В. Д. Репников, Об одном методе решения уравнений с частными производными и однородными краевыми или начальными условиями, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 3, 423–425

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 423–425

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ ИЛИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2005 г. В. Д. Репников

Известно, что преобразование Кельвина [1, с. 81] переводит всякую гармоническую в E_n функцию в другую гармоническую. Однако при помощи этого преобразования в E_3 получается следующий более общий результат. Пусть $F(u,v,w)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция и $K(x,y,z) = r^{-1}F(xr^{-2}, yr^{-2}, zr^{-2})$, $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Тогда лапласианы этих функций связаны между собой равенством $F''_{uu} + F''_{vv} + F''_{ww} = r^5(K''_{xx} + K''_{yy} + K''_{zz})$ при $u = xr^{-2}$, $v = yr^{-2}$, $w = zr^{-2}$. Поэтому функции $F(u,v,w)$ и $K(x,y,z)$ одновременно гармоничны или нет. Аналогичный факт имеет место в n-мерном случае.

Цель данной работы – установление такого же типа связи между однородными функциями нулевого измерения пространства E_3 и функциями плоскости и применение этих результатов для решения дифференциальных уравнений с частными производными и однородными (нулевого измерения) краевыми или начальными условиями, заданными в трехмерном пространстве.

Для этого рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f(u,v)$ в полосе $0 \le v \le 2\pi$ такую, что $f(u,0) = f(u,2\pi)$. В дальнейшем всюду

$$u(x,y,z) = \ln[((x^2+y^2+z^2)^{1/2} + z)(x^2+y^2)^{-1/2}], \quad v(x,y) = \operatorname{Arg}(x+iy), \tag{1}$$

т.е. если $\operatorname{Arg}(x+iy) \in [-\pi/2, \pi/2]$, $v(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x)$; все функции трех переменных будут рассматриваться в пространстве с выброшенной неотрицательной полуосью Oz $(x=0,\ y=0,\ z\ge 0)$.

Функции $u(x,y,z)$ и $v(x,y)$ в E_3 обладают следующими свойствами: они гармоничны, $|\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} v| = (x^2+y^2)^{-1/2}$, $\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0$. Благодаря этому имеет место

Теорема 1. *Лапласианы функций $f(u,v)$ и $f(u(x,y,z), v(x,y)) \stackrel{\text{def}}{=} F(x,y,z)$ связаны между собой соотношением*

$$(x^2+y^2)(F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz}) = f''_{uu} + f''_{vv}.$$

Отсюда вытекает

Теорема 2. *Если $f(u,v)$ – гармоническая функция, то тем же свойством обладает и функция $F(x,y,z)$ всюду, кроме прямой $x=0$, $y=0$.*

В дальнейшем будем существенно пользоваться тем, что $F(x,y,z)$ – однородная функция нулевого измерения $(F(tx,ty,tz) = F(x,y,z),\ t>0)$. Это следует из того, что тем же свойством обладают функции $u(x,y,z)$ и $v(x,y)$.

Используя равенства (1), легко проверить равенства

$$y = x \operatorname{tg} v(x,y), \quad z = x \operatorname{sh} u(x,y,z)(\cos v(x,y))^{-1},$$

из которых следует, что $f(u,v) = F(\cos v, \sin v, \operatorname{sh} u)$. Отсюда и из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Если функция $F(x,y,z)$ гармонична и постоянна на каждом луче, исходящем из начала координат, кроме оси Oz, то $f(u,v) = F(\cos v, \sin v, \operatorname{sh} u)$ гармонична.*

Примером функции, удовлетворяющей условию теоремы 3, является $u(x,y,z)$. Применение преобразования Кельвина к однородной функции сводится к ее умножению на r^{-1}. Отсюда следует, что $K(x,y,z) = r^{-1}F(x,y,z)$ – гармоническая функция, если $F(x,y,z)$ гармонична, и

$$(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(x^2+y^2)(K''_{xx} + K''_{yy} + K''_{zz}) = f''_{uu} + f''_{vv}.$$

При помощи функций, определенных равенствами (1), установлено биективное соответствие между лучами в E_3, исходящими из начала координат, и точками полосы $0 \le v \le 2\pi$. Можно считать, что $(u,0)$ и $(u,2\pi)$ – одна и та же точка, т.е. вместо полосы рассматривать цилиндр. Если этот цилиндр конформно отобразить на плоскость (a,b) по формуле $a+ib = \exp(u+iv)$, т.е. $a = \exp u \cdot \cos v$, $b = \exp u \cdot \sin v$ $(u = 2^{-1}\ln(a^2+b^2),\ v = \operatorname{Arg}(a+ib))$, то будет установлено взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости (a, b) и лучами, исходящими из начала координат в E_3, за исключением неотрицательной полуоси Oz. При этом

$$a = x((x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z)^{-1}, \quad b = y((x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z)^{-1}, \tag{2}$$

$\operatorname{grad} a \cdot \operatorname{grad} b = 0$, $|\operatorname{grad} a| = |\operatorname{grad} b| = ((x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z)^{-1}$.

Отсюда следует, что $2^{-1}(a^2+b^2-1) = z((x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z)^{-1}$, и поскольку $F(x, y, z)$ – однородная функция, то $F(x, y, z) = F(a, b, 2^{-1}(a^2+b^2-1)) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(a, b)$. Функция $\psi(a, b)$ связана с $f(u, v)$ равенством $\psi(a, b) = f(2^{-1}\ln(a^2+b^2),\ \operatorname{Arg}(a+ib))$.

Заметим, что если $z = z_0 > 0$, а x и y стремятся к нулю вдоль некоторого луча плоскости $z = z_0$, то a и b стремятся к бесконечности; если же $z_0 < 0$, то a и b стремятся к нулю при $x \to 0$, $y \to 0$. Поэтому естественно считать, что отрицательной полуоси Oz соответствует начало координат в плоскости (a, b). Полезно отметить, что окружности $a^2+b^2 = R^2$ соответствует конус в E_3, вершина которого находится в начале координат, а образующие составляют с положительной осью Oz угол θ, который удовлетворяет равенству $(1+\cos\theta)^2\sin^{-2}\theta = R^2$, т.е. $\operatorname{ctg}(\theta/2) = R$. Это вытекает из равенств (2), если перейти к сферической системе координат (ρ, φ, θ). Точке плоскости (a, b), которой соответствует полярный угол φ_0, соответствует в E_3 луч, для которого $\varphi = \varphi_0$, а окружности радиуса единица с центром в начале координат – лучи плоскости xOy.

Лапласианы определенных выше функций связаны между собой соотношениями

$$f''_{uu} + f''_{vv} = (a^2+b^2)(\psi''_{aa} + \psi''_{bb}), \quad ((x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z)^2(F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz}) = \psi''_{aa} + \psi''_{bb}. \tag{3}$$

Отсюда вытекает

Утверждение 1. *Всякая гармоническая функция $\psi(x, y)$ порождает в трехмерном пространстве однородную (нулевого измерения) гармоническую функцию $F(x, y, z)$.*

Укажем геометрический способ, которым функция $F(x, y, z)$ получается из $\psi(x, y)$. Для этого в точках параболоида вращения $z = 2^{-1}(x^2+y^2-1)$ положим $F(x, y, z) = \psi(x, y)$. В остальных точках трехмерного пространства доопределим эту функцию так, чтобы она была постоянной на каждом луче, исходящем из начала координат, т.е. доопределим ее значением функции $F(x, y, z)$ в точке пересечения этого луча с параболоидом. Так получаем формулу

$$F(x, y, z) = \psi(x((x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z)^{-1}, y((x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z)^{-1}).$$

Подчеркнем, что на плоскости xOy функция $\psi(x, y)$ совпадает с $F(x, y, z)$ только на окружности $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$.

После того как функция $F(x, y, z)$ определена, можно таким же геометрическим способом, каким была найдена функция $\psi(x, y)$ в плоскости xOy, найти по $F(x, y, z)$ другую гармоническую функцию двух переменных в любой плоскости, проходящей через начало координат. Нормальное уравнение любой такой плоскости записывается в виде $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$. Для того чтобы найти гармоническую на ней функцию, нужно на этой плоскости выбрать ортогональную систему координат (x', y'), а в качестве оси Oz' взять ось, одинаково направленную с вектором $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Новая система координат получается из старой ортогональным преобразованием. При этом $F(x, y, z)$ перейдет в $F_1(x', y', z')$, затем остается воспользоваться формулой $\psi_1(x', y') = F_1(x', y', 2^{-1}(x'^2+y'^2-1))$.

Итак, имеет место

Утверждение 2. *Всякая однородная гармоническая функция $F(x, y, z)$ определяет в любой плоскости, проходящей через начало координат, гармоническую функцию двух переменных, свою в каждой плоскости.*

Так, функция $F(x, y, z) = x((x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z)^{-1}$ в плоскости xOy определяет гармоническую функцию $\psi(x, y) = F(x, y, 2^{-1}(x^2+y^2-1)) = x$, а в плоскости xOz – функцию

$$\psi_1(x, z) = F(x, 2^{-1}(x^2+z^2-1), z) = 2x(x^2+(z-1)^2)^{-1}.$$

Таким образом, любая гармоническая функция $\psi(x, y)$ определяет другие гармонические функции, свою в каждой плоскости, проходящей через начало координат.

В заключение приведем примеры использования полученных формул для нахождения решений дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Пример 1. Требуется найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $T''_{xx} + T''_{yy} + T''_{zz} = 0$ внутри конуса $\pi/2 < \theta_0 < \theta < \pi$ при граничном условии $\Phi(\varphi)$, заданном в сферической системе координат. Используя соотношения (3), заключаем, что эта задача эквивалентна задаче Дирихле для уравнения $\psi''_{aa}+\psi''_{bb} = 0$ в круге $a^2+b^2 < \operatorname{ctg}^2(\theta/2) = r_0^2$ с граничным условием $\psi(a, b)|_{a^2+b^2=r_0^2} = \Phi(\varphi)$,

$\varphi = \mathrm{Arg}(a+ib)$. Решение этой задачи $\psi(a,b)$ задается интегралом Пуассона [2, с. 311]. Теперь остается вместо a и b подставить их выражения, определенные формулами (2).

Тот же результат должен получаться для любого расположения конуса того же раствора с тем же граничным условием на его поверхности. Нетрудно показать, что этот результат справедлив и для конуса, осью которого является не отрицательная, а положительная полуось. В этом случае внутренние лучи конуса соответствуют точкам вне круга $a^2+b^2 \le \mathrm{ctg}^2(\theta/2)$, и для отыскания решения в данном конусе надо решать задачу Дирихле вне указанного круга. Но известно, что решение внешней задачи получается из решения внутренней, поскольку их решения совпадают в точках (a,b) и $(a(a^2+b^2)^{-1}, b(a^2+b^2)^{-1})$. Поэтому и решения в конусах на лучах, сферические координаты которых (ρ,φ,θ) и $(\rho,\varphi,\pi-\theta)$, также совпадают.

Пример 2. Требуется найти решение $T(t,x,y,z)$ параболической задачи Коши с вырождением на оси $Oz:$ $T'_t = (x^2+y^2)(T''_{xx}+T''_{yy}+T''_{zz})$, $T(0,x,y,z) = F(x,y,z)$. Начальная функция предполагается однородной нулевого измерения и удовлетворяющей условию

$$F(\cos v, \sin v, \mathrm{sh}\, u) < c(\varepsilon)\exp(\varepsilon u^2). \qquad (4)$$

Для достижения цели рассмотрим решение $Q(t,u,v)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности, построенное по начальной функции $f(u,v) = F(\cos v, \sin v, \mathrm{sh}\, u)$. Эта функция периодична по v с периодом 2π и в силу условия (4) принадлежит классу единственности, т.е. тихоновскому классу [3]. Из представимости решения $Q(t,u,v)$ в виде интеграла Пуассона следует, что оно также периодично по v с тем же периодом, поэтому его достаточно рассмотреть в полосе $0 \le v \le 2\pi$, после чего вместо u, v подставить их выражения из (1). Из теоремы 1 следует, что $T(t,x,y,z) = Q(t,u(x,y,z),v(x,y))$, причем решение $T(t,x,y,z)$ однородно по переменным x, y, z.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 02-01-00307).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тиман А.Ф., Трофимов В.Н.* Введение в теорию гармонических функций. М., 1968.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
3. *Тихонов А.Н.* // Мат. сб. 1935. Т. 42. № 2. С. 198–216.

Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 10.06.2003 г.