^a \varphi(t)$, $a \geq 0$ — целое, $\varphi(t)$ — произвольный модуль непрерывности порядка k ($\varphi \in (\mathfrak{Q}_k)$), то, как показывают известные нам примеры, класс ${}_1B_{p\theta}^\Phi$ существенно шире, чем класс $B_{p\theta}^{a,\varphi}$, определенный в (1)–(3). Вопрос о теоремах вложения для таких классов $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ остается открытым.

З а м е ч а н и е 3. Возможно также обобщение теоремы на классы с анизотропией дифференциальных свойств по направлениям. Пусть $a = (a_1, \dots, a_N)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, где $a_j, b_i \geq 0$ — целые числа, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ — вектор-функции от t , причем $\varphi_j \in (\mathfrak{Q}_{k_j})$, $\psi_i \in (\mathfrak{Q}_{n_i})$ ($1 \leq j \leq N$, $1 \leq i \leq m$, $m \leq N$).

Анизотропные классы $B = B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N)$ и $B' = B_{p'\theta'}^{b,\psi}(R_m)$ ($1 \leq p \leq p' \leq \infty$, $1 \leq \theta, \theta' \leq \infty$) определяются, как это делается обычно. Для любого целого $s \geq 0$ вводим $v_j = v_j(s)$ и $v = v(s)$ из соотношений

$$v_j^{a_j} \varphi_j^{-1} (v_j^{-1}) = 2^s \quad (1 \leq j \leq N),$$

$$v = \left(\prod_{j=m+1}^N v_j^{1/p'} \right) \left(\prod_{j=1}^m v_j^{1/p-1/p'} \right).$$

Необходимые и достаточные условия вложения $B \rightarrow B'$ получатся, если в (6) заменить выражение в квадратных скобках на $a_s^{(i)} = [v v_i^{b_i - a_i} \varphi_i (v_i^{-1}) \psi_i^{-1} (v_i^{-1})]$ ($1 \leq i \leq m$), а (7) заменить на условие $\sup_s a_s^{(i)} < \infty$ ($1 \leq i \leq m$).

В изотропном случае эти условия, естественно, эквивалентны (6)–(7).

Не будем останавливаться на дальнейших обобщениях на случай векторных индексов p и θ . Их формулировка громоздка, а доказательства в основном аналогичны приведенному выше.

В заключение автор приносит благодарность В. А. Ильину за внимание к этой работе.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б а р и Н. К., С т е ч к и н С. Б., Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. матем. об-ва, 5 (1956), 483—521.
- [2] Д ж а ф а р о в А. С., Теоремы вложения классов функций с дифференциальными свойствами в нормах специальных пространств, Докл. АН Азерб. ССР, 21, № 2 (1965), 10—14.
- [3] Н и к о л ь с к и й С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.
- [4] Р а м а з а н о в М. Д., Функциональные пространства и преобразование Фурье, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 91 (1967), 146—170.
- [5] У л ь я н о в П. Л., Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках, Матем. сб., 81, № 1 (1970), 104—131.