A. S. Markus, V. I. Matsaev, Factorization of a weakly hyperbolic bundle,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1976, Volume 10, Issue 1, 81–82

https://www.mathnet.ru/eng/faa2136

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 81—82.

О ФАКТОРИЗАЦИИ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПУЧКА

А. С. Маркус, В. И. Мацаев

1. В последнее время появился ряд работ, в которых рассматривается задача об отщеплении от голоморфной оператор-функции $L(\lambda)$ линейного или полиномиального множителя, отвечающего некоторой замкнутой части σ ее спектра $\sigma(L)$. Почти все эти работы [1] — [6] посвящены случаю, когда σ — изолированная часть $\sigma(L)$. Основным аналитическим аппаратом в этом случае (см. [2] — [5]) являются теоремы Гохберга-Лайтерера о факторизации оператор-функции, обратимой на некоторой замкнутой кривой. Если же σ не является изолированной частью $\sigma(L)$, то не существует замкнутой кривой, отделяющей σ от $\sigma(L) \setminus \sigma$, и поэтому указанные теоремы не могут быть применены.

В этой заметке предлагается новый метод спектральной факторизации голоморфной оператор-функции, основанный на изучении спектральных подпространств оператора сдвига в некоторых пространствах голоморфных вектор-функций. В качестве модельного объекта рассматривается слабо гиперболический пучок.

2. Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство и $L(\mathfrak{H})$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$.

Полиномиальный операторный пучок $L(\lambda) = \lambda^n I + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \ldots + A_0$ ($A_j \in L(\mathfrak{H})$) будем называть *слабо гиперболическим* *), если при любом $f \neq 0$ все корни полинома $(L(\lambda) f, f)$ вещественны. Очевидно, что тогда $A_j^* = A_j$ ($j = 0, 1, \ldots, n-1$).

Обозначим через $p_1(f) \geqslant p_2(f) \geqslant \ldots \geqslant p_n(f)$ корни полинома $(L(\lambda) f, f)$. Множество значений функционала $p_j(f)$ ($f \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}$) называется *$j$-й спектральной зоной* пучка $L(\lambda)$ и обозначается через Δ_j. Очевидно, Δ_j — ограниченный промежуток на вещественной оси. Г. Лангер [7] установил, что спектральные зоны не перекрываются, т. е. $a_j \geqslant b_{j+1}$ ($j = 1, 2, \ldots, n-1$), где $a_j = \inf \Delta_j$, $b_j = \sup \Delta_j$.

Основным результатом этой заметки является следующая

Теорема 1. *Разобьем как-либо множество $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ на два подмножества: J_1, содержащее k индексов ($1 \leqslant k < n$), и J_2. Пучок $L(\lambda)$ допускает факторизацию $L(\lambda) = Q_{n-k}(\lambda) L_k(\lambda)$, где $Q_{n-k}(\lambda)$ ($L_k(\lambda)$) — пучок степени $n-k$ (k) со старшим коэффициентом I, причем $\sigma(Q_{n-k}) \subset \bigcup_{j \in J_2} \overline{\Delta}_j$, $\sigma(L_k) \subset \bigcup_{j \in J_1} \overline{\Delta}_j$.*

Отметим, что Г. Лангер, пользуясь результатами теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой, доказал теорему 1 для двух частных случаев: когда $k = 1$ (см. [8]) и когда одно из множеств J_1, J_2 состоит из четных индексов, а другое — из нечетных (см. [9]). В приведенной общей формулировке теорема 1 является, по-видимому, новой и в случае, когда $\overline{\Delta}_i \cap \overline{\Delta}_j = \phi$ ($i \in J_1$, $j \in J_2$), хотя в этом случае ее можно доказать методами, применявшимися в [2] — [5].

3. Укажем некоторые этапы доказательства теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma(L) \subset \{|\lambda| < 1\}$ и что ни одна зона Δ_j не вырождается в точку.

Через G обозначим подпространство пространства $H_-^2(\mathfrak{H})$, состоящее из тех вектор-функций $f(\lambda)$, для которых $L(\lambda) f(\lambda) \in H_+^2(\mathfrak{H})$, и через V — оператор из $L(G)$, определенный равенством $(Vf)(\lambda) = \lambda f(\lambda) - \lim\limits_{\lambda \to \infty} (\lambda f(\lambda))$. Легко видеть, что $\sigma(V) = \sigma(L)$ и $\| (V - \lambda I)^{-1} \| \leqslant C \| L^{-1}(\lambda) \|$ ($\lambda \notin \sigma(L)$). Отсюда вытекает, что $\| (V - \lambda I)^{-1} \| \leqslant C_1 |\operatorname{Im} \lambda|^{-2}$, и поэтому к оператору V применима теория двойственности спектральных подпространств, развитая Бишопом [10] (см. также [11]).

Пусть $A \in L(\mathfrak{H})$ и F ($\subset \mathbf{C}$) — компакт. Через $M(F, A)$ обозначается замыкание множества всех $h \in \mathfrak{H}$, для которых существует вектор-функция $h(\lambda)$ со значениями в $\mathfrak{H}$, голоморфная вне F и такая, что $(A - \lambda I) h(\lambda) = h$ ($\lambda \notin F$).

Разобьем множество J на три подмножества N_1, N_2 и N_3 следующим образом: $j \in N_1$, если $j - 1$ и $j \in J_1$; $j \in N_2$, если $j - 1$ и $j \in J_2$ или если $j = 1$ и $1 \in J_2$. Выберем λ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) так, чтобы $\lambda_j \geqslant b_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), $\lambda_{j+1} \leqslant a_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n-1$), и положим

$$q(\lambda) = \prod_{j \in N_3} (\lambda - \lambda_j), \quad r(\lambda) = -\prod_{j \in N_1} (\lambda - \lambda_j) \prod_{i \in N_2} (\lambda - \lambda_i)^{-1}, \quad F = \bigcup_{j \in J_1} \overline{\Delta}_j, \quad M = M(F, V), \quad M_1 = \overline{q(V) M}.$$

---

*) По терминологии Г. Лангера, $L(\lambda)$ — пучок с чисто вещественными нулями.

Лемма 1. *Для любой вектор-функции $f \in M_1$ главная часть $\varphi(\lambda)$ функции $r(\lambda)\,(L(\lambda) f(\lambda), f(\bar{\lambda}))$ является неванлинновской, т. е.* $\operatorname{Im}\varphi(\lambda) \geqslant 0$ *при* $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$.

Эта лемма доказывается на основании [5].

Обозначим через $S\colon M \to \mathfrak{H}^k$ оператор, определенный равенством $S\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\lambda^{-i}\right) = (f_1, \ldots, f_k)$.

Лемма 2. *Существует подпространство $M_2\ (M_1 \subset M_2 \subset M)$ такое, что $S \mid M_2$ является изоморфизмом M_2 на $\mathfrak{H}^k$ и что $VM_2 \subset M_2$.*

Обозначим через M_0 подпространство M_2, состоящее из функций $f(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\lambda^j$, для которых $f_1 = \ldots = f_{k-1} = 0$, и через $S_k\colon M_0 \to \mathfrak{H}$ — оператор, определенный равенством $S_k f = f_k$. Из леммы 2 следует, что S_k изоморфно отображает M_0 на $\mathfrak{H}$. Для каждого $h \in \mathfrak{H}$ положим $C(\lambda)h = (S_k^{-1}h)(\lambda)$.

Лемма 3. *$C(\lambda)$ — голоморфная и обратимая в $\mathbb{C} \setminus F$ оператор-функция, причем $C^{-1}(\lambda)$ — полиномиальный пучок степени k со старшим коэффициентом I.*

Положим $Q_{n-k}(\lambda) = L(\lambda)\,C(\lambda)$. Без труда доказывается, что $Q_{n-k}(\lambda)$ — полиномиальный пучок степени $n - k$ со старшим коэффициентом I, и для окончания доказательства теоремы 1 остается показать, что $Q_{n-k}(\lambda)$ обратим при $\lambda \notin \overline{\mathbb{C} \setminus F}$.

4. Следствие 1. *Пусть $L(\lambda)$ — слабо гиперболический пучок и множество индексов $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ разбито произвольным образом на некоторые подмножества $J_1, J_2, \ldots, J_m$, причем J_k содержит n_k индексов. Если $F_k = \bigcup_{j\in J_k} \bar{\Delta}_j$ и $F_k \cap F_{k+2} = \phi$ $(k = 1, 2, \ldots, m-2)$, то $L(\lambda) = L_1(\lambda)\,L_2(\lambda) \ldots L_m(\lambda)$, где $L_k(\lambda)$ — полиномиальный пучок степени n_k со старшим коэффициентом I и $\sigma(L_k) \subset F_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.*

Отсюда, в частности, вытекает

Следствие 2. *Слабо гиперболический пучок $L(\lambda)$ разлагается на линейные множители: $L(\lambda) = (\lambda I - Y_1)(\lambda I - Y_2) \ldots (\lambda I - Y_n)$, где $\sigma(Y_j) \subset \bar{\Delta}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.*

Следствие 3. *Если в условиях теоремы 1 $\bar{\Delta}_j \cap \bar{\Delta}_i = \phi$ $(j \in J_1,\ i \in J, i \neq j)$, то система собственных векторов $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из $\bigcup_{j\in J_1} \Delta_j$, k-кратно полна в $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда полна в $\mathfrak{H}$ система собственных векторов $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из Δ_j, при каждом $j \in J_1$. Если указанная система k-кратно полна, то k-кратные разложения по ней безусловно сходятся.*

При некоторых дополнительных ограничениях следствия 2, 3 установлены в [12].

Авторы благодарны Г. Лангеру за ценное обсуждение результатов.

Институт математики с ВЦ АН МССР
Отделение Института
химической физики АН СССР

Поступило в редакцию
4 мая 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лангер Н., Acta sci. math. Szeged **35** (1973), 73—86. **2.** Маркус А. С., Мацаев В. И., Руссу Г. И., Acta sci. math. Szeged **34** (1973), 245—271. **3.** Вирозуб А. И., Мацаев В. И., Функц. анализ **8**, вып. 1 (1974), 1—10. **4.** Маркус А. С., Мацаев В. И., Функц. анализ. **9**, вып. 1 (1975), 76—77. **5.** Маркус А. С., Мацаев В. И., Матем. исслед. **9**, вып. 4 (1974), 79—91. **6.** Langer H., Math. Nachr. **65** (1975), 301—319. **7.** Langer H., J. Funct. Anal. **12**, № 1 (1973), 13—29. **8.** Langer H., J. Funct. Anal. **16**, № 2, (1974), 221—234. **9.** Langer H., Acta sci. math. Szeged **38** (1976). **10.** Bishop E., Pacific J. Math. **9**, № 2 (1959), 379—397. **11.** Ломоносов В. И., Любич Ю. И., Мацаев В. И., ДАН СССР **216**, № 4 (1974), 737—739. **12.** Кабак В. И., Маркус А. С., УМН **XXX**, вып. 4 (1975), 245—246.