Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. В. Линник, Н. А. Шанин, Андрей Андреевич Марков (к пятидесятилетию со дня рождения),
УМН, 1954, том 9, выпуск 1, 145–149

https://www.mathnet.ru/rm8052

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.83
13 января 2026 г., 08:32:15

1954 г. январь—февраль *т. IX, вып. 1 (59)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

АНДРЕЙ АНДРЕЕВИЧ МАРКОВ

(К пятидесятилетию со дня рождения)

Ю. В. Линник и Н. А. Шанин

22 сентября 1953 г. исполнилось 50 лет со дня рождения выдающегося советского математика члена-корреспондента АН СССР, профессора Ленинградского государственного университета, Андрея Андреевича Маркова.

Детские и юношеские годы Андрея Андреевича протекали в постоянном общении с его отцом академиком Андреем Андреевичем Марковым—одним из наиболее выдающихся математиков конца XIX и начала XX века. Академик А. А. Марков был воспитателем своего сына не только в семейной обстановке, но в течение некоторого периода времени он оказался школьным учителем сына. В 1917/18 учебном году семья академика А. А. Маркова жила в маленьком городке Зарайске и академик А. А. Марков, стремясь удовлетворить свою потребность в педагогической деятельности, преподавал математику в школе, в том классе, где учился его сын.

В 1919 г. Андрей Андреевич окончил среднюю школу, а в 1924 г.—физико-математический факультет Ленинградского государственного университета по отделению физики. После окончания университета он несколько месяцев работал научным сотрудником Государственного физико-технического института, а затем перешёл в Астрономический институт. В Астрономическом институте Андрей Андреевич сначала состоял аспирантом (1925—1928 гг.), а по окончании аспирантуры—научным сотрудником (до 1935 г.).

В 1934 г. началась деятельность Андрея Андреевича в Ленинградском государственном университете. В 1935 г. ему была присуждена (без защиты диссертации) степень доктора физико-математических наук, а в начале 1936 г. — звание профессора. В октябре 1953 г. А. А. Марков был избран членом-корреспондентом АН СССР. С 1939 г. А. А. Марков работает в Ленинградском отделении Математического института им. В. А. Стеклова.

Первые опубликованные в печати научные работы А. А. Маркова относятся к теоретической физике и небесной механике. О содержании этих работ некоторое представление дают их названия: «Об одном минимальном свойстве шредингеровских волновых групп» (1927 г.), «О некоторых случаях движения в проблеме трёх тел» (1928 г.), «Закон десяти третей и классификация соударений в общей задаче трёх тел» (1929 г.), «О выводимости мировой метрики из отношения „раньше чем“» (1932 г.).

В начале 30-х годов научные интересы А. А. Маркова концентрируются вокруг проблем общей теории динамических систем. В работах А. А. Маркова дано независимое от дифференциальных уравнений общее определение динамических систем, лежащее в основе современного аксиоматического направления в этой теории, получены тонкие критерии почти периодичности движений, установлен ряд глубоких свойств минимальных множеств.

К работам по теории динамических систем примыкают исследования А. А. Маркова об интегральных инвариантах и о мере в абстрактных пространствах. В этих исследованиях проводится более общая точка зрения, чем та, которая характерна для аксиоматической теории динамических систем. В теории динамических систем существенную роль играет понятие интегрального инварианта. А. А. Марков обобщает это понятие на тот случай, когда рассматриваются произвольное множество E, произвольное вполне аддитивное семейство $\mathfrak{M}$, произвольная вполне аддитивная функция μ, определённая на $\mathfrak{M}$, и произвольное абелево множество отображений [1]) Γ, удовлетворяющее условию $\varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$, каковы бы ни были $A \in \mathfrak{M}$ и $\varphi \in \Gamma$. Применительно к этому весьма общему случаю А. А. Марков устанавливает простые необходимые и достаточные условия существования интегрального инварианта относительно заданного абелева множества отображений Γ. С этими результатами тесно связаны исследования А. А. Маркова по теории меры в топологических пространствах, в которых полностью выясняется связь между внешними плотностями множеств в нормальных топологических пространствах и функционалами специального типа (так называемыми средними значениями) на множестве непрерывных ограниченных функций. Здесь же исчерпывающим образом характеризуется связь между свойствами полуинвариантности и инвариантности внешней плотности по отношению к заданному непрерывному отображению пространства в себя и свойством инвариантности соответствующего среднего значения по отношению к тому же отображению.

Наряду с теорией динамических систем и теорией меры внимание А. А. Маркова привлекает топология. Важным достижением А. А. Маркова в комбинаторной топологии является полная алгебраизация проблемы свободной эквивалентности замкнутых кос и проблемы комбинаторной эквивалентности произвольных зацеплений, а также глубокое алгебраическое исследование группы кос.

Одновременно с теорией динамических систем, теорией меры и топологией А. А. Марков занимается некоторыми вопросами теории полиномов. Им получена интересная характеризация тригонометрических полиномов, усилен результат Артина о представлении дефинитных функций (являющийся решением одной из проблем Гильберта) посредством обобщения его на относительно дефинитные функции, найден алгорифм для определения числа

---

[1]) Множество Γ, состоящее из отображений множества E в себя, называется *абелевым множеством отображений*, если, каковы бы ни были $\varphi, \psi \in \Gamma$ и $x \in E$, выполняется условие $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x))$. Если $f(t, x)$—динамическая система в фазовом пространстве E, то отображения множества E в себя, получаемые из $f(t, x)$ посредством фиксации первого аргумента, образуют абелево множество отображений.

вещественных корней полинома с рациональными коэффициентами, лежащих в области, определяемой системой алгебраических неравенств с рациональными коэффициентами.

Сочетание топологических и алгебраических интересов А. А. Маркова особенно ярко проявилось в большом цикле работ по топологической алгебре. Первые исследования А. А. Маркова в этой области посвящены топологической характеризации конечномерных линейных топологических пространств среди всевозможных топологических групп. В работе «О конечномерных векторных пространствах» (1935 г.) устанавливается, что *всякая коммутативная, локально бикомпактная и связная топологическая группа может быть отображена на конечномерное векторное топологическое пространство посредством непрерывного гомоморфизма, обладающего следующим свойством: полный прообраз любого бикомпактного множества является бикомпактным множеством.* Из этого глубокого результата вытекает следующая теорема:

Топологическая группа G тогда и только тогда топологически изоморфна некоторому конечномерному векторному пространству, когда G локально бикомпактна, связна, коммутативна и не имеет бикомпактных подгрупп, содержащих более одной точки.

Дальнейшие работы А. А. Маркова по топологической алгебре посвящены свободным топологическим группам. Эти исследования были начаты в 1940 г. и завершены к 1946 г.

Л. С. Понтрягиным было доказано, что топологическое пространство всякой топологической группы вполне регулярно. После этого возникла проблема о существовании топологических групп, не являющихся нормальными топологическими пространствами. Эта проблема была решена А. А. Марковым посредством создания специального метода, который позволил ему не только доказать существование топологических групп, топологическое пространство которых не удовлетворяет условию нормальности, но и выработать понятие свободной топологической группы, детально разработать теорию таких групп и с её помощью разрешить ряд глубоких проблем общей теории топологических групп. В частности, методами теории свободных топологических групп А. А. Марковым доказано существование связных периодических топологических групп любой мощности, не меньшей мощности континуума, установлено для любой счётной группы совпадение так называемых алгебраических подмножеств группы с теми подмножествами, которые оказываются замкнутыми при любой топологизации группы, получен простой алгебраический критерий существования нетривиальной топологизации счётной группы. Теория свободных топологических групп явилась значительным этапом в развитии топологической алгебры.

Начиная с 1946 г., научные интересы А. А. Маркова концентрируются в новой области—в теории алгорифмов и математической логике. Здесь творческая сила А. А. Маркова проявилась наиболее ярко и дала особенно глубокие научные результаты.

В математике ещё со времени Евклида стихийно складывалось и применялось понятие алгорифма. Однако это понятие до недавнего времени не имело точного определения и потому не могло служить предметом математического

исследования. Около 20 лет назад в математике произошло событие большого принципиального значения—было выработано точное математическое понятие арифметического алгорифма. Почти одновременно различные авторы—Тюринг, Черч, Клин (последний—основываясь на работах Эрбрана и Гёделя)—предложили несколько совершенно различных по форме, но эквивалентных по существу математических понятий, уточняющих стихийно сложившееся неточное понятие арифметического алгорифма. Среди таких математических понятий наибольшую известность приобрело понятие частично рекурсивной функции (Клин). Частными случаями этого понятия являются понятия примитивно рекурсивной функции и общей рекурсивной функции.

Одна из первых работ А. А. Маркова в теории алгорифмов посвящена рекурсивным функциям. В ней получен результат, исчерпывающий вопрос о представлении частично рекурсивных и общих рекурсивных функций посредством примитивно рекурсивных функций.

Арифметические алгорифмы составляют довольно узкий класс алгорифмов, применяемых в математике. Во многих случаях объектами применения алгорифмов служат слова в каком-либо фиксированном алфавите. Для этих случаев точное понятие алгорифма может быть сформулировано на основе точного понятия арифметического алгорифма с помощью специального приёма—так называемого метода арифметизации слов. Этот метод состоит в фиксации некоторого конкретного (уже не арифметического) алгорифма, сопоставляющего каждому слову в рассматриваемом алфавите некоторое натуральное число и позволяющего однозначно восстановить слово по соответствующему числу. Уже понятие частично рекурсивной функции довольно сложно, а привлечение метода арифметизации слов делает точное понятие алгорифма в любом алфавите, необходимое для алгебры, математического анализа, математической логики и других областей математики и получаемое на указанном выше пути, очень громоздким, технически сложным и в значительной степени косвенным.

Замечательным и очень важным достижением А. А. Маркова является разработка совершенно нового по замыслу понятия *нормального алгорифма*, непосредственным образом решающего проблему уточнения общего понятия алгорифма в произвольном алфавите и весьма выгодно отличающегося от всех ранее предложенных вариантов решения этой проблемы своей неожиданной простотой и наглядностью.

А. А. Марковым разработана глубокая и богатая принципиальными результатами теория нормальных алгорифмов. Понятие нормального алгорифма дало возможность А. А. Маркову радикально усовершенствовать и продвинуть вперед теорию алгорифмов, поставить эту теорию на простую и наглядную основу и значительно расширить возможности различных её приложений.

Соотношение между нормальными алгорифмами и алгорифмами, определяемыми с помощью частично рекурсивных функций, исследовано В. К. Детловсом—учеником А. А. Маркова. В кандидатской диссертации В. К. Детловса доказана эквивалентность этих двух уточнений общего понятия алгорифма.

Большую роль в математике играют так называемые массовые задачи. Каждая такая задача состоит в нахождении алгорифма, который в применении к любому объекту некоторого точно охарактеризованного типа давал бы ответ на вопрос, обладает или не обладает рассматриваемый объект некоторым определённым свойством. С тех пор, как в математике было выработано точное понятие алгорифма, получил точный смысл и вопрос о разрешимости тех или иных массовых задач. Начиная с 1946 г., А. А. Марков предпринимает исследование ряда массовых проблем алгебры и получает в этом направлении результаты большого научного значения. В частности, в 1946 г. им доказана невозможность алгорифмов, дающих решения проблемы тождества и проблемы односторонней делимости для некоторых конкретных ассоциативных исчислений. В дальнейшем эти результаты были им развиты до теорем большой общности, касающихся целых классов массовых задач теории ассоциативных исчислений. Далее, А. А. Марков устанавливает невозможность алгорифмов, дающих решения некоторых массовых задач теории целочисленных матриц. Из числа этих результатов приведём одну особенно замечательную теорему.

Пусть $U_1, \ldots, U_p$—фиксированные квадратные целочисленные матрицы порядка n. О квадратной целочисленной матрице U порядка n говорят, что она *представима через матрицы* $U_1, \ldots, U_p$, если существуют такие целые положительные числа q, $i_1, \ldots, i_q$ $(1 \leqslant i_k \leqslant p)$, что матрица U равна произведению матриц $U_{i_1}, \ldots, U_{i_q}$.

Теорема А. А. Маркова. *При всяком $n \geqslant 6$ может быть так построена система целочисленных матриц $U_1, \ldots, U_p$ порядка n, что окажется невозможным алгорифм, распознающий для любой целочисленной матрицы U порядка n, представима ли она через матрицы $U_1, \ldots, U_p$.*

Итог своих обширных исследований в области теории алгорифмов и её приложений к алгебре А. А. Марков подвёл в капитальной монографии «Теория алгорифмов».

Приведённый выше обзор не исчерпывает круга научных интересов А. А. Маркова. Им выполнен также ряд важных работ в теоретико-множественной топологии, геометрии, в области аксиоматики теории множеств. В период Великой Отечественной войны А. А. Марков обращается к темам прикладной математики. В частности, находясь в осаждённом Ленинграде в течение тяжёлой блокадной зимы 1941/42 г. и разделяя со всеми жителями города общие гражданские обязанности, опасности и лишения, он не прекращает научной деятельности и пишет работу по теории пластичности.

За время своей многолетней педагогической деятельности в Ленинградском университете Андрей Андреевич воспитал значительное число учеников, для которых всегда оригинальные и всегда насыщенные новыми идеями лекционные курсы Андрея Андреевича служат превосходной школой точного и глубокого математического мышления.

К своему пятидесятилетнему юбилею Андрей Андреевич приходит в расцвете творческих сил и с большими творческими замыслами на будущее.