$= F_0 v^2$ – неквадратична. Тогда расширений нет и алгебра симметрий минимальна.

g) $b \neq 0, \quad E = E_0 u^\alpha, \quad F(v) = F_0 u^2$ квадратична. Расширение минимальной алгебры симметрий получается присоединением к ней операторов $X_{14} = 2t\partial_t + x\partial_x - 2v\partial_v$ и $X_{15} = -\alpha t\partial_t + u\partial_u + (\alpha+1)v\partial_v$.

h) $b \neq 0, \quad E = E_0 u^\alpha, \quad F(v) \neq F_0 u^2$ неквадратична. В этом случае можно присоединить единственный оператор $X_{16} = 2t\partial_t + (\alpha+1)x\partial_x + 2u\partial_u$ с получением трёхмерной алгебры Ли.

Случай постоянной функции $E = E(u) = \mathrm{const}$ в этих описаниях полностью подпадает под случай степенной зависимости $E = E_0 u^\alpha$ с показателем $\alpha = 0$.

1. *Baikov V. A.* Filtration of non-Newton liquid in porous media: Models, symmetries and solutions / In: *Joint ISAMM*: FRD Interdisciplinary workshop on symmetry analysis and mathematical modeling, Univercity of North West – Mmabatho (8 December 1998, Foundation for Recearch Development (FRD) – Pretoria, 10 December, 1998. — P. 108.

Кафедра математики,

Уфимский государственный авиационный технический университет;

450000, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.

`olegmath@mail.ru`

УДК 517.929

А. С. Баландин

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа

$$\left(E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_h^j\right) \dot{x}(t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m S_{r_m}\right) x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

где $J \in \mathbb{N}$, a_j, h, b_m, $r_m \in \mathbb{R}_+$, ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m$ сходится, все r_m ограниченны общей константой r, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке $[0,l]$, S_ω — оператор, определённый для $\omega \in \mathbb{R}_+$ равенством (см. [1], с. 20)

$$(S_\omega y)(t) = \begin{cases} y(t-\omega), & t-\omega \geqslant 0, \\ 0, & t-\omega < 0. \end{cases}$$

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке $[0,l]$ функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно ([1], с. 84, теорема 1.1), уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds,$$

где X называется *фундаментальным решением*, а C — *функцией Коши* уравнения (1).

В данной работе рассматриваются условия, при которых уравнение (1) является экспоненциально устойчивым, то есть функция Коши и фундаментальное решение имеют следующие экспоненциальные оценки

$$|X(t)| \leqslant N e^{-\alpha\, t}, \quad |C(t,s)| \leqslant N e^{-\alpha\,(t-s)}. \tag{2}$$

Как показано в работе [2], для выполнения оценок (2) необходимо, чтобы оператор при производной был обратим в пространстве L_1.

Обозначим

$$F(z) = \left(1 - \sum_{j=1}^{J} a_j z^j\right)^{-1}.$$

Используя результат работы [3], получим следующую теорему.

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Все корни многочлена $F(z)$ расположены вне единичного круга $|z| \leqslant 1$;*
2) *оператор $E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_h^j$ имеет в пространстве L_1 ограниченный обратный;*

3) *оператор* $\lambda E - S_h$, *где* λ — *любой корень многочлена* $F(z)$, *имеет в пространстве* L_1 *ограниченный обратный.*

Между функцией Коши и фундаментальным решением уравнения (1) в работе [4] установлена следующая связь:

$$X(t) = \left(E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_h^j\right) Y(t), \quad C(t,s) = Y(t-s).$$

Так как оператор при производной имеет ограниченный обратный, то из экспоненциальной оценки фундаментального решения следует экспоненциальная оценка функции Коши.

Не нарушая общности, можно считать, что (1) разрешено относительно производной, то есть уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{J} a_j S_h^j\right)^k \left(\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m S_{r_m}\right) x(t) + f(t)\right).$$

К этому уравнению можно применить результаты работы [5], которые дают условия экспоненциальной оценки фундаментального решения.

Теорема. *Пусть корни многочлена* $F(t)$ *расположены вне единичного круга и*

$$\dot{F}(1) h \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) + F(1) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m r_m\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда уравнение (1) *экспоненциально устойчиво.*

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем // *Изв. вузов. Матем.*, 1997. — № 6. — С. 37–49.
3. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* О разрешимости одного класса разностных уравнений // *Вестн. ПГТУ.* — № 1. — С. 12–17.
4. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. — № 7. — С. 17–27.

5. *Вагина М. Ю., Кипнис М. М.* Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // *Матем. заметки*, 2003. — Т. 74, № 5. — С. 786–789.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09–01–00806а).

Кафедра вычислительной математики и механики,

Пермский государственный технический университет;

614000, г. Пермь, пр. Комсомольский, 29.

balandin-anton@yandex.ru

УДК 517.958:536.2

С. Б. Богданова, С. О. Гладков

О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ С ПОЧТИ ЦЕЛОЙ ТРЁХМЕРНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ

Под пространством почти трехмерной размерности мы будем подразумевать пространство, хаусдорофова размерность которого есть $d_F = 3 - \varepsilon$, где ε — некоторое число.

Формальное определение хаусдорфовой размерности некоторых типов множеств можно найти, например, в монографиях [1, 2]. Примерами множеств, обладающих нецелой хаусдорфовой размерностью, является, скажем, ковер Серпинского, для которого $d_F = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58$ или поверхность Коха с $d_F = 1 + \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 2{,}26$.

По–видимому, одной из первых работ, посвященных изучению физических свойств объектов, обладающих дробной размерностью, является работа [3]. В ней проанализирован процесс теплопроводности в пространстве размерности $d_F = 1 + \varepsilon$, где ε — некоторое произвольное положительное число, не превосходящее единицу.

Настоящее сообщение содержит результаты исследования процесса теплопроводности в пространстве размерности $d_F = 3 - \varepsilon$, с $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Зададим в пространстве нецелой размерности оператор дробного дифференцирования функции по i-той ($i = 1,\ 2,\ 3$) координ-