



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Kirillov, On the separability of  $L^p$  spaces in the case of measures on locally convex spaces,  
*Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1991, Number 7, 77

<https://www.mathnet.ru/eng/ivm5123>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 20, 2025, 10:32:36



5. Руткас А. Г. Свойства функции рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией // ДАН СССР.—1976.—Т. 23.—№ 1.—С. 38—40.

6. Руткас А. Г. Матрицы передачи и рассеяния многополюсника // Мат. моделирование и теория электрических цепей.—Киев, 1978.—Вып. 16.—С. 3—15.

7. Руткас А. Г. Унитарные реализации голоморфных функций в пространстве с индефинитной метрикой // ДАН УССР.—1984.—№ 4.—С. 16—19.

г. Харьков

Поступила  
01.02.1990

А. И. Кириллов

УДК 517.982

## О СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВ $L^p$ В СЛУЧАЕ МЕР НА ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство,  $\mathbf{B}$  есть  $\sigma$ -алгебра его борелевских подмножеств,  $m$  — мера на  $\mathbf{B}$ ,  $C(X)$  — банахово пространство непрерывных на  $X$  ограниченных функций с топологией равномерной сходимости на  $X$ ,  $C_0(X)$  состоит из функций с компактными носителями,  $L^p$  — пополнение  $C_0(X)$  по норме

$$\|f\| = \left( \int_X |f(x)|^p dm(x) \right)^{1/p},$$

$M$  — пространство классов эквивалентных по отношению  $\rho(A, B) = m(\Delta AB)$  множеств из  $\mathbf{B}$  конечной меры  $m$ . Расстояние в  $M$  определяется функцией  $\rho$ .

Вопрос о сепарабельности  $L^p$  важен для приложений, и с этой точки зрения он недостаточно освещен в монографиях по функциональному анализу. Известно, что  $L^p$  сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно пространство  $M$  ([1], с. 174). В частности,  $L^p$  сепарабельно, если  $X$  — локально-компактное пространство со счетной базой ([2], с. 142) или сепарабельная локально-компактная группа ([1], с. 260). В этой заметке рассматривается случай, когда  $X$  — локально выпуклое топологическое векторное пространство, а  $m$  — радонова вероятностная мера на  $\mathbf{B}$ . Соответствующее пространство  $L^2$  широко используется в теории представлений непрерывных групп, квантовой теории поля и статистической физике (см., напр., [3], с. 451; [4], гл. 7).

Обозначим через  $X'$  топологическое сопряженное к  $X$ , через  $\langle x', x \rangle$ , где  $x' \in X'$ ,  $x \in X$ , — каноническую билинейную форму двойственности  $X'$  и  $X$ .

Теорема. Если  $X'$  сепарабельно в сильной топологии, мера  $m$  радонова и конечна, то пространство  $L^p$  сепарабельно.

Схема доказательства. Достаточно проверить, что сепарабельно пространство  $L^2$ . Для этого, во-первых, из теоремы Стоуна — Вейерштрасса ([2], с. 119) выводим, что если  $u \in C_0(X)$  и  $\forall x' \in X'$  ( $u, \exp(i \langle x', x \rangle) = 0$ ), то  $u \equiv 0$ . Отсюда следует, что линейная оболочка функций  $\exp(i \langle x', x \rangle)$  плотна в  $L^2$  (ср. [3], с. 454), и остается показать, что эта линейная оболочка сепарабельна. Всюду плотное в ней счетное множество образуют функции вида  $\sum_k (a_k + ib_k) \exp(i \langle x'_k, x \rangle)$ , где  $a_k$  и  $b_k$  — рациональные числа, а  $x'_1, x'_2, \dots$  — последовательность, всюду плотная в  $X'$ . Для доказательства этого утверждения используется то, что мера  $m$  радонова.

Замечание. Очевидно, что утверждение теоремы справедливо и в случае  $\sigma$ -конечной радоновой меры  $m$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Халмош П. Теория меры.— М.: Ин. лит., 1953.— 292 с.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1977.— 360 с.
3. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М.: Физматгиз, 1961.— 472 с.
4. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе.— Киев, 1988.— 680 с.

г. Москва

Поступила  
27.11.1990