Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, Обратная задача для основного моноида типа q, *Чебышевский сб.*, 2022, том 23, выпуск 4, 64–76

DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-64-76

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-64-76

Обратная задача для основного моноида типа q[1]

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе для произвольного основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q решается обратная задача, то есть нахождение асимптотики для функции распределения элементов моноида $M(\mathbb{P}(q))$, исходя из асимптотики распределения псевдопростых чисел $\mathbb{P}(q)$ типа q.

Для решения этой задачи рассматриваются два гомоморфизма основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q и задача о распределении сводится к аддитивной задаче Ингама.

Показано, что для этого класса моноидов понятие степенной плотности не работает. Введено новое понятие C логарифмической θ-степенной плотности.

Показано, что любой моноид $M(\mathbb{P}(q))$ для последовательности псевдопростых чисел $\mathbb{P}(q)$ типа q имеет оценки сверху и снизу для функции распределения элементов основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q.

Показано, что если C логарифмическая θ-степенная плотность для основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q существует, то $\theta = \frac{1}{2}$ и для константы C справедливы неравенства $\pi\sqrt{\frac{1}{3\ln q}} \leqslant C \leqslant \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$.

Полученные результаты аналогичны ранее полученным авторами при решении обратной задачи для моноидов, порожденных произвольной экспоненциальной последовательностью простых чисел типа q.

Для основных моноидов $M(\mathbb{P}(q))$ типа q остается открытым вопрос о существовании C логарифмической $\frac{1}{2}$-степенной плотности и величине константы C.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, экспоненциальная последовательность простых, основной моноид $M(\mathbb{P}(q))$ типа q, C логарифмическая θ-степенная плотность.

Библиография: 32 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для основного моноида типа q // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 4, С. 64–76.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-21-00544

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-64-76

The inverse problem for a basic monoid of type q[2]

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In the paper for an arbitrary basic monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q the inverse problem is solved, that is, finding the asymptotics for the distribution function of the elements of the monoid $M(\mathbb{P}(q))$, based on the asymptotics of the distribution of pseudo-prime numbers $\mathbb{P}(q)$ of type q.

To solve this problem, we consider two homomorphisms of the main monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q and the distribution problem reduces to the additive Ingham problem.

It is shown that the concept of power density does not work for this class of monoids. A new concept of C logarithmic θ-power density is introduced.

It is shown that any monoid $M(\mathbb{P}(q))$ for a sequence of pseudo-simple numbers $\mathbb{P}(q)$ of type q has upper and lower bounds for the element distribution function of the main monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q.

It is shown that if C is a logarithmic θ-power density for the main monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of the type q exists, then $\theta = \frac{1}{2}$ and for the constant C the inequalities are valid $\pi\sqrt{\frac{1}{3\ln q}} \leqslant C \leqslant \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$.

The results obtained are similar to those previously obtained by the authors when solving the inverse problem for monoids generated by an arbitrary exponential sequence of primes of type q.

For basic monoids $M(\mathbb{P}(q))$ of the type q, the question remains open about the existence of a C logarithmic $\frac{1}{2}$-power density and the value of the constant C.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, exponential sequence of primes, the basic monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q, C logarithmic θ-power density.

Bibliography: 32 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The inverse problem for a basic monoid of type q", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 64–76.

[2]Acknowledgments: This work was prepared under a grant from the RSF № 22-21-00544.

1. Введение

В работе [15] начато систематическое изучение дзета-функций моноидов натуральных чисел и законов распределения простых элементов в этих моноидах. В этой работе дано следующее определение экспоненциальной последовательности простых чисел.

Определение 1. *Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечная последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ называется экспоненциальной типа q, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.*

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым (см. [30]), для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел типа q.

В работе [15] было дано определение

Определение 2. *Для любого множества A натуральных чисел дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ определяется равенством*

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x\in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > \sigma_A). \tag{1}$$

Если множество A конечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [28], [30]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Пусть $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \ldots, p_n^{(q)}, \ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q и $M(PE_q)$ — моноид натуральных чисел, образованный с помощью PE_q. В работе [15] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \ldots, p_n^{(q)}, \ldots\}$ типа q дзета-ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE_q))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

В работе [21] была высказана гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функции $\zeta(M(PE_q))|\alpha)$, которая была доказана в работе [18]. Тем самым было установлено, что для этой дзета-функции её область голоморфности совпадает с правой полуплоскостью $\sigma > 0$.

В работе [16] доказана теорема о количестве простых элементов в моноиде $M(A)$, не превосходящих x, которое будем обозначать через $\pi_{P(M)}(x)$. В общем случае это непростая задача, однако для случая любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \ldots, p_n^{(q)}, \ldots\}$ типа q и моноида $M(PE_q)$ можно дать удовлетворительный ответ.

Теорема 2. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \ldots, p_n^{(q)}, \ldots\}$ типа q для количества простых элементов в моноиде $M(PE_q)$, не превосходящих x, справедливо равенство*

$$\pi_{PE_q}(x) = \frac{\ln x}{\ln q} - \theta_{PE_q}(x),$$

где $0 \leqslant \theta_{PE_q}(x) = \left\{\frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} + \left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} < 2$ *при* $q^n \leqslant x < q^{n+1}$.

В работе [17] было дано определение σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел.

Определение 3. *Последовательность $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел называется σ-последовательностью, если*

$$\mathbb{P}_\sigma = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots\}$$

и найдется N_σ такое, что для любого $n > N_\sigma$ выполняются неравенства

$$n^\sigma \leqslant p_n < (n+1)^\sigma. \tag{2}$$

Нам потребуется теорема Ингама о простых числах в следующей формулировке (см. [29], стр. 66).

Теорема 3. *Существует $X_I > 1$ такое, что для любого $x > X_I$ найдется простое число p_x, для которого выполнены неравенства*

$$x^3 \leqslant p_x \leqslant (x+1)^3. \tag{3}$$

Из этой теоремы сразу следует следующее утверждение.

Пусть $\sigma > 3$ и $X_{I,\sigma} = X_I^{\frac{3}{\sigma}}$, тогда для любого $x > X_{I,\sigma}$ найдется простое число $p_{x,\sigma}$, для которого выполнены неравенства

$$x^\sigma \leqslant p_{x,\sigma} \leqslant (x+1)^\sigma. \tag{4}$$

Из следствия из теоремы Ингама следует, что σ-последовательности простых чисел существуют для любого $\sigma \geqslant 3$.

Остановимся на вопросе о распределении простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел. Обозначим количество простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел, не превосходящих x через $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$. В работе [17] доказана следующая теорема.

Теорема 4. *При $x > N_\sigma : \sigma$ для функции $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$ справедливы равенства*

$$\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = x^{\frac{1}{\sigma}} + \theta(x), \tag{5}$$

где $-2 < \theta(x) < -1$.

Теоремы 2 и 4 непосредственно связаны с тематикой работ Б. М. Бредихина [2]–[10]. Следуя этим работам, определим функции $\nu_{M(PE_q)}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(PE_q)}(x) = \sum_{n\in M(PE_q),\, n\leqslant x} 1, \qquad \nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x) = \sum_{n\in M(\mathbb{P}_\sigma),\, n\leqslant x} 1.$$

В работе [26] решена обратная задача для функций $\nu_{M(PE_q)}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x)$, т. е. нахождение асимптотики для этих функций, зная асимптотики для функций $\pi_{PE_q}(x)$ и $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$. Доказана следующая теорема.

В работе [20] введено понятие основного моноида типа q и показано, что для этого моноида $M(\mathbb{P}(q))$, в котором все простые элементы суть псевдопростые числа образующие множество $\mathbb{P}(q) = \{q^n p_n | n \geqslant 1\}$ p_n — n-ое простое число, справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. *Существует $n_1 = n_1(q) \geqslant n_0$ такое, что при $x \geqslant q^{n_1} n_1 \ln n_1$ справедливы оценки для $\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x)$:*

$$\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x) = \frac{\ln x - \ln\ln x + \ln\ln q - \ln(\ln\ln x - \ln\ln q)}{\ln q} + \theta(x), \quad |\theta(x)| \leqslant 1.$$

Теорема 6. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}(q))|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Целью данной работы будет решение обратной задачи для произвольного основного моноида типа q.

2. Вспомогательные леммы

Пусть M — произвольный моноид натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, $P(M)$ — множество его простых элементов и функции $\nu_M(x)$, $\pi_{P(M)}(x)$ заданы равенствами

$$\nu_M(x) = \sum_{n\in M,\, n\leqslant x} 1, \qquad \pi_{P(M)}(x) = \sum_{r\in P(M),\, r\leqslant x} 1.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\nu_M(x)\ln x = \int\limits_1^x \nu_M(u)\frac{du}{u} + \sum_{k\geqslant 1}\sum_{r\in P(M),\, r\leqslant x} \nu_M\left(\frac{x}{r^k}\right)\ln r. \tag{6}$$

Доказательство. См.[26] □

Лемма 2. *Пусть $q \geqslant 2$ и $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \ldots, p_n^{(q)}, \ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q. Справедливо неравенство*[3]

$$\prod_{p_j^{(q)}\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p_j^{(q)}}\right)^{-1} = \exp\left(\frac{\ln p_1^{(q)}}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1^{(q)}}\right)^{-1} + \frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2 (p_1^{(q)})^k} - O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1^{(q)}}\right)\right)\right), \tag{7}$$

где $x \geqslant p_1^{(q)} > 1$.

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 3. *Пусть $q \geqslant 2$ и $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \ldots, p_n^{(q)}, \ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q. Справедливо неравенство*

$$\nu_{M(PE_q)}(x) \leqslant x\exp\left(\frac{\ln p_1^{(q)}}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1^{(q)}}\right)^{-1} + \frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2 (p_1^{(q)})^k} - O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1^{(q)}}\right)\right)\right), \tag{8}$$

где $x \geqslant p_1^{(q)} > 1$.

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 4. *Пусть $q \geqslant 2$ и $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \ldots, p_n^{(q)}, \ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q и $n_q = \pi(q) + 1$, тогда для любого $j \geqslant n_q$ справедливо неравенство $q^j p_j > p_j^{(q)}$. При $x \geqslant q^{n_q}$ справедливо неравенство $\pi_{M(PE_q)}(x) \geqslant \pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x)$.*

Доказательство. Действительно, при $j \geqslant n_q$ имеем $p_j > q$. Отсюда следует, что $q^j p_j > q^{j+1} > p_j^{(q)} \geqslant q^j$ и первое утверждение доказано.

При $1 \leqslant j < n_q$ имеем $p_j \leqslant q$. Отсюда следует, что $q^j < q^j p_j \leqslant q^{j+1}$ и справедливо равенство $\pi_{M(\mathbb{P}(q))}\left(q^{n_q-1}\right) = n_q - 2$.

Пусть теперь $q^k \leqslant x < q^{k+1}$ и $k \geqslant n_q$, тогда $\pi_{M(PE_q)}(x) = k$ либо $k-1$. Пусть $n_{q,k}$ — максимальный номер j такой, что $j \leqslant k$, $p_j \leqslant q^{k-j}$, тогда

$$q^{n_{q,k}} p_{n_{q,k}} \leqslant q^k, \quad q^{n_{q,k}+1} p_{n_{q,k}+1} > q^k, \quad q^{n_{q,k}+2} p_{n_{q,k}+2} > q^{k+1}.$$

[3]Здесь и далее, как обычно, $\exp(x) = e^x$.

Отсюда следует, что $\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x) = n_{q,k}$ либо $n_{q,k}+1$. Так как $q^{k-1}p_{k-1} > q^k$, то $n_{q,k} < k-1$ и, следовательно, второе утверждение леммы доказано. □

Мы видим, что в данном случае подход Б. М. Бредихина не работает, так как мы заведомо имеем случай для моноидов $M(PE_q)$ и $M(\mathbb{P}(q))$, когда отсутствует степенная θ-плотность, так как при степенной плотности невозможны асимптотические формулы из теорем 2 и 5. Далее мы будем опираться на аддитивную теорему Ингама, но нам удастся получить только две асимптотические оценки сверху и снизу.

3. О двух гомоморфизмах основного моноида типа q

Пусть G — произвольная свободная коммутативная мультипликативная полугруппа с нейтральным элементом e и со счетным числом образующих элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$, множество которых будем обозначать через $\Omega(G)$.

Рассмотрим произвольный гомоморфизм $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел, обладающий тем свойством, что в полугруппе G имеется только конечное число элементов g с $N(g) \leqslant x$ для любого вещественного x. Обозначим через M его образ. Это будет мультипликативный моноид натуральных чисел $M = N(G)$. Вслед за Б. М. Бредихиным (см. [2]), рассмотрим дзета-функцию полугруппы G

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g\in G} \frac{1}{N^\alpha(g)}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_G,$$

где σ_G — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции полугруппы G.

В силу мультипликативности гомоморфизма имеет место разложение в эйлерово произведение

$$\zeta_G(\alpha) = P_G(\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^\alpha(\omega_\nu)}\right)^{-1}$$

в правой полуплоскости $\sigma > \sigma_G$.

Рассмотрим дзета-функцию моноида $M = N(G)$

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции моноида $M = N(G)$.

Вообще говоря, $\zeta_G(\alpha) \neq \zeta(M|\alpha)$. Дело в том, что

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g\in G} \frac{1}{N^\alpha(g)} = \sum_{n\in M} \frac{|N^{-1}(n)|}{n^\alpha},$$

где $N^{-1}(n) = \{g \in G | N(g) = n\}$ — прообраз натурального числа n при гомоморфизме $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел, а $|N^{-1}(n)|$ — количество элементов в этом прообразе, которое конечно в силу ограничений на гомоморфизм $N(g)$.

Таким образом, равенство дзета-функций возможно только в случае изоморфизма G и $M = N(G)$.

Следующее важное обстоятельство связано с тем, что $P(M)$ — множество простых элементов мультипликативного моноида M, вообще говоря, не совпадает с образом множества образующих элементов полугруппы G: $P(M) \subset N(\Omega(G))$.

Напомним, что если через $P(M|\alpha)$ обозначается эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

Таким образом, возможны следующие ситуации:

$$\zeta(M|\alpha) \neq P(M|\alpha), \quad P(M|\alpha) \neq P_G(\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-|N^{-1}(r)|}.$$

Рассмотрим в качестве G мультипликативный моноид $M(\mathbb{P}(q))$ — основной моноид типа q, где $q \geqslant 2$ — любое натуральное число. Определим два гомоморфизма мультипликативного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел:

$$N_1 : M(\mathbb{P}(q)) \to \mathbb{N} : N_1\left(\prod_{\nu=1}^{n} (q^j p_j)^{\beta_j}\right) = q^{\sum_{\nu=1}^{n} j\beta_j},$$

$$N_2 : M(\mathbb{P}(q)) \to \mathbb{N} : N_2\left(\prod_{\nu=1}^{n} (q^j p_j)^{\beta_j}\right) = q^{\sum_{\nu=1}^{n} 2j\beta_j}.$$

Обозначим через $M_1(q)$ образ мультипликативного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ при гомоморфизме N_1, а через $M_2(q)$ при гомоморфизме N_2. Непосредственно из определения следует, что

$$M_1(q) = \{1, q, q^2, q^3, \ldots\}, \quad M_2(q) = \{1, q^2, q^4, q^6 \ldots\}.$$

Отсюда сразу следует, что $P(M_1(q)) = \{q\}$ и $P(M_2(q)) = \{q^2\}$.

Определим функции $\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}(q)),\, N_1(n) \leqslant x} 1, \qquad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}(q)),\, N_2(n) \leqslant x} 1.$$

Лемма 5. *Справедливы неравенства:*
для любого $n \in M(\mathbb{P}(q))$ имеем $N_1(n) \leqslant n \leqslant N_2(n)$,

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) \leqslant \nu_{M(\mathbb{P}(q))}(x) \leqslant \nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x).$$

Доказательство. Пусть $n = \prod_{j=1}^{m} (q^j p_j)^{\beta_j}$, тогда, так как $q^j \leqslant q^j p_j \leqslant q^{2j}$, имеем неравенства

$$N_1(n) = q^{\sum_{j=1}^{m} j\beta_j} \leqslant n \leqslant q^{\sum_{\nu=1}^{m} 2j\beta_j} = N_2(n).$$

Отсюда сразу вытекает двустороннее неравенство для функции $\nu_{M(q^j)}(x)$. □

Обозначим через $p_1(n)$ количество решений в неотрицательных целых числах x_1, x_2, ..., x_r, ... диофантова уравнения

$$n = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + r \cdot x_r + \ldots,$$

а через $p_2(n)$ количество решений диофантова уравнения

$$n = 2(1 \cdot x_1 + \ldots + r \cdot x_r + \ldots).$$

Ясно, что $p_2(2n) = p_1(n)$ и $p_2(2n+1) = 0$.

Положим
$$P_1(x) = \sum_{n\leqslant x} p_1(n), \quad P_2(x) = \sum_{n\leqslant x} p_2(n).$$
Очевидно, что
$$P_2(x) = \sum_{2n\leqslant x} p_1(n) = P_1\left(\frac{x}{2}\right).$$

Лемма 6. *Справедливы равенства*
$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right), \quad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{2\ln q}\right).$$

Доказательство. Действительно, если $N_1(n) = q^m$, то $m = \sum_{\nu=1}^{n} j_\nu\beta_\nu$. Отсюда следует, что количество $n \in M(\mathbb{P}(q))$, таких что $N_1(n) = q^m$, в точности равно $p_1(m)$. Так как из $N_1(n) = q^m \leqslant x$ следует, что $m \leqslant \frac{\ln x}{\ln q}$, то первое равенство доказано.

Аналогично, если $N_2(n) = q^{2m}$, то $m = \sum_{\nu=1}^{n} j_\nu\beta_\nu$. Отсюда следует, что количество $n \in M(\mathbb{P}(q))$, таких что $N_2(n) = q^{2m}$, в точности равно $p_2(2m)$. Так как из $N_2(n) = q^{2m} \leqslant x$ следует, что $m \leqslant \frac{\ln x}{2\ln q}$, то второе равенство доказано. □

4. Следствия из аддитивной теоремы Ингама

Нам потребуется следующая аддитивная теорема Ингама (см. [27], стр. 180), которую мы приведём в сокращённой форме.

Теорема 7. *Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ — данная последовательность вещественных чисел, причём*
$$N(u) = Bu^\beta + R(u), \quad B > 0, \quad \beta > 0,$$
где $N(u)$ — количество чисел λ_ν, не превосходящих u, и
$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v} dv = b\ln u + c + o(1)$$
при $u \to \infty$. Для вещественного l пусть будет $p(l)$ — количество решений уравнения
$$l = r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \ldots$$
в целых $r_\nu \geqslant 0$.

Обозначим для вещественного u
$$P(u) = \sum_{l<u} p(l),$$
где суммирование ведется по дискретному множеству чисел l, для которых $p(l) \neq 0$.

Тогда при $u \to \infty$
$$P(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^c M^{-\left(b+\frac{1}{2}\right)\alpha} u^{\left(b+\frac{1}{2}\right)(1-\alpha)-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}(Mu)^\alpha},$$
где
$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad M = (B\beta\Gamma(\beta+1)\zeta(\beta+1))^{\frac{1}{\beta}}.$$

Следствие 1. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$P_1(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}, \quad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}},$$

$$\ln \nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln 2\frac{\ln x}{\ln q}.$$

Доказательство. Положим $\lambda_\nu = \nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), тогда $N(u) = [u]$, $R(u) = [u] - u$, $B = \beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ и (см. [27], стр. 181)

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v} dv = -\frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1).$$

Таким образом, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P_1(x) = P(x) \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\ln 2\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{2\left(\frac{\pi^2}{6}x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}},$$

$$\ln \nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln 2\frac{\ln x}{\ln q}.$$

□

Следствие 2. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$P_2(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{x}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}x}}, \quad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}},$$

$$\ln \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln \frac{\ln x}{\ln q}.$$

Доказательство. В силу предыдущего следствия имеем:

$$P_2(x) = P_1\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{x}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}x}},$$

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{2\ln q}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}},$$

$$\ln \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln \frac{\ln x}{\ln q}.$$

□

5. Заключение

В работе [6] и ряде последующих Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности. Из следствий 1–2 видно, что это понятие не работает в случае основных моноидов типа q. В работе [26] было дано естественное новое определение.

Определение 4. *Последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ-степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством*

$$\nu_M(x) = \sum_{n\in M,\, n\leqslant x} 1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \nu_M(x)}{\ln^\theta x} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Из следствия 1–2 следует, что любой основной моноид $M(\mathbb{P}(q))$, если имеет C логарифмическую θ-степенную плотность, то $\theta = \frac{1}{2}$, а для константы C справедливы неравенства

$$\pi\sqrt{\frac{1}{3\ln q}} \leqslant C \leqslant \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}.$$

Таким образом, остается открытым вопрос о существовании логарифмической $\frac{1}{2}$-степенной плотности и, если она существует, то о величине константы C.

В заключение авторы выражают свою благодарность профессору В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.
2. Б. М. Бредихин, “Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$”, Изв. вузов. Матем., 1960, 6, 40–49.
3. Б. М. Бредихин, “Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп”, Матем. сб., 50(92):2 (1960), 221–232.
4. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.
5. Б. М. Бредихин, “О степенных плотностях некоторых подмножеств свободных полугрупп”, Изв. вузов. Матем., 1958, 3, 24–30.
6. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Матем. сб., 46(88):2 (1958), 143–158.
7. Б. М. Бредихин, “Пример конечного гомоморфизма с ограниченной сумматорной функцией”, УМН, 11:4(70) (1956), 119–122.
8. Б. М. Бредихин , Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полугрупп, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, т. I, Москва, Изд. АН СССР (1956), 3.
9. Б. М. Бредихин , О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп, ДАН 94 (1954), 609 — 612.

10. Б. М. Бредихин , О характерах числовых полугрупп с достаточно редкой базой, ДАН 90 (1953), 707 — 710.

11. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

12. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

13. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.

14. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Б. Кожухов, И. Ю. Реброва. Моноид произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 3, С. 102–117.

15. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

16. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

17. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

18. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

19. Н. Н. Добровольский, "Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщенных произведений Эйлера", Матем. заметки, 109:3 (2021), 464–469

20. Н. Н. Добровольский. Распределение простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Матем. заметки (в печати).

21. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

22. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

23. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

24. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

25. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

26. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник, 2020, Т. 21, вып. 1, С. 165–185.

27. А. Г. Постников Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971. — 416 с.

28. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.

29. Э. Трост Простые числа — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959. — 136 с.

30. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.

31. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

32. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, “Around the Davenport–Heilbronn function”, *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

2. Bredikhin, B.M., 1960, “The remainder term in the asymptotic formula for the function $\nu_G(x)$”, Izvestiya vuzov Matematika, no. 6, pp. 40–49.

3. Bredikhin, B.M., 1960, “An elementary solution of inverse problems on bases of free semigroups”, matematicheskiy sbornik, 50(92):2, pp. 221–232.

4. Bredikhin, B.M., 1958, “Free numerical semigroups with power densities”, Doklady Akademii nauk SSSR, 118:5, pp. 855–857.

5. Bredikhin, B.M., 1958, “On power densities of some subsets of free semigroups”, Izvestiya vuzov Matematika, no. 3, pp. 24–30.

6. Bredikhin, B.M., 1958, “Free numerical semigroups with power densities”, matematicheskiy sbornik, 46(88):2, pp. 143–158.

7. Bredikhin, B.M., 1956, “An example of a finite homomorphism with a bounded adder function”, UMN, 11:4(70), pp. 119–122.

8. Bredikhin, B.M., 1956, “Some questions of the theory of characters of commutative semigroups”, Trudy 3-go Vsesoyuznogo matematicheskogo s’yezda, vol. 1, Moskva, izdatel’stvo akademii nauk SSSR, no. 3.

9. Bredikhin, B.M., 1954, “On adder functions of characters of numerical semigroups”, DAN 94, pp. 609 – 612.

10. Bredikhin, B.M., 1953, “On the characters of numerical semigroups with a rather rare base”, DAN 90, pp. 707–710.

11. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

12. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

13. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol’skii N. N., Dobrovol’skii N. M., Dobrovol’skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil’kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

14. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.

15. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.

16. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 142–150.

17. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

18. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

19. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.

20. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.

21. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

22. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

23. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Inverse problem for a monoid with an exponential sequence of Prime numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 165–185.

24. Postnikov, A. G., 1971, *Introduction to analytical number theory* Izd-vo "Nauka" , Moskva, 416 p.

25. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.

26. Trost E., 1959, "Prime numbers" , *Izd-vo Fiz-matlit, Moskva*, 136 p.

27. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

28. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

29. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series" , *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

Получено: 17.06.2022
Принято в печать: 8.12.2022