МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 23, № 2 (1978)

УДК 512

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ С БЕСКОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ

В. Л. Попов

В статье классифицированы с точностью до изоморфизма неприводимые алгебраические кривые X (не обязательно гладкие и полные), группа Aut X бирегулярных автоморфизмов которых бесконечна. Даны приложения полученных результатов к теории алгебраических групп преобразований. Библ. 4 назв.

Далее k — алгебраически замкнутое поле; все многообразия определены над k и отождествляются с множеством своих k-точек. Всюду, кроме пп. 6 и 11, char k произвольна, а в этих пунктах — нулевая.

Обозначения. X — кривая с бесконечной группой Aut X; π: $X^н \to X$ — нормализация X; k^* — мультипликативная, а k_+ — аддитивная группы поля k; $|M|$ — число элементов в множестве M; $\mathbf{P}^1$ — проективная прямая; $\mathbf{A}^1$ — аффинная прямая; $\mathbf{A}^1_*$ — аффинная прямая без точки; $g(Y)$ — геометрический род многообразия Y; $\mathcal{O}_{y,Y}$ — локальное кольцо в точке y многообразия Y; $\mathfrak{m}_{y,Y}$ — максимальный идеал $\mathcal{O}_{y,Y}$; sing Y — подмногообразие особенностей в Y.

Далее Aut X отождествляется с подгруппой в Aut $X^н$, так что $\pi\circ a = a\circ\pi$ $\forall a \in$ Aut X.

1. Конструкция особой кривой по ее нормальной модели. Неприводимые кривые с заданной нормальной моделью Y описываются следующей конструкцией Розенлихта — Серра [1], [2].

Пусть $S \subset Y$ — конечное подмножество и R — такое отношение эквивалентности на точках Y, что $x = \{y \in Y \mid y \overset{R}{\sim} x\}$ $\forall x \in Y - S$. Пусть p: $Y \to Y/R$ — каноническая проекция. Снабдим Y/R топологией, в которой собственные замкнутые множества являются конечными множествами. Для каждой точки $z \in Y/R$ рассмотрим полулокальное кольцо $\mathcal{O}_z = \bigcap_{p(y)=z} \mathcal{O}_{y,Y}$ и его радикал $\mathfrak{r}_z = \bigcap_{p(y)=z} \mathfrak{m}_{y,Y}$. На Y/R определим пучок $\mathcal{O}'$ локальных колец $\mathcal{O}'_z$, $z \in Y/R$ по правилу: $\mathcal{O}'_z = \mathcal{O}_z \, \forall z \notin p(S)$ и для $z \in p(S)$ $\mathcal{O}'_z$ есть произвольное подкольцо в $\mathcal{O}_z$, удовлетворяющее условию:

$$k + \mathfrak{r}_z \supseteq \mathcal{O}'_z \supseteq k + \mathfrak{r}_z^n$$

для некоторого $n > 0$, зависящего от z (1)

Тогда окольцованное пространство $(Y/R, \mathcal{O}')$ является неприводимой алгебраической кривой, $p\colon Y \to Y/R$ — ее нормализацией и, если $\Sigma = \{s \in S \mid \mathcal{O}'_{p(s)} \neq \mathcal{O}_{p(s)}\}$, то $p(\Sigma) = \operatorname{sing}(Y/R, \mathcal{O}')$ (мы не исключаем случай $\Sigma = \phi$).

Предложение 1. *Элемент* $h \in \operatorname{Aut} Y$ *лежит в* $\operatorname{Aut}(Y/R, \mathcal{O}')$ *тогда и только тогда, когда*:

1) *h сохраняет R, т. е.* $x \overset{R}{\sim} y \Rightarrow h(x) \overset{R}{\sim} h(y)$;

2) *h индуцирует изоморфизм* $\mathcal{O}'_z$ *и* $\mathcal{O}'_{h(z)} \, \forall z \in Y/R$.

Доказательство очевидно.

Σ инвариантно относительно $\operatorname{Aut}(Y/R, \mathcal{O}')$. Пусть $\Sigma \neq \phi$ и

$$\operatorname{Aut}_\Sigma Y = \{h \in \operatorname{Aut} Y \mid h(s) = s \ \forall s \in \Sigma\},$$

$$\operatorname{Aut}_\Sigma (Y/R, \mathcal{O}') = \operatorname{Aut}(Y/R, \mathcal{O}') \cap \operatorname{Aut}_\Sigma Y.$$

Тогда

$$[\operatorname{Aut}(Y/R, \mathcal{O}') : \operatorname{Aut}_\Sigma (Y/R, \mathcal{O}')] < \infty. \qquad (2)$$

2. Нормализация кривой X.

Предложение 2. *Либо* $g(X) = 0$ (*и тогда* $X^{\text{н}} \simeq \mathbf{P}^1$, $\mathbf{A}^1$ *или* $\mathbf{A}^1_*$), *либо* $g(X) = 1$ (*и тогда X — полная и гладкая*).

Доказательство. Известно, что если $g(Y) \geqslant 2$ для кривой Y, то $|\operatorname{Aut} Y| < \infty$. Пусть $\overline{X}$ — полная неособая модель поля $k(X)$. Отождествим $X^{\text{н}}$ с открытым подмножеством в $\overline{X}$, а $\operatorname{Aut} X^{\text{н}}$ с подгруппой в $\operatorname{Aut} \overline{X}$, оставляющей $\overline{X} - X^{\text{н}}$ инвариантным. Если $g(X) = 0$, то $\overline{X} \simeq \mathbf{P}^1$, а поскольку $\operatorname{Aut} \mathbf{P}^1$ однотранзитивно действует на тройках различных точек из $\mathbf{P}^1$, то $|\overline{X} - X^{\text{н}}| \leqslant 2$, т. е. $X^{\text{н}} \simeq \mathbf{P}^1$, $\mathbf{A}^1$ или $\mathbf{A}^1_*$. Если же $g(X) = 1$, то, выделяя на $\overline{X}$

какую-либо точку (нуль группового закона), получим эллиптическую кривую $E(\overline{X})$. $\operatorname{Aut}\overline{X}$ есть полупрямое произведение (конечной) группы автоморфизмов алгебраической группы $E(\overline{X})$ на $E(\overline{X})$. Так как $E(\overline{X})$ действует (сдвигами) на $\overline{X}$ транзитивно с тривиальным стабилизатором, то $X^{\text{н}} = \overline{X}$. Но X неособая, иначе $X = (\overline{X}/R, \mathcal{O}')$ и (см. п. 1 и (2)) $\operatorname{Aut}_\Sigma(\overline{X}/R, \mathcal{O}')$ — бесконечная подгруппа в $\operatorname{Aut}\overline{X}$, лежащая в стабилизаторе некоторой точки из $\overline{X}$, что невозможно. Значит, $X = X^{\text{н}} = \overline{X}$. Предложение доказано.

Таким образом, основной интерес представляют рациональные кривые, и далее X считается рациональной кривой.

3. Гладкие кривые X. Они уже описаны в предложении 2; перечислим их тут с указанием некоторых нужных ниже обозначений и формул.

Кривая $\mathbf{P}^1$. Пусть $(\xi:\eta)$ — однородные координаты на $\mathbf{P}^1$. Пусть $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ обозначает образ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2$ относительно естественной проекции $GL_2 \to PGL_1$. Действие PGL_1 на $\mathbf{P}^1$ по формуле

$$(\xi:\eta) \xmapsto{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} (a\xi + b\eta : c\xi + d\eta) \tag{3}$$

отождествляет PGL_1 с $\operatorname{Aut}\mathbf{P}^1$. $T = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a \in k^*\right\}$; $U = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} \middle| u \in k_+\right\}$; $B = TU = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & a \end{bmatrix} \middle| a \in k^*, \quad u \in k_+\right\}$ и $N(T) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in k^*\right\}$ — соответственно максимальный тор, максимальная унипотентная подгруппа, борелевская подгруппа и нормализатор T в PGL_1. Далее U отождествляется с k_+ по изоморфизму $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} \mapsto u$, а T — с k^* по изоморфизму $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mapsto a$. Морфизм $\chi\colon T \to k^*$, $\chi(t) = t$, является базисным характером в группе характеров T. T имеет в $\mathbf{P}^1$ две неподвижные точки $0 = (1:0)$ и $\infty = (0:1)$, а U и B — одну (точку ∞). T, B и U действуют транзитивно на дополнении к множеству своих неподвижных точек. Функции $t = \eta/\xi$ и $s = \xi/\eta$ являются локальными параметрами в 0 и ∞ соответственно.

Кривая $\mathbf{A}^1$ отождествляется с $\mathbf{P}^1 - \infty$, а $\operatorname{Aut}\mathbf{A}^1$ — с B. Координатой на $\mathbf{A}^1$ является t.

Кривая $\mathbf{A}^1_*$ отождествляется с $\mathbf{P}^1 - \{0 \cup \infty\}$, а $\operatorname{Aut}\mathbf{A}^1_*$ — с $N(T)$.

Далее считается, что указанные отождествления произведены.

Таким образом, $\operatorname{Aut} X$ для гладкой X — это ненульмерная линейная алгебраическая группа.

Будем считать далее, что $\operatorname{sing} X \neq \phi$.

4. Редукция задачи. В обозначениях п. 1 $X = (X^{\text{н}}/R, \mathcal{O}')$ для некоторых S, R и $\mathcal{O}'$. Для $z \in \operatorname{sing} X$ рассмотрим конечномерное векторное пространство $(k + \mathfrak{r}_z)/(k + \mathfrak{r}_z^n)$ и его подпространство $\mathcal{O}'_z/(k + \mathfrak{r}_z^n)$. $\operatorname{Aut}_\Sigma X^{\text{н}}$ — алгебраическая подгруппа в $\operatorname{Aut} X^{\text{н}}$, действующая k-автоморфизмами кольца $k + \mathfrak{r}_z$, и это действие определяет рациональное представление $\operatorname{Aut}_\Sigma X^{\text{н}} \to GL(\mathcal{O}'_z/(k + \mathfrak{r}_z^n))$. Из (1) следует, что $\mathcal{O}'_z$ инвариантно относительно $h \in \operatorname{Aut}_\Sigma X^{\text{н}}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}'_z/(k + \mathfrak{r}_z^n)$ инвариантно относительно h. Из предложения 1 и (2) вытекает тогда, что $\operatorname{Aut}_\Sigma X$ — линейная алгебраическая группа размерности не меньше 1 и конечного индекса в $\operatorname{Aut} X$. Заметим теперь, что T действует на $\mathbf{A}^1_*$ с тривиальным стабилизатором, а любое регулярное действие k_+ на $\mathbf{A}^1$ транзитивно. Таким образом, доказано

Предложение 3. *$\operatorname{Aut} X$ — линейная алгебраическая группа размерности не меньше* 1 *и* $X^{\text{н}} \simeq \mathbf{P}^1$ *или* $\mathbf{A}^1$.

Следствие 1. *Если $X^{\text{н}} \simeq \mathbf{P}^1$, то на X регулярно и нетривиально действует либо k^*, либо k_+, а если $X^{\text{н}} \simeq \mathbf{A}^1$, то действует k^* (и не действует k_+).*

Пользуясь теоремами сопряженности для алгебраических групп, мы зафиксируем теперь такой изоморфизм $X^{\text{н}}$ с $\mathbf{P}^1$ или $\mathbf{A}^1$ (по которому эти кривые далее будут отождествляться), что $\operatorname{Aut} X$ содержит T или U.

Следствие 2. $|\operatorname{sing} X| \leqslant 2$, *и если* $|\operatorname{sing} X| = 2$, *то X — полная кривая.*

Итак, задача сводится к описанию всех таких кривых X, что $\operatorname{Aut} X \supseteq T$ или U. Из пп. 1 и 3 и предложения 1 получаем:

1) $\operatorname{Aut} X \supseteq U$ тогда и только тогда, когда $X^{\text{н}} = \mathbf{P}^1$, $S = \Sigma = \{\infty\}$ и для $p(\infty) = z$ $\mathcal{O}'_z$ — U-инвариантное подкольцо в $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_{\infty, \mathbf{P}^1}$, удовлетворяющее условию (1).

2) $\mathrm{Aut}\, X \supseteq T$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) $X^{\text{н}} = \mathbf{A}^1$, $S = \Sigma = \{0\}$ и для $p(0) = z$ $\mathcal{O}'_z$ — T-инвариантное подкольцо в $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_{0, \mathbf{A}^1}$, удовлетворяющее условию (1).

б) $X^{\text{н}} = \mathbf{P}^1$, $S = \Sigma = \{\infty\}$ и для $p(\infty) = z$ $\mathcal{O}'_z$ — T-инвариантное подкольцо в $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_{\infty, \mathbf{P}^1}$, удовлетворяющее условию (1).

в) $X^{\text{н}} = \mathbf{P}^1$, $S = \Sigma = \{0\}$ и для $p(0) = z$ $\mathcal{O}'_z$ — T-инвариантное подкольцо в $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_{0, \mathbf{P}^1}$, удовлетворяющее условию (1).

г) $X^{\text{н}} = \mathbf{P}^1$, $S = \Sigma = \{0 \cup \infty\}$, $p(0) \neq p(\infty)$ и для $p(0) = z$ (соответственно $p(\infty) = z$) $\mathcal{O}'_z$ — T-инвариантное подкольцо в $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_{0, \mathbf{P}^1}$ (соответственно в $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_{\infty, \mathbf{P}^1}$), удовлетворяющее условию (1).

д) $X^{\text{н}} = \mathbf{P}^1$, $S = \Sigma = \{0 \cup \infty\}$, $p(0) = p(\infty) = z$ и $\mathcal{O}'_z$ — T-инвариантное подкольцо в $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_{0, \mathbf{P}^1} \cap \mathcal{O}_{\infty, \mathbf{P}^1}$, удовлетворяющее условию (1).

Во всех случаях, кроме д), X одноветочна (т. е. p биективно), а в случае д) X двухветочна ($|p^{-1}(z)| = 2$).

Таким образом, задача редуцируется к описанию T- или U-инвариантных подколец, удовлетворяющих условию (1), в соответствующих кольцах $\mathcal{O}_z$. Ниже понадобится также несколько иная ее формулировка. А именно, $(k + \mathfrak{r}_z)/(k + \mathfrak{r}_z^n)$ является конечномерной коммутативной k-алгеброй, а $\mathcal{O}'_z/(k + \mathfrak{r}_z^n)$ — ее подалгеброй; наоборот, если A — какая-либо подалгебра в $(k + \mathfrak{r}_z)/(k + \mathfrak{r}_z^n)$ (отличная от $k + \mathfrak{r}_z$, если $\mathcal{O}_z = k + \mathfrak{r}_z$), то полный прообраз A при гомоморфизме факторизации $k + \mathfrak{r}_z \to (k + \mathfrak{r}_z)/(k + \mathfrak{r}_z^n)$ будет подкольцом $\mathcal{O}'_z$ в $\mathcal{O}_z$, удовлетворяющим условию (1). Задача может быть рассмотрена также как задача об описании T- или U-инвариантных подалгебр в алгебре $(k + \mathfrak{r}_z)/(k + \mathfrak{r}_z^n)$.

Далее использованы обозначения: $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{0, \mathbf{A}^1} = \mathcal{O}_{0, \mathbf{P}^1}$, $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_{0, \mathbf{A}^1} = \mathfrak{m}_{0, \mathbf{P}^1}$, $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{O}_{\infty, \mathbf{P}^1}$, $\mathfrak{m}_\infty = \mathfrak{m}_{\infty, \mathbf{P}^1}$, $\mathfrak{r}_{0, \infty} = \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}_\infty$.

5. Кривые $\mathbf{P}^1_{n, m}(c_0, \ldots, c_p; d_0, \ldots, d_q)$. Пусть $\mathfrak{S}$ — подполугруппа с нулем в аддитивной полугруппе $\mathbf{N}$ натуральных чисел, содержащая все целые числа, большие некоторой константы. Пусть n — наименьшее целое число, для которого $\mathfrak{S}$ содержит $\{m \in \mathbf{N} \mid m \geqslant n\}$, и

$0 = d_0 < \ldots < d_r$ — все числа из $\mathfrak{S}$, меньшие n. Очевидно, если $\mathfrak{S} \neq \mathrm{N}$, то $d_1 \geqslant 2$ и $d_r \leqslant n - 2$. Набор чисел $n, d_0, \ldots, d_r$ полностью определяет полугруппу $\mathfrak{S}$, и мы будем обозначать ее через $\mathfrak{S}_n(d_0, \ldots, d_r)$.

Определение. Кривой $\mathrm{P}^1_{n,m}(c_0, \ldots, c_p; d_0, \ldots, d_q)$ называется полная рациональная неприводимая кривая, полученная из P^1 конструкцией Розенлихта — Серра, в которой $S = \{0 \cup \infty\}$, $p(0) \neq p(\infty)$ и $\mathcal{O}'_{p(0)}$ (соответственно $\mathcal{O}'_{p(\infty)}$) как векторное пространство над k натянуто на функции t^i (соответственно s^i), где i пробегает полугруппу $\mathfrak{S}_n(c_0, \ldots, c_p)$ (соответственно $\mathfrak{S}_m(d_0, \ldots, d_q)$).

Очевидно, $\mathrm{P}^1_{n,m}(c_0, \ldots, c_p; d_0, \ldots, d_q) \simeq \mathrm{P}^1_{m,n}(d_0, \ldots, d_q; c_0, \ldots, c_p)$. При $n = 1$, $m \geqslant 2$ (соответственно $n \geqslant 2$, $m = 1$) эта кривая имеет одну особую точку $p(\infty)$ (соответственно $p(0)$), а при $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$ — две, $p(0)$ и $p(\infty)$.

Определение. Кривой $\mathrm{A}^1_n(c_0, \ldots, c_p)$ называется кривая, полученная из $\mathrm{P}^1_{n,1}(c_0, \ldots, c_p; 0)$ выкалыванием точки $p(\infty)$.

6. Одноветочные кривые с действием k_+.

ТЕОРЕМА 1. *Кривая* $\mathrm{P}_{1,m}(0; 0)$ *является одноветочной рациональной неприводимой кривой, допускающей нетривиальное действие* k_+. *Если* $\mathrm{char}\, k = 0$, *то и наоборот, всякая неприводимая особая рациональная кривая, допускающая действие* k_+, *изоморфна* $\mathrm{P}_{1,m}(0; 0)$ *для некоторого* $m \geqslant 2$.

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ обозначает образ $a \in \mathcal{O}_\infty$ при гомоморфизме факторизации $\mathcal{O}_\infty \to \mathcal{O}_\infty/(k + \mathfrak{m}^n_\infty)$. *Тогда* $\bar{s}, \ldots, \bar{s}^{n-1}$ — базис в $\mathcal{O}_\infty/(k + \mathfrak{m}^n_\infty)$. Из (3) следует, что $u \in U$ действует на $s \in \mathcal{O}_\infty$ по формуле $s \xrightarrow{u} s(us + 1)^{-1}$, и потому u действует на $s \in \hat{\mathcal{O}}_\infty = k[[s]]$ по формуле $s \xrightarrow{u} s - us^2 + u^2s^3 - \ldots$ Значит, $s^i \xrightarrow{u} s^i - ius^{i+1} + \ldots\ \forall i = 1, 2, \ldots$, и потому матрица u в указанном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -2u & 1 & & & \\ & -3u & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & * & & -(n-1)u & 1 \end{pmatrix}.$$

Если char $k = 0$, то отсюда следует, что подпространство неподвижных относительно U векторов в $\mathcal{O}_\infty/(k + \mathfrak{m}_\infty^n)$ одномерно и натянуто на $\bar{s}^{n-1}$. Значит, по теореме Ли — Колчина всякое ненулевое U-инвариантное подпространство в $\mathcal{O}_\infty/(k + \mathfrak{m}_\infty^n)$ содержит $\bar{s}^{n-1}$. Отсюда и из п. 4 легко вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если char $k \neq 0$, то утверждение теоремы перестает быть верным. Например, пусть char $k = 2$ и $m = 4$. Тогда в базисе $\bar{s}$, $\bar{s}^2$, $\bar{s}^3$ u имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ u^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Это значит, например, что $U \subseteq \operatorname{Aut} \mathbf{P}^1_{1,4}$ (0; 0,2). Тогда $\mathbf{P}^1_{1,4}(0; 0, 2) \not\approx \mathbf{P}^1_{1,m}(0; 0)$.

7. Одноветочные кривые с действием k^*.

ТЕОРЕМА 2. *Одноветочные особые полные (неполные) рациональные кривые, допускающие нетривиальное действие k^*,— это в точности кривые вида $\mathbf{P}^1_{n,m}(c_0, \ldots, c_p; d_0, \ldots, d_q)$, $n + m \geqslant 3$ (соответственно $\mathbf{A}^1_n(c_0, \ldots, c_p)$, $n \geqslant 2$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3) следует, что $\dot{t}^i$ и $\dot{s}^i$ являются собственными векторами для действия T в $\mathcal{O}_0$ и $\mathcal{O}_\infty$, соответственно с весами χ^i и χ^{-i}. Так как эти веса различны при разных i, то любое T-инвариантное подпространство в $\mathcal{O}_0$ (соответственно в $\mathcal{O}_\infty$) натянуто над k на $\dot{t}^i$ (соответственно $\dot{s}^i$), где i пробегает некоторое множество $\mathfrak{S} \subset \mathbf{N}$. Очевидно, это подпространство будет подалгеброй, удовлетворяющей (1), тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_n(c_0, \ldots, c_p)$. Теорема доказана.

Перейдем к разбору последнего случая 2д) п. 4, когда X двухветочна и $T \subseteq \operatorname{Aut} X$. Исследуем сначала весовое разложение $(k + \mathfrak{r}_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}^n_{0,\infty})$ относительно T; будет показано, что все веса этого разложения однократны. Это обстоятельство легко позволяет описать все T-инвариантные подалгебры алгебры $(k + \mathfrak{r}_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}^n_{0,\infty})$, а потому (см. п. 4.1) и искомые X.

8. Весовое разложение $(k + \mathfrak{r}_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}^n_{0,\infty})$ относительно T. Пусть $w = \xi/(\xi - \eta) \in k(\mathbf{P}^1)$ и $\Omega = \{\xi : \eta) \in \mathbf{P}^1 \mid \xi \neq \eta\}$. Тогда Ω изоморфно $\mathbf{A}^1$ и w — координата на Ω (т. е. $k[\Omega] = k[w]$). Так как $w(0) = 1$, $w(\infty) = 0$, то $\{f \in k[\Omega] \mid f(0) = f(\infty) = 0\}$ — главный идеал, порожденный функцией $\nu = w(w-1)$. Отметим, что $w = (1-t)^{-1}$, $\nu = t(1-t)^{-2}$. Легко доказывается

ЛЕММА. $\mathfrak{r}_{0,\infty} = \nu\cdot(\mathcal{O}_0 \bigcap \mathcal{O}_\infty)$.

Предложение 4. *Размерность пространства* $(k + \mathfrak{r}^l_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty})$ *равна* 2 *и классы функций* $w\nu^l$ *и* $(w-1)\,\nu^l$ *образуют в нем базис из весовых относительно* T *векторов. Вес первого вектора есть* χ^l, *а второго* χ^{-l}.

Доказательство. Докажем сначала, что классы функций ν^l и $w\nu^l$ образуют базис в $\mathfrak{r}^l_{0,\infty}/\mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty} = (k + \mathfrak{r}^l_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty})$.

По лемме любой $f \in \mathfrak{r}^l_{0,\infty}$ имеет вид $\nu^l pq^{-1}$, где p и q — взаимно простые элементы из $k[w]$, $q(0) \neq 0$, $q(\infty) \neq 0$. Классы f и $\nu^l(aw+b)\,q^{-1}$ по модулю $\mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty}$ совпадают для некоторых a, $b \in k$ (разделить p на ν с остатком). В свою очередь для некоторых c, $d \in k$ классы $\nu^l(aw+b)\,q^{-1}$ и $\nu^l(cw+d)$ по модулю $\mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty}$ также совпадают; для доказательства нужно подобрать c и d так, чтобы многочлен $aw + b - q(cu + d)$ делился на ν или, что то же, чтобы этот многочлен обращался в нуль в 0 и ∞; последнее условие дает систему линейных уравнений на c и d, которая, как легко проверить, всегда разрешима. Таким образом, классы ν^l и $w\nu^l$ порождают $\mathfrak{r}^l_{0,\infty}/\mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty}$. Но они и линейно независимы над k: если $a\nu^l + bw\nu^l \in \mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty}$ для некоторых a, $b \in k$, то по лемме $a + bw \in \mathfrak{r}_{0,\infty}$ и (поскольку $w(0) = 1$, $w(\infty) = 0$) $a = b = 0$. Итак, классы $w\nu^l$ и $(w-1)\nu^l$ образуют базис в $(k + \mathfrak{r}^l_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty})$.

Если теперь $a \in k^* = T$, то $w\nu^l = t^l(1-t)^{-2l-1} \xrightarrow{a} \xrightarrow{a} (at)^l(1-at)^{-2l-1}$. Но разность $(at)^l(1-at)^{-2l-1} - a^l t^l(1-t)^{-2l-1}$ равна $a^l\nu^l f$, где, как легко видеть, $f(0) = f(\infty) = 0$. Значит, $f \in \mathfrak{r}_{0,\infty}$, и по лемме указанная разность лежит в $\mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty}$. Значит, класс $w\nu^l$ по модулю $k + \mathfrak{r}^{l+1}_{0,\infty}$ является собственным вектором относительно T веса χ^l. Для $(w-1)\,\nu^l$ рассуждение аналогично.

Следствие. *Спектр* T *в* $(k + \mathfrak{r}_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}^n_{0,\infty})$ *состоит из однократных весов* χ, χ^{-1}, χ^2, χ^{-2}, ..., χ^{n-1}, χ^{-n+1} (*так что* $\dim\,(k + \mathfrak{r}_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}^n_{0,\infty}) = 2n-2$).

Замечания. 1. Классы $w\nu^l$ и $(w-1)\,\nu^l$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$, по модулю $k + \mathfrak{r}^n_{0,\infty}$ образуют в $(k + \mathfrak{r}_{0,\infty})/$

$/(k+\mathfrak{r}^n_{0,\infty})$ базис, но при $l < n-1$ не являются весовыми векторами для T. Например, при $n=3$ собственным вектором веса χ будет класс $w\nu - 3w\nu^2 - (w-1)\nu^2$, а не класс $w\nu$. Вопрос о явном вычислении собственных векторов для каждого конкретного n сводится к решению соответствующей системы линейных уравнений.

2. В самом кольце $\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_\infty$ нет непостоянных функций, собственных относительно T.

9. Алгебра $(k+\mathfrak{r}_{0,\infty})/(k+\mathfrak{r}^n_{0,\infty})$. Из предложения 4 и его следствия вытекает, что для каждого целого $n > 0$ существует набор элементов $f_{n,l} \in \mathfrak{r}_{0,\infty}$, $l = \pm 1, \ldots, \pm(n-1)$, удовлетворяющий условиям:

а) $f_{n,l} \in \mathfrak{r}^{|l|}_{0,\infty}, f_{n,l} \notin \mathfrak{r}^{|l|+1}_{0,\infty}$;

б) класс $f_{n,l}$ по модулю $k+\mathfrak{r}^n_{0,\infty}$ является собственным вектором веса χ^l для действия T в $(k+\mathfrak{r}_{0,\infty})/(k+\mathfrak{r}^n_{0,\infty})$;

в) класс $f_{n,l}$ по модулю $\mathfrak{r}^{|l|+1}_{0,\infty}$ совпадает с классом $w\nu^l$ по тому же модулю при $l > 0$ и с классом $(w-1)\nu^l$ при $l < 0$.

Будем обозначать через $\bar{f}_{n,l}$ класс $f_{n,l}$ по модулю $k+\mathfrak{r}^n_{0,\infty}$. Далее удобно ввести также элементы $f_{n,0} = 0$, $\bar{f}_{n,0} = 0$.

Предложение 5. *Элементы* $\bar{f}_{n,l}$, $l = \pm 1, \ldots, \pm(n-1)$, *образуют базис из собственных относительно* T *векторов в алгебре* $(k+\mathfrak{r}_{0,\infty})/(k+\mathfrak{r}^n_{0,\infty})$. *Таблица умножения в этой алгебре в указанном базисе имеет вид*:

$$\bar{f}_{n,l}\cdot\bar{f}_{n,m} = \begin{cases} 0, \ \textit{если}\ lm < 0, \\ 0, \ \textit{если}\ lm > 0, \ \text{но}\ |l+m| \geqslant n, \\ \bar{f}_{n,l+m}, \ \textit{если}\ l > 0, m > 0, l+m < n, \\ -\bar{f}_{n,l+m}, \ \textit{если}\ l < 0, m < 0, l+m > -n. \end{cases}$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из условия б) и следствия в п. 8. Докажем второе.

По условию б) $\forall\, a \in T$ будет $f_{n,l} \xrightarrow{a} a^l f_{n,l} + f_l$, где $f_l \in \mathfrak{r}^n_{0,\infty}$. Поэтому $f_{n,l}\cdot f_{n,m} \xrightarrow{a} a^{l+m} f_{n,l}\cdot f_{n,m} + f$, где $f \in \mathfrak{r}^n_{0,\infty}$. Значит, класс $f_{n,l}\cdot f_{n,m}$ по модулю $k+\mathfrak{r}^n_{0,\infty}$ является собственным вектором веса χ^{l+m} относительно T, причем в силу условия а) этот вектор ненулевой тогда и только тогда, когда $f_{n,l}\cdot f_{n,m} \notin \mathfrak{r}_{0,\infty}^{|l+m|+1}$. По следствию в п. 8 этот вектор нулевой, если $lm > 0$ и $|l+m| \geqslant n$. Если $lm < 0$, то $|l+m| < |l|+|m|$, и, поскольку в силу условия а) $f_{n,l}\cdot f_{n,m} \in \mathfrak{r}_{0,\infty}^{|l|+|m|}$, в этом случае указанный вектор тоже нулевой. Пусть $lm > 0$ и $|l+m| < n$. Рассмотрим случай $l > 0$, $m > 0$. Тогда по условию в) $f_{n,l} = wv^l + f$, $f_{n,m} = wv^m + h$, где $f \in \mathfrak{r}_{0,\infty}^{l+1}$, $h \in \mathfrak{r}_{0,\infty}^{m+1}$. Поэтому $f_{n,l}\cdot f_{n,m} = w^2v^{l+m} + r$, где $r \in \mathfrak{r}_{0,\infty}^{l+m+1}$. Но $w^2 = v + m$, так что $f_{n,l}\cdot f_{n,m} = wv^{l+m} + g$, где $g \in$ $\in \mathfrak{r}_{0,\infty}^{l+m+1}$, и, значит, $f_{n,l}\cdot f_{n,m} \notin \mathfrak{r}_{0,\infty}^{l+m+1}$, так что в этом случае $\bar f_{n,l}\cdot \bar f_{n,m} = \bar f_{n,l+m}$. Если же $l < 0$, $m < 0$ и $l + m > -n$, то $f_{n,l} = (w-1)v^{|l|} + f$, $f_{n,m} =$ $= (w-1)v^{|m|} + h$, где $f \in \mathfrak{r}_{0,\infty}^{|l|+1}$, $h \in \mathfrak{r}_{0,\infty}^{|m|+1}$, и потому $f_{n,l}\cdot f_{n,m} = (w-1)^2v^{|l|+|m|} + r$, где $r \in \mathfrak{r}_{0,\infty}^{|l+m|+1}$. Но $(w-1)^2 = v - (w-1)$, так что $f_{n,l}\cdot f_{n,m} = -(w-$ $-1)v^{|l+m|} + g$, где $g \in \mathfrak{r}_{0,\infty}^{|l+m|+1}$ и, значит, $f_{n,l}\cdot f_{n,m} \notin$ $\notin \mathfrak{r}_{0,\infty}^{|l+m|+1}$, так что в этом случае $\bar f_{n,l}\cdot \bar f_{n,m} = -\bar f_{n,l+m}$.

10. Двухветочные кривые с действием k^*. Рассмотрим два набора целых чисел $\{p_i\}_{i=0}^{m}$ и $\{q_j\}_{j=0}^{l}$: $0 = p_0 < \ldots$ $\ldots < p_m \leqslant n-1$ и $0 = q_0 > \ldots > q_l \geqslant -(n-1)$, и пусть $\mathfrak{S}$ — их объединение. Линейная оболочка векторов $\bar f_{n,i}$, i пробегает $\mathfrak{S}$, является T-инвариантным подпространством в $(k + \mathfrak{r}_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}_{0,\infty}^{n})$, и поскольку веса векторов $\bar f_{n,i}$ и $\bar f_{n,j}$ при $i \neq j$; $i, j \neq 0$,— разные, всякое T-инвариантное подпространство так получается (при соответствующем выборе $\mathfrak{S}$). Из предложения 5 следует, что такое подпространство будет подалгеброй тогда и только тогда, когда

$$\forall\, i, j \in \mathfrak{S}, \text{ для которых } ij > 0,\ |i+j| < n, \text{ будет } i + j + \mathfrak{S}. \qquad (4)$$

Прообраз такой подалгебры при гомоморфизме факторизации $(k + \mathfrak{r}_{0,\infty}) \to (k + \mathfrak{r}_{0,\infty})/(k + \mathfrak{r}_{0,\infty}^{n})$ будет T-инвариантным подкольцом $\mathcal{O}_z'$ в $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_\infty$, удовлетворяющим условию (1). $\mathcal{O}_z'$, как векторное пространство над k, натянуто на $k + \mathfrak{r}_{0,\infty}^{n}$ и функции $f_{n,i}$, i пробегает $\mathfrak{S}$. Чтобы разные подалгебры определяли разные кольца, потребуем, чтобы выполнялось условие

$$p_m - q_l \neq 2n - 2. \tag{5}$$

Определение. Пусть $\mathfrak{s}$ удовлетворяет условиям (4) и (5). Кривой $\mathbf{P}^1_n(p_0, \ldots, p_m; q_0, \ldots, q_l)$ называется полная рациональная неприводимая кривая, полученная из $\mathbf{P}^1$ конструкцией Розенлихта — Серра, в которой $S = \{0 \bigcup \infty\}$, $p(0) = p(\infty) = z$ и $\mathcal{O}'_z$, как векторное пространство над k, натянуто на $k + \mathfrak{r}^n_{0,\infty}$ и функции $f_{n,i}$, где i пробегает $\mathfrak{S}$, см. п. 9.

Таким образом, с учетом сказанного выше и п. 4, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Двухветочные кривые, допускающие нетривиальное действие k^*,— это в точности кривые вида* $\mathbf{P}^1_n(p_0, \ldots, p_m;\ q_0, \ldots, q_l)$.

11. Группы автоморфизмов.

ТЕОРЕМА 4. *Тип* I. *Пусть* $X = \mathbf{P}^1_{n,m}(c_0, \ldots, c_p;\ d_0, \ldots, d_q)$. *Тогда*:

а) *при* $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$ $\operatorname{Aut} X = N(T)$, *если* (*см.* п. 5) $\mathfrak{S}_n(c_0, \ldots, c_p) = \mathfrak{S}_m(d_0, \ldots, d_q)$ *и* $\operatorname{Aut} X = T$ *в противном случае*;

б) *при* $n = 1$, $m \geqslant 2$ (*соответственно* $n \geqslant 2$, $m = 1$) *и* $\operatorname{char} k = 0$ $\operatorname{Aut} x = T$, *если* $q > 0$ (соответственно $p > 0$) *и* $\operatorname{Aut} X = B$, *если* $q = 0$ (*соответственно* $p = 0$).

Тип II. *Пусть* $X = \mathbf{A}^1_n(c_0, \ldots, c_p)$. *Тогда* $\operatorname{Aut} X = T$.

Тип III. *Пусть* $X = \mathbf{P}^1_n(p_0, \ldots, p_m;\ q_0, \ldots, q_l)$. Тогда $\operatorname{Aut} X = N(T)$, *если* $l = m$ *и* $p_i + q_i = 0\ \forall i = 0, 1, \ldots, m$, и $\operatorname{Aut} X = T$ *в противном случае.*

Доказательство. Тип Iа) $S = \Sigma = \{0 \bigcup \infty\}$, так что $\operatorname{Aut} X$ лежит в подгруппе PGL_1, оставляющей S инвариантным, т. е. в $N(T)$. Утверждение вытекает тогда из соотношений $t \xrightarrow{w_0} s$ и $s \xrightarrow{w_0} t$, где $w_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Тип Iб) $\Sigma = \{\infty\}$, так что $\operatorname{Aut} X \subseteq B$. В силу предложения 3 и теоремы 2 $\operatorname{Aut} X = T$ или B, причем в последнем случае $\operatorname{Aut} X \supseteq U$, так что утверждение вытекает из теоремы 1.

Тип II. $\Sigma = \{0\}$, так что $\operatorname{Aut} X \subseteq T$ и утверждение вытекает из теоремы 2.

Тип III. Как и в Iа), $S = \Sigma = \{0 \bigcup \infty\}$, так что утверждение вытекает из равенства $w_0(\chi) = \chi^{-1}$. Теорема доказана,

12. Классификация.

ТЕОРЕМА 5. *Кривые разных типов (в обозначениях теоремы 4) не изоморфны.*

$\mathbf{P}^1_{n,m}(c_0, \ldots, c_p;\ d_0, \ldots, d_q) \simeq \mathbf{P}^1_{n',m'}(c'_0, \ldots, c'_{p'};\ d'_0, \ldots, d'_{q'}) \Leftrightarrow$ *либо* $n = n'$, $m = m'$, $p = p'$, $q = q'$ *и* $c_i = c'_i\,\forall i$, $d_j = d'_j\,\forall j$, *либо* $n = m'$, $m = n'$, $p = q'$, $q = p'$ *и* $c_i = d_i\forall i$, $d_j = c'_j\forall j$.

$\mathbf{A}^1_n(c_0, \ldots, c_p) \simeq \mathbf{A}^1_{n'}(c'_0, \ldots, c'_{p'}) \Leftrightarrow n = n'$, $p = p'$, $c_i = c'_i\forall i$.

$\mathbf{P}^1_n(p_0, \ldots, p_m;\ q_0, \ldots, q_l) \simeq \mathbf{P}^1_{n'}(p'_0, \ldots, p'_{m'};\ q'_0, \ldots, q'_{l'}) \Leftrightarrow n = n'$ *и либо* $m = m'$, $l = l'$, $p_i = p'_i\forall i$, $q_j = q_j\forall j$, *либо* $m = l'$, $l = m'$, $p_i + q'_i = 0\forall i$, $q_j + p_j = 0\forall j$.

Доказательство. Свойства X быть или не быть полной, одно- или двухветочной, число особых точек, свойство $(\mathrm{Aut}\ X)^0$ быть (обязательно одномерным) тором сохраняются при изоморфизмах. Если $x \in X$, $\mathfrak{r}_x$ — радикал целого замыкания $\mathcal{O}_{x,X}$ в $k(X)$, то см. п. 1, $k + \mathfrak{r}_x \supseteq \mathcal{O}_{x,X} \supseteq k + \mathfrak{r}^n_x$, и наименьшее n с таким свойством (и равенство $\mathcal{O}_{x,X} = k + \mathfrak{r}^n_x$, если оно имеет место) сохраняются при изоморфизмах. Если $(\mathrm{Aut}\ X^0)$ — тор, χ_0 — его базисный характер, x неподвижна относительно $(\mathrm{Aut}\ X)^0$ и $\{\chi_0^i \mid i \in \mathfrak{S} \subset \mathbf{N}\}$ — система весов $(\mathrm{Aut}\ X)^0$ в $\mathcal{O}_{x,X}/(k + \mathfrak{r}^n_x)$, то $\mathfrak{S}$ с точностью до одновременного изменения знаков у всех чисел не меняется при смене χ_0 и при изоморфизмах. Отсюда все следует. Теорема доказана.

13. Примеры (char $k \neq 2$).

1. $\mathbf{P}^1_1(0; 0)$ — простейший пример особой кривой с бесконечной группой автоморфизмов; легко видеть, что $\mathbf{P}^1_1(0; 0)$ — это декартов лист $x_0x_1^2 = x_0x_2^2 + x_2^3$ (тут $(x_0 : x_1 : x_2)$ — координаты на $\mathbf{P}^2$).

2. Пусть X получается из $\mathbf{P}^1$ конструкцией Розенлихта — Серра, где $S = \{\infty\}$ и $\mathcal{O}'_{p(\infty)}$ натянуто над k на $1, s^2 + s^3$ и s^i, $i \geqslant 4$. Легко проверить, что тогда $\mathrm{Aut}\ X \simeq \mathbf{Z}_2$. Вообще, если X одноветочна, $|\operatorname{sing} X| = 1$ и $|\mathrm{Aut}\ X| < \infty$, то $\mathrm{Aut}\ X$ — циклическая группа.

14. Приложения. В [3] доказаны следующие теоремы о действии связной линейной алгебраической группы G на неприводимом квазипроективном многообразии Y.

ТЕОРЕМА А. *Пусть Y нормально. Тогда существует такое вложение $i : Y \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ и гомоморфизм $\rho : G \to PGL_n$, что $\rho(g)(i(x)) = i(g(x))$ $\forall x \in Y$, $g \in G$.*

ТЕОРЕМА В. *Пусть Y нормально и G — тор. Тогда у любой точки $x \in Y$ существует непустая инвариантная аффинная окрестность.*

Пример $Y = \mathbf{P}^1_n(p_0, \ldots, p_m; q_0, \ldots, q_l)$ и $G = (\mathrm{Aut}\, Y)^0$ показывает, что утверждение теоремы В может стать неверным для ненормального Y.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть G редуктивная, Y проективно и существует эквивариантное вложение Y в $\mathbf{P}^n$. Тогда у любой неподвижной точки $x \in Y$ существует непустая инвариантная аффинная окрестность.*

Доказательство. Пусть Γ — инвариантная гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$, $x \notin \Gamma$, см. [4]. Тогда $Y - \Gamma$ — искомая окрестность. Теорема доказана.

Пример $Y = \mathbf{P}^1_n(p_0, \ldots, p_m; q_0, \ldots, q_l)$ и $G = (\mathrm{Aut}\, Y)^0$ показывает, что утверждение теоремы А может стать неверным для ненормального Y.

Отметим в заключение, что из теоремы 6 вытекает

Следствие. *Пусть G редуктивна, Y проективно и в Y имеется плотная орбита. Тогда Y может иметь лишь конечное число неподвижных точек.*

Доказательство основывается на том, что на аффинном многообразии замкнутые орбиты разделяются регулярными инвариантами.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
6.IV.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Розенлихт М., Отношения эквивалентности на алгебраических кривых, Сб. переводов, Математика, 5, № 1 (1961), 3—31.

[2] Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, М., «Мир», 1968.

[3] Sumihiro H., Equivariant completion. I, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974), 1—28.

[4] Haboush W. J., Reductive groups are geometrically reductive, Ann. of Math., 102 (1975), 67—83.