А. М. Елизаров, В. В. Селезнев, О разрешимости некоторых смешанных обратных краевых задач об обтекании профиля, *Изв. вузов. Матем.*, 1981, номер 11, 3–10

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 *МАТЕМАТИКА* *№ 11 (234)*

А. М. Елизаров, В. В. Селезнёв УДК 517.54

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЯ

Введение

В работе рассматривается ряд задач об обтекании потоком несжимаемой невесомой жидкости неизвестного профиля, расположенного над криволинейным гладким дном либо в струе, ограниченной снизу криволинейным дном. На искомом профиле известной длины задается распределение скорости в зависимости от дуговой абсциссы s.

Разрешимость подобной задачи в случае, когда скорость задана в зависимости от декартовой координаты x, доказана ранее в работе [1]. Задача нахождения формы профиля, расположенного в ограниченной струе над прямолинейным дном, исследована в [2].

По своей математической постановке рассматриваемые в статье задачи относятся к смешанным обратным краевым задачам теории аналитических функций для двусвязной области. Отметим, что некоторые классы таких задач для односвязной области изучены в [3] — [6], а подробное описание приложений обратных и смешанных обратных краевых задач в гидроаэромеханике и теории фильтрации можно найти в [7].

Первым обобщением указанных результатов на случай двусвязной области является работа [1], предложенный метод исследования обобщает результаты из [3].

Смешанные задачи из [4] — [6] исследовались методом сведения к интегральному уравнению, разрешимость которого доказывалась с использованием принципа неподвижной точки Шаудера (см., напр., [8], с. 620). Обобщение этих результатов на случай двусвязной области содержится в работе одного из авторов [9]. Этот же метод используется и в данной работе, причем при выводе интегральных уравнений задач возникает необходимость в решении краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца. Общее решение этой задачи получено на основании результатов работы [10].

Результаты пп. 1°, 3° принадлежат А. М. Елизарову, результаты п. 2° получены В. В. Селезнёвым.

1°. *Постановка задач.* Пусть на искомом профиле $\Gamma_z(z)$ длины l задано распределение скорости в функции дуговой абсциссы s, отсчитываемой в направлении, при котором область течения остается слева: $v=v(s)$, $0\leqslant s\leqslant l$, $v(0)=v(l)$, где $v(s)$ — неотрицательная однозначная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и обращающаяся в нуль не более чем в двух точках (в точке M разветвления потока с $s=0$ и точке N схода потока с $s=s_N$). Как обычно, для циркуляции Γ будем иметь

$$\Gamma=\varphi_в-\varphi_H,\ \varphi_в=\int\limits_0^{s_N} v(s)\,ds+a,\ \varphi_H=\int\limits_{s_N}^{l} v(s)\,ds+a,$$

где a — потенциал скорости в точке M. В части задач установившийся поток несжимаемой невесомой жидкости ограничен снизу криволинейным гладким дном $C'B$ и свободной поверхностью BC. Дно состоит из двух частей: луча $C'A$, лежащего на вещественной оси, и криволинейной дуги AB (здесь и ниже положение точек на границах указано в направлении положительного обхода, когда область остается слева). Относительно дуги AB будем предполагать, что либо конец B фиксирован, либо дуга AB лежит на заданной простой кривой Γ_0, уходящей в бесконечность (в этом случае положение точки B определится после решения уравнения задачи).

Пусть на нижней границе потока функция тока $\psi=0$, значение ψ на профиле равно Q_1, а на верхней границе потока $\psi=Q$.

Обозначим через φ_A и φ_B соответственно потенциалы скорости в точках A и B, через V_0 — постоянное значение скорости на свободных поверхностях. Ниже будут указаны различные варианты задания этих параметров. Значения Q, Q_1 и a будем считать заранее заданными.

Задача 1. Область течения ограничена только снизу линией $C'ABC$, значение скорости V_0 на BC неизвестно. Определить форму профиля и свободной поверхности при одном из следующих вариантов задания параметров и дуги AB: 1) значения φ_A, φ_B известны, дуга AB лежит на Γ_0; 2) значение φ_B задано, длина AB равна l^*, φ_A неизвестно.

В плоскости комплексного потенциала $w=\varphi+i\psi$ области течения с разрезом по линии тока от точки N до ∞ соответствует верхняя полуплоскость с разрезом, параллельным вещественной оси и проходящим через точку iQ_1, абсцисса начала разреза равна a. На нижнем берегу CM разреза точке N соответствует точка с абсциссой φ_H, а на верхнем берегу MC' точке N соответствует точка N' с абсциссой $\varphi_в$. Отобразим полученную область на прямоугольник $NN'C'C$ плоскости u так, чтобы нижнему основанию NN' длины 2π соответствовали участки разреза, отвечающие профилю; верхнему основанию $C'C$ — ось $\psi=0$, а боковым сторонам длины $\omega_2/2$ — оставшиеся участки разреза. Такое отображение имеет вид (см., напр., [7], с. 293) $w=A\zeta(u-i\omega_2/2)+Bu+C_1+iC_2$, где ζ — дзета-функция Вейерштрасса, A, B, C_1, C_2 — вещественные постоянные. Для их определения запишем соответствие точек в плоскостях w и u. Имеем

$$\begin{aligned}
&\text{т. } N: A\zeta(-i\omega_2/2)+C_1+iC_2=a+\varphi_H+iQ_1,\\
&\text{т. } N': A\zeta(2\pi-i\omega_2/2)+2\pi B+C_1+iC_2=a+\varphi_в+iQ_1,\\
&\text{т. } C: \operatorname{Im}\{A\zeta(0)+iB\omega_2/2+C_1+iC_2\}=Q_1
\end{aligned}\tag{1}$$

(соответствие в точке C' выполняется автоматически). Из (1) легко выводим, что $C_1=a+\varphi_в$, $C_2=-Bw_2/2$, $A\eta_2+B\omega_2/2=Q_1$, $2A\eta_1+2\pi B=\Gamma$, $\eta_1=\zeta(\pi)$, $\eta_2=-i\zeta(i\omega_2/2)$, и, следовательно, $B=(2Q_1\eta_1-\Gamma\eta_2)\pi^{-1}$, $A=\Gamma(1+(2\eta_2)^{-1})-2Q_1\eta_1/\eta_2$. Как и в ([7], с. 293), запишем еще соответствие в точке M, откуда определим величины λ и ω_2 (вещественное λ соответствует точке M на нижнем основании прямоугольника). Отметим, что dw/du имеет полюсы второго порядка в точках $u=i\omega_2/2$ и $u=2\pi+i\omega_2/2$.

Так как функция $w(u)$ определена и значение φ_B задано, то можно найти такое значение t_B, что точка $t_B+i\omega_2/2$ на верхнем основании прямоугольника соответствует точке B. Предположим, что точке A соответствует значение $t_B+b+i\omega_2/2$ на верхнем основании, где $0<b<2\pi-t_B$. Ясно, что для определения φ_A достаточно знать величину b. В случае 1) значение b определяется по заданной величине φ_A, в случае 2) считаем b параметром.

Задача 2. Область течения ограничена снизу линией $C'ABC$, значение V_0 неизвестно, а сверху находится прямолинейная твердая стенка, параллельная вещественной оси (или свободная поверхность). Определить форму профиля и свободных поверхностей при выполнении одного из предположений 1) или 2).

Задача 3. Область течения ограничена снизу гладким дном $ABCD$ (AB и CD — лучи, лежащие на оси, а BC — кривая длины l^*), а сверху—свободной поверхностью, величина V_0 неизвестна. Определить форму профиля и свободной поверхности, если φ_B задано.

В плоскости комплексного потенциала в задачах 2, 3 области течения с разрезом по линии тока соответствует полоса $0<\operatorname{Im} w<Q$ с разрезом, параллельным оси $\psi=0$ и имеющим начало в точке $a+iQ_1$. Как и в задаче 1, отобразим эту область на прямоугольник плоскости u так, чтобы берега разреза, соответствующие профилю, перешли в нижнее основание (ширины 2π), продолжение разреза—в боковые стороны, а линии, соответствующие дну и свободным поверхностям,— в верхнее основание. Указанное отображение строится аналогично ([7], с. 176—178) и имеет вид

$$w=Q\pi^{-1}\ln\{\theta_0(u/2\pi)/\theta_0((u-\alpha)/2\pi)\}+C_1u+C_2,$$

где $u=\alpha+i\omega_2/2$ и $u=i\omega_2/2$ — полюсы производной dw/du. Система для определения α, C_1, C_2, w_2, λ (λ на нижнем основании соответствует точке M) имеет вид ([2], с. 165):

$$C_1=\Gamma/(2\pi),\ \Gamma w_2=2Q\alpha+4\pi Q_1,\ (Q/2\pi)\ln\{\theta_0(0)/\theta_0(\alpha/(2\pi))\}=\varphi_H+a-C_2,$$

$$Q\pi^{-1}\ln\{\theta_0(\lambda/(2\pi))/\theta_0(\lambda-\alpha/(2\pi))\}+\lambda\Gamma/(2\pi)+C_2=0,$$

$$(Q/\pi)\left[\theta_0'(\lambda/(2\pi))/\theta_0(\lambda/(2\pi))-\theta_0'(\lambda-\alpha/(2\pi))/\theta_0(\lambda-\alpha/(2\pi))\right]+\frac{\Gamma}{2\pi}=0,$$

θ_0 — тэта-функция. Решая полученную систему, определим все постоянные (возможность разрешимости системы отмечена в [2]). Значение t_B определится по величине φ_B. Опять вводим параметр $b=t_A-t_B$, служащий для нахождения величины φ_A.

2°. *Сведение к краевой задаче Гильберта.* Отобразим конформно прямоугольник плоскости u на круговое кольцо $q<|\zeta|<1$ функцией $\zeta=qe^{-iu}$, $q=e^{-\omega_2/2}$. При этом концы верхнего и нижнего оснований прямоугольника перейдут соответственно в точки $\zeta=1$ и $\zeta=q$. Криволинейному участку дна будет соответствовать дуга $\gamma=\{e^{i\theta},\ \theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_1,\ \theta_0=\theta_1-b,\ \theta_1=2\pi-t_B,\ 0<b<\theta_1\}$, а неизвестному профилю—окружность $|\zeta|=q$. Так как функция $dw/d\zeta$ известна, то на внутренней окружности из уравнения $v(s(\theta))s'(\theta)=$ $=|(dw/d\zeta)(qe^{i\theta})|$ с учетом равенства $s(-2\pi)=0$ определим функцию $s(\theta)=g(\theta)$ $t=qe^{i\theta}$, $\theta\in[-2\pi,\ 0]$.

Пусть L_1 и L_0 — соответственно внутренняя и внешняя границы кольца, а $\Psi(s)\in C^{(1)}$ — угол между касательной к дну и вещественной осью; $s\in[0,\infty)$ если точка B не фиксируется, $s\in[0,\ l^*]$ — в противном случае. Рассмотрим функцию $F(\zeta)=\ln[(dw/dz)(\zeta)]$. На L_1 известно значение

$$\operatorname{Re}F(qe^{i\theta})=g_1(\theta)\equiv\ln v(g(\theta)),\ \theta\in[-2\pi,\ 0]. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что

$$\operatorname{Im}F(e^{i\theta})=\arg[dw(e^{i\theta})/dz]=0 \tag{3}$$

на дугах окружности L_0, соответствующих прямолинейным участкам дна и прямолинейной твердой стенке (задача 2). В задаче 1 такой дугой является $\gamma_0=\{e^{i\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant\theta_1\}$; в задаче $2-\gamma_0$, а при наличии твердой стенки такими дугами будут γ_0 и $\gamma_1=\{e^{i\theta},\ \theta_2\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ \theta_2>\theta_1\}$; в задаче $3-\gamma_0$ и $\gamma_2=\{e^{i\theta},\ \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}$. Через $e^{i\theta_2}$ обозначена точка, соответствующая точке $\alpha+i\omega_2/2$ на верхнем основании, $\theta_1=\theta_0+b$. На дуге γ, соответствующей криволинейной части дна, получим

$$\operatorname{Im}F(e^{i\theta})=\pi-\Psi(s(\theta)),\ e^{i\theta}\in\gamma. \tag{4}$$

На свободных поверхностях $|dw/dz|=V_0=\mathrm{const}$, поэтому

$$\operatorname{Re}F(e^{i\theta})=\ln V_0, \tag{5}$$

где $e^{i\theta}\in L_0\setminus\{\gamma_0\cup\gamma\}$ в задаче 1, $e^{i\theta}\in\gamma_2$ либо $e^{i\theta}\in L_0\setminus\{\gamma_0\cup\gamma\}$ в задаче 2, $e^{i\theta}\in\gamma_2$ в задаче 3.

Пусть $F(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in L_0 \bigcup L_1$, — граничное значение функции $F(\zeta)$. Тогда условия (2) — (5) для функции $F(\zeta)$ определяют краевую задачу Гильберта с разрывными коэффициентами:

$$\begin{gathered} a(t)\,u(t) - b(t)\,v(t) = c(t), \\ a(t) = 1,\ b(t) = 0,\ c(t) = g_1(\theta),\ t = qe^{i\theta}, \\ a(t) = 1,\ b(t) = 0,\ c(t) = \ln V_0,\ t \in L^*, \\ a(t) = 0,\ b(t) = -1,\ c(t) = \Phi(s(\theta)),\ t \in L_0/L^*. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь L^* обозначает $L_0 \setminus \{\gamma_0 \bigcup \gamma\}$ в задаче 1, $L^* = \gamma_2$ либо $L_0 \setminus \{\gamma_0 \bigcup \gamma\}$ в задаче 2, $L^* = \gamma_2$ в задаче 3, $\Phi(s(\theta)) = \pi - \Psi(s(\theta))$ на γ, $\Phi(s(\theta)) = 0$ на γ_0 в задаче 1, на $\gamma_0 \bigcup \gamma_1$ или на γ_0 в задаче 2, на $\gamma_0 \bigcup \gamma_2$ в задаче 3. Заметим, что функция $\Phi(s(\theta))$ непрерывна в силу гладкости дна. Таким образом, все рассматриваемые задачи свелись к краевой задаче Гильберта с разрывными коэффициентами (6) (различие состоит лишь в величинах центральных углов, под которыми видна дуга L^*). Поэтому достаточно найти общее решение одной из задач, напр., задачи 1. Для решения задачи (6) используем результат работы [10].

Пусть $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$, $-\pi \leqslant \arg[a(t) - ib(t)] \leqslant \pi$. Введем в рассмотрение функцию $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, $t \in L_0 \bigcup L_1$, где $\beta(t)$ — целочисленная функция, зависящая от выбора класса решений. Находим решение, ограниченное в точках разрыва. Поэтому значения $\beta(t)$ выбираем так, чтобы в точках разрыва функции $\varphi(t)$ величина скачка находилась в интервале $(-\pi, 0]$ (см. [10]). На контуре L_1 нет точек разрыва и $\varphi(t)$ принимает постоянное значение, следовательно, $\beta(t) = 0$ и приращение функции $\varphi(t)$ при обходе L_1 равно нулю. Рассмотрим контур L_0. В силу выбора класса решений, имеем $\beta(t) = 0$, $t = e^{i\theta}$, $\theta \in [\theta^*, 2\pi]$, $\beta(t) = 1$, $t = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \theta^*]$, где $t^* = e^{i\theta^*}$, $\theta^* \in (0, \theta_1)$, — некоторая точка. Возьмем ее за начало обхода и найдем приращение функции $\varphi(t)$ при обходе L_0. Нетрудно убедиться, что $\varphi(t^* - 0) - \varphi(t^* + 0) = -\pi$. Здесь через $\varphi(t^* - 0)$ и $\varphi(t^* + 0)$ обозначены пределы, к которым стремится $\varphi(t)$, когда точка t стремится к t^* соответственно в положительном и отрицательном направлении. Следуя [10], число $\varkappa = -1$ будем называть индексом задачи. Условие (6) запишем в виде

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\psi(t)}(t - t^*)F(t)\} = c(t)\,|t - t^*|\cos[\beta_1(t)\pi n]/\cos(\beta(t)\pi), \tag{7}$$

где $\psi(t) = \varphi(t) + \arg(t - t^*) + \beta_1(t)\pi n$, $t \in L_0 \bigcup L_1$, $\beta_1(t) = 0$ при $t \in L_0$ и $\beta_1(t) = 1$ при $t \in L_1$, n — некоторое целое число.

Определим аналитическую и однозначную в кольце $q < |\zeta| < 1$ функцию $\chi(\zeta)$, граничные значения мнимой части которой равны $\psi(t)$. Такая функция существует, если выполняется условие однозначности ([11], с. 237):

$$\int\limits_{L_0 \bigcup L_1} \psi(t)\,\frac{dt}{it} = 0. \tag{8}$$

Учитывая, что $\int\limits_{L_0 \bigcup L_1} \arg(t - t^*)\,\frac{dt}{it} = 0$, нетрудно убедиться, что условие (8) будет выполнено, если положить $\theta^* = \theta_1/2$, $n = 0$. Тогда $\chi(\zeta) = i\boldsymbol{S}(\psi, \zeta)$, где $\boldsymbol{S}(\psi, \zeta)$ — оператор Шварца для кольца ([11], с. 238):

$$\boldsymbol{S}(\psi, \zeta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{L_0 \bigcup L_1} \psi(t)\left[\zeta\left(\frac{2}{i}\ln\zeta - \frac{2}{i}\ln t\right) + \beta_1(t)\,\eta_2\right]\frac{dt}{t}.$$

Далее, условие (7) перепишем в виде

$$\operatorname{Re}\{e^{-\chi^+(t)}(t - t^*)F(t)\} = c_1(t) \equiv c(t)\,|t - t^*|\,e^{-\chi_0(t)}/\cos(\beta(t)\pi), \tag{9}$$

где $\chi^+(t) = \chi_0(t) + i\psi(t)$ — граничное значение $\chi(\zeta)$. Решение задачи (9) существует, если выполняется условие

$$\int\limits_{L_0 \cup L_1} c_1(t)\,\frac{dt}{it} = 0 \tag{10}$$

или

$$\int\limits_0^{\theta_1/2} \Phi(s(\theta))\,|e^{i\theta} - e^{i\theta_1/2}|\,e^{-\chi_0(e^{i\theta})}\,d\theta - \int\limits_{\theta_1/2}^{\theta_1} \Phi(s(\theta))\,|e^{i\theta} - e^{i\theta_1/2}|\,e^{-\chi_0(e^{i\theta})}\,d\theta +$$

$$+ \ln V_0 \int\limits_{\theta_1}^{2\pi} |e^{i\theta} - e^{i\theta_1/2}|\,e^{-\chi_0(e^{i\theta})}\,d\theta - \int\limits_0^{2\pi} g_1(\theta)\,|qe^{i\theta} - e^{i\theta_1/2}|\,e^{-\chi_0(qe^{i\theta})}\,d\theta = 0.$$

Так как интеграл, стоящий при $\ln V_0$, отличен от нуля и функция $\Phi(s(\theta))$ остается ограниченной независимо от $s(\theta)$, то условие (10) можно удовлетворить выбором постоянной V_0.

Теперь запишем единственное решение задачи (6):

$$F(\zeta) = \frac{\exp\chi(\zeta)}{\zeta - e^{i\theta_1/2}}\left\{ \boldsymbol{S}(c_1,\ \zeta) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{L_0 \cup L_1} c_1(t)\left[\zeta\left(-\frac{2}{i}\ln t\right) + \beta_1(t)\,\eta_1\right]\frac{dt}{t}\right\}. \tag{11}$$

3°. *Вывод уравнения задачи и доказательство его разрешимости.* Уравнение задачи вытекает из очевидного равенства $dz/d\zeta = (dw/d\zeta)/(dw/dz)$. Используя (11), имеем $ds/d\varphi = \exp\{-\operatorname{Re} F(e^{i\varphi})\}\,H(\varphi)$, $\varphi \in [\theta_0,\ \theta_1]$, где $H(\varphi) = |dw(e^{i\varphi})/d\zeta|$. Окончательно уравнение задачи имеет вид

$$s(\varphi) = \int\limits_{\theta_0}^{\varphi} \exp\{-\operatorname{Re} F(e^{i\varphi})\}\,H(\varphi)\,d\varphi,\quad \varphi \in [\theta_0,\ \theta_1]. \tag{12}$$

Если продолжим непрерывно функцию $\Psi(s)$ на всю ось $-\infty < s < +\infty$, то правая часть (12) определит непрерывный оператор $\mathfrak{A}$, действующий в банаховом пространстве C_ν гёльдеровых функций $s(\theta)$, $\theta \in [\theta_0,\ \theta_1]$, с нормой

$$\|s\|_\nu = \max_{[\theta_0;\ \theta_1]} |s(\theta)| + \sup_{\substack{\theta' \neq \theta'' \\ \theta',\ \theta'' \in [\theta_0;\ \theta_1]}} |s(\theta') - s(\theta'')|/|\theta' - \theta''|^\nu,\ 0 < \nu < 1,$$

а уравнение задачи можно записать в виде $s(\varphi) = (\mathfrak{A}s)(\varphi)$. Уравнение (12) будет разрешимо, если покажем, что оператор $\mathfrak{A}$ вполне непрерывен в C_ν и переводит некоторый шар из C_ν в себя (тем самым обеспечивается выполнение условий теоремы Шаудера о неподвижной точке ([8], с. 620). Полная непрерывность означает, что $\mathfrak{A}$ переводит любой шар из C_ν в компактное множество из C_ν. Это свойство обеспечивается тем, что подынтегральное выражение в (12) представляет собой гёльдерову функцию, если $s(\theta)$ лежит в некотором шаре. Тогда оператор $\mathfrak{A}$ переводит функции $s(\theta)$ из этого шара в непрерывно-дифференцируемые ограниченные функции. По известному свойству гёльдеровских пространств [12] такое множество компактно в C_ν. Следовательно, оператор $\mathfrak{A}$ компактен. Осталось найти шар в C_ν, переводимый в себя оператором $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{F}(\zeta) = i\,[F(\zeta) - \ln V_0]$. Для нее имеем краевые условия $\operatorname{Re}\widetilde{F}(t) = -\Phi(s(\theta))$, $t = e^{i\theta}$, $\theta \in [0,\ \theta_1]$, $\operatorname{Im}\widetilde{F}(t) = 0$, $t = e^{i\theta}$, $\theta \in [\theta_1,\ 2\pi]$, $\operatorname{Im}\widetilde{F}(t) = g_1(\theta) - \ln V_0$, $t \in L_1$.

Докажем необходимый в дальнейшем результат, обобщающий лемму Зигмунда ([13], с. 200), на случай двусвязной области.

Л е м м а. *Пусть колебание функции* Ψ (*а следовательно, и функции* Φ) *ограничено*:

$$K = \sup\Psi - \inf\Psi < p\pi,\ 0 < p \leqslant 1. \tag{13}$$

Тогда справедлива оценка

$$\int_0^{\theta_1} \exp\{\pm p^{-1} \operatorname{Im} \widetilde{F}(e^{i\theta})\}\, d\theta \leqslant R_0, \tag{14}$$

где R_0 — *постоянная, не зависящая от* s.

Доказательство. На дуге $\gamma^* = \{\zeta = e^{i\theta} : 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1\}$ $\operatorname{Re} \widetilde{F}(\zeta) = -\Phi[s(\theta)]$. Отобразим конформно кольцо на двусвязную область D_ω плоскости ω, внешняя граница которой состоит из верхней полуокружности единичной окружности и отрезка $[-1;\ 1]$, причем ставим в соответствие дуге γ^* полуокружность. Указанное отображение является суперпозицией дробно-линейного преобразования $\widetilde{\omega}(\zeta)$ и функции, обратной к функции Жуковского,

$$\omega(\zeta) = -ic(e^{i\theta_1/2} + \zeta)/(e^{i\theta_1/2} - \zeta) + [-c^2((e^{i\theta_1/2} + \zeta)/(e^{i\theta_1/2} - \zeta))^2 - 1]^{1/2}, \quad c = \operatorname{tg}(\theta_1/4).$$

Пусть $|\widetilde{\omega}| = \rho$. Если $\zeta = qe^{i\varphi}$, то легко подсчитать, что

$$\rho = c\{[1 + q^2 + 2q\cos(\theta_1/2 - \varphi)]/[1 + q^2 - 2q\cos(\theta_1/2 - \varphi)]\}^{1/2}.$$

Следовательно, $\rho_{\max} = c(1+q)/(1-q)$. Значит, область $\{|\widetilde{\omega}| > \rho_{\max},\ \operatorname{Im}\widetilde{\omega} \geqslant 0\}$ целиком лежит в образе кольца E_q в плоскости $\widetilde{\omega}$. Имеем $\widetilde{\omega}(\omega) = -(\omega + \omega^{-1})/2$. Если $\omega = re^{i\gamma}$, то полукруг $\{\omega : |\omega| \leqslant r,\ \arg\omega \in [0;\ \pi]\}$ целиком лежит в D_ω, если при любых γ выполняется условие $(r^2 + r^{-2} + 2\cos 2\gamma)^{1/2} \geqslant 2\rho_{\max}$. Теперь имеем $(r^2 + r^{-2} + 2\cos 2\gamma)^{1/2} \geqslant (r^2 + r^{-2} - 2)^{1/2} \geqslant 2\rho_{\max}$ при $0 < r \leqslant r_0 < 1$, $r_0 = (\rho_{\max}^2 + 1)^{1/2} - \rho_{\max}$. Таким образом, расстояние от внутренней границы $L_{1\omega}$ области D_ω до $\omega = 0$ будет не меньше величины r_0. Переходя на плоскость ω, получим функцию $\widetilde{F}(\omega)$, регулярную в D_ω и принимающую вещественные значения при вещественных ω. Используя принцип симметрии, получим регулярную в трехсвязной области функцию $\Omega(\omega)$. Имеем $\Omega(e^{i\gamma}) = -\Phi[s(\gamma)] + i\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\gamma})$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$, $\Omega(e^{-i\gamma}) = -\Phi[s(\gamma)] - i\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\gamma})$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$.

Пусть $\beta = (\sup(-\Phi) + \inf(-\Phi))/2$. По теореме о вычетах

$$\exp\left[i\,\frac{\Omega(0) - \beta}{p}\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint \exp\left[i\,\frac{\Omega(\omega) - \beta}{p}\right]\frac{d\omega}{\omega},$$

где интеграл берется по границе трехсвязной области, проходимой в положительном направлении. Учитывая свойство симметрии, будем иметь

$$\exp\left[i\,\frac{\Omega(0) - \beta}{p}\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp\left[-i\,\frac{\Phi[s(\gamma)] + \beta}{p}\right]\operatorname{ch}[\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\gamma})/p]\, d\gamma + 2I_2,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{1\omega}} \exp\left[i\,\frac{\Omega(\omega) - \beta}{p}\right]\frac{d\omega}{\omega}.$$

Отделяя действительные части и учитывая, что $\cos[\Omega(0) - \beta] \leqslant 1$, выводим из предыдущих равенств

$$1 \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left[\frac{\Phi(s(\gamma)) + \beta}{p}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\gamma})}{p}\right]d\gamma + 2\operatorname{Re} I_2. \tag{15}$$

Так как $|\Phi(s(\gamma)) + \beta| \leqslant K/2$, то $\cos\{[\Phi(s(\gamma)) + \beta]/p\} \geqslant \cos[K/(2p)]$. Далее,

$$|\operatorname{Re} I_2| \leqslant \frac{K_1}{2\pi}\int_{L_{1\omega}} \frac{|d\omega|}{|\omega|} \leqslant M/(2\pi r_0), \quad K_1 = V_0^{1/p}\max_{\theta \in [-2\pi;\ 0]} \exp[-g_1(\theta)/p],$$

M — длина $L_{1\omega}$. Из (15) выводим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\operatorname{ch}\left[\frac{\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\gamma})}{p}\right]d\gamma \leqslant [1+2MK_1/(2\pi r_0)]/\cos[K/(2p)].$$

Далее,

$$\int\limits_0^{\theta_1}\exp\left\{\frac{\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\theta})}{p}\right\}d\theta \leqslant 2\int\limits_0^{\theta_1}\operatorname{ch}\left\{\frac{\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\theta})}{p}\right\}d\theta =$$

$$=2\int\limits_0^{\pi}\operatorname{ch}[\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\gamma})/p]\,\theta'(\gamma)\,d\gamma \leqslant 4\pi\,[1+MK_1/(\pi r_0)]\sec\frac{K}{2p}\equiv R,$$

т. к. $\theta'(\gamma)\leqslant 2$. Из последней оценки следует (14). Лемма доказана.

Теорема. *Пусть выполнено ограничение* (13). *Тогда уравнение* (12) *разрешимо в* C_ν *с* $0<\nu<1-p$.

Доказательство. Вполне-непрерывность оператора $\mathfrak{A}$ отмечена ранее. Покажем, что существует шар из C_ν, $\nu<1-p$, переводимый в себя оператором $\mathfrak{A}$. Имеем

$$|(\mathfrak{A}s)(\varphi_1)-(\mathfrak{A}s)(\varphi_2)| = \left|\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\exp\{-\operatorname{Re}F(e^{i\theta})\}\,H(\theta)\,d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{[\theta_0,\,\theta_1]}H(\theta)\left|\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1}\exp\left\{\frac{-\operatorname{Re}F(e^{i\theta})}{1-\nu}\right\}d\theta\right|^{1-\nu}|\varphi_1-\varphi_2|^{\nu} \leqslant \max_{[\theta_0;\,\theta_1]}H(\theta)\,V_0^{-1}\times$$

$$\times\left|\int\limits_0^{\theta_1}\exp\left\{\frac{\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\theta})}{1-\nu}\right\}d\theta\right|^{1-\nu}|\varphi_1-\varphi_2|^{\nu} \leqslant R_0^{1-\nu}V_0^{-1}\max_{[\theta_0;\,\theta_1]}H(\theta)\,|\varphi_1-\varphi_2|^{\nu}=R^*\,|\varphi_1-\varphi_2|^{\nu},$$

если $\nu<1-p$ (в силу леммы). Так как $(\mathfrak{A}s)(\theta_0)=0$, то из полученной оценки следует, что шар $\|s\|_\nu\leqslant R^*\,[1+(2\pi)^\nu]$ переводится в себя. По теореме Шаудера уравнение (12) разрешимо. Теорема доказана.

Следствие. *Задача* 1 *разрешима, если выполнено ограничение* (13) *и условие*

$$\int\limits_{|t|=q}\exp\{-F(t)\}\frac{dw}{dt}\,dt=0, \tag{16}$$

проверяемое после решения уравнения (12).

Доказательство. В случае 1) значение b (а следовательно, и значение θ_0) фиксировано. Поэтому разрешимость задачи эквивалентна разрешимости уравнения (12) при условии замкнутости Γ_z. Последнее требование выражается условием (16).

Обратимся к случаю 2). Так как b является параметром, то разрешимость задачи при выполнении (16) эквивалентна разрешимости системы из уравнения (12) и следующего соотношения для определения b:

$$l^*=\mathrm{I}_0(s,\;b)\equiv\int\limits_{\theta_1-b}^{\theta_1}\exp\{-\operatorname{Re}F(e^{i\varphi})\}\,H(\varphi)\,d\varphi. \tag{17}$$

Пусть $\widetilde{\theta}_0\in(0,\;\theta_1)$ — фиксированное значение. Осуществляя в (12) замену переменной $\varphi=b(\gamma-\theta_1)/(\theta_1-\theta_0)$, $\gamma\in[\widetilde{\theta}_0;\;\theta_1]$ перепишем это уравнение в виде

$$s(\gamma)=[\mathfrak{A}(s,\ b)](\gamma)\equiv\int\limits_{\widetilde{\theta}_0}^{\gamma}\exp\{-\operatorname{Re}F(e^{i\varphi(\gamma)})\}H(\varphi(\gamma))\frac{b\,d\gamma}{\theta_1-\widetilde{\theta}_0},\tag{12'}$$

где $s(\gamma)=s(\varphi(\gamma))\in C_\nu$, $\gamma\in[\widetilde{\theta}_0;\ \theta_1]$, — новая искомая функция, а $\mathfrak{A}$ — непрерывный оператор, определенный на топологическом произведении $C_\nu\times(0;\ \theta_1)$. Доказательство разрешимости системы (12′), (17) может быть построено как и в [5] (лемма на с. 92), если существуют такие значения b_1, $b_2\in(0;\ \theta_1)$, что $l^*<\mathbf{I}_0(s,\ b_1)$, $l^*>\mathbf{I}_0(s,\ b_2)$. Имеем (см. (17)):

$$\mathbf{I}_0(s,\ b)\leqslant V_0^{-1}\Big[\int\limits_{\theta_1-b}^{\theta_1}\exp\{\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\varphi})/p\}\,d\varphi\Big]^p\Big[\int\limits_{\theta_1-b}^{\theta_1}H(\varphi)^{1/(1-p)}d\varphi\Big]^{1-p}\leqslant$$
$$\leqslant R_0^p\,V_0^{-1}\,b^{1-p}\max_{\varphi\in[\theta_1-b;\ \theta_1]}H(\varphi).$$

По условию задачи функция $H(\varphi)$ имеет представление $H(\varphi)=\varphi^{-2}g_0(\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant\theta_1$, где $g_0(\varphi)>0$ — ограниченная функция. Следовательно,

$$\mathbf{I}_0(s,\ b)\geqslant V_0^{-1}\Big[\int\limits_{\theta_1-b}^{\theta_1}\varphi^{-2/p}\exp\{-\operatorname{Im}\widetilde{F}(e^{i\varphi})/p\}\,d\varphi\Big]^{-p}\Big[\int\limits_{\theta_1-b}^{\theta_1}g_0(\varphi)^{1/(1+p)}\Big]^{1+p}\geqslant$$
$$\geqslant V_0^{-1}(\theta_1-b)^{-2}R_0^{-p}\min_{[0;\ \theta_1]}g_0(\varphi).$$

В силу ограниченности R_0, V_0^{-1}, $H(\theta_1)$ и $g_0(\varphi)$ независимо от искомой функции выписанные неравенства обеспечивают существование b_1 и b_2. Доказательство закончено.

Замечание. Так как уравнения задач 2, 3 имеют, соответственно, вид (12), (17), то доказательство их разрешимости может быть построено аналогично. Отличие состоит лишь в том, что $H(\varphi)=\varphi^{-1}g_0(\varphi)$ при $0\leqslant\varphi\leqslant\theta_1$ (т. к. $dw/d\zeta$ имеет полюс первого порядка в $\zeta=1$).

В заключение авторы выражают благодарность профессору Л. А. Аксентьеву и профессору Р. Б. Салимову за содействие в работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонцев С. Н. О некоторых задачах газовой динамики со свободными границами в двусвязных областях.— Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1969, вып. 1, с. 111—123.

2. Чебарев А. И. Обратная задача обтекания произвольного профиля ограниченным потоком.—Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1973, вып. 10, с. 163—170.

3. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, 1977.— 424 с.

4. Хайкин М. И. Теоремы существования и единственности для обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций.— Кандид. диссерт., Казан. ун-т, 1961.

5. Салимов Н. Б. Некоторые задачи фильтрации жидкости с неизвестными границами.— Автореф. кандид. диссерт., Казань, 1969.

6. Елизаров А. М. О смешанной обратной краевой задаче Демченко.— ВИНИТИ, № 164—78 Деп., 1978.

7. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения.— Казань, 1965.— 333 с.

8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— 2-е изд.— М., 1977.—742 с.

9. Елизаров А. М. О смешанной обратной краевой задаче обтекания произвольного профиля.—Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1980, вып. 17, с. 57—62.

10. Салимов Р. Б., Селезнёв В. В. Решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1980, вып. 17, с. 141—154.

11. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций.— 2-е изд.— М., 1970.—304 с.

12. Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Шкалы банаховых пространств.— УМН, 1966, т. XXI, № 2, с. 89—168.

13. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны.— М., 1964.— 466 с.

г. Казань

Поступила
25 VI 1979