

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. I. Roizen, Approximate method for solving heat-conduction problems in multilayered solids, *TVT*, 1981, Volume 19, Issue 4, 821–831

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

January 13, 2025, 06:47:16



УДК 536.248

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛ*Ройзен Л. И.*

Разработан приближенный способ решения одномерных задач стационарной теплопроводности в многослойных телах, основанный на последовательном применении операционных и матричных методов.

В практике тепловых расчетов широко распространены задачи теплопроводности для многослойных тел. Точные решения таких задач приводят к необходимости определять собственные числа из трансцендентных характеристических уравнений, включающих значительное число параметров [1–7]. Численные оценки температур требуют проведения весьма сложных расчетов, хотя имеются подробные таблицы собственных чисел для двухслойных систем [8], а вычисление характеристических определителей упрощается рекуррентными соотношениями [9, 10].

В связи с этим актуальна разработка приближенных методов расчета полей температур в таких системах. В [11] получены формулы для эквивалентной теплопроводности многослойных тел, позволяющие свести решение задачи к задаче теплопроводности для эквивалентного однородного тела. В [12, 13] рассматриваются системы с источниками тепла при граничных условиях третьего рода применительно к нагреву обмоток и других элементов электрических машин. Приближенное решение получено только для температуры наиболее нагретой точки активного (тепловыделяющего) слоя в виде

$$\vartheta = \vartheta_{\max} [1 - \exp(-\tau/T)], \quad (1)$$

где ϑ_{\max} — максимальное установившееся превышение температуры тела по отношению к окружающей среде, определяемое с учетом всех термических сопротивлений; $T = (\vartheta_{\max}/Q) \cdot \sum c_i G_i$ — постоянная времени. Полученные решения не дают возможности провести достаточно точный анализ распределения температуры в различных телах многослойной системы. Дальнейшее развитие этого метода приводит к уточнению выражения для «постоянной времени» T введением весовых коэффициентов η_i при теплоемкостях $c_i G_i$ тел, составляющих систему [13]. Аналитическое выражение для η_i получено в [14], что позволяет получить уточненное по сравнению с (1) выражение для постоянной времени. Получение выражения для температуры даже в одной (наиболее нагретой) точке многослойного тела весьма затруднительно. Тем более сложно проводить анализ температурных полей. В более общих предположениях приближенные методы решения задач теплопроводности в многослойных средах на основе разложения в ряды передаточных функций развиты в [15].

В данной работе простейшие разложения изображения, учитывающие пространственную неоднородность температуры, получаются, минуя стадию точного решения систем уравнений. Для этого уже на первом этапе решения вместо трансцендентных функций от параметра преобразования

по Лапласу s используются линейные представления членов матриц, связывающих температуры и тепловые потоки на границах каждого слоя. Последующее матричное перемножение позволяет выделить в явном виде влияние отдельных неоднородных частей системы на процесс нестационарной теплопроводности и представить результаты в простой и компактной форме. На основании проведенного анализа введены эквивалентные числа \bar{B}_i и F_0 , позволяющие свести задачу определения температуры в центре многослойной системы и на ее поверхности к задаче теплопроводности в однородном теле. Такой переход к эквивалентным параметрам выполнен проще и в более общих предположениях, чем известно из литературы [6].

Постановка задачи. Схема анализируемой системы представлена на рис. 1. Она состоит из активных слоев с внутренним тепловыделением, причем в некоторых случаях будем считать температуру по толщине

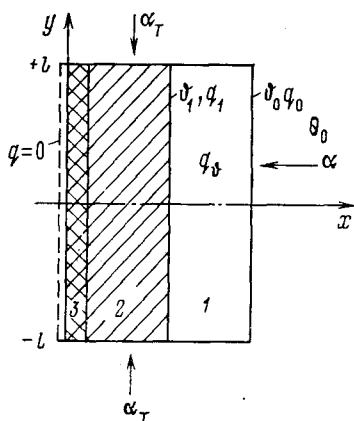


Рис. 1. Схема анализируемой системы: 1 — активный слой; 2 — пассивный слой; 3 — изоляционный слой

такого слоя неизменной (идеальный проводник тепла); пассивных слоев — элементов с конечной теплопроводностью и теплоемкостью без тепловыделений; изоляции — элементов, которые не обладают теплоемкостью, но имеют существенное термическое сопротивление. Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c\rho} \quad (2)$$

при нулевых начальных условиях и $q_v=0$ записывается для пассивного слоя I (рис. 1) в терминах изображения по Лапласу в виде

$$\bar{\vartheta}_x = \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_1}} x \right) \bar{\vartheta}_1 + \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt{s/a_1} x}{\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1 s}} \right) \bar{q}_1;$$

$$\bar{q}_x = \sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1 s} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_1}} x \right) \bar{\vartheta}_1 + \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_1}} x \right) \bar{q}_1. \quad (3)$$

Здесь $\bar{\vartheta}_0$, \bar{q}_0 , $\bar{\vartheta}_1$, \bar{q}_1 , $\bar{\vartheta}_x$, \bar{q}_x — изображения температур и тепловых потоков на границах и внутри первого слоя. Соотношение (3) при $x=\delta_1$ можно записать в матрично-векторной форме [16, 17]

$$\begin{pmatrix} \bar{\vartheta}_0 \\ \bar{q}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_1}} \delta_1 & \frac{\operatorname{sh} \sqrt{s/a_1} \delta_1}{\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1 s}} \\ \sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1 s} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_1}} \delta_1 & \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_1}} \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\vartheta}_1 \\ \bar{q}_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{\vartheta}_1 \\ \bar{q}_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\begin{pmatrix} \bar{\vartheta}_0 \\ \bar{q}_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{\vartheta}_1 \\ \bar{q}_1 \end{pmatrix}$ — одностолбцовые векторы изображений температуры и тепловых потоков на границах слоя; A — квадратная матрица перехода, связывающая значения этих векторов.

Если имеется система из n пассивных тел с идеальным тепловым контактом между слоями, повторное применение (4) приводит к связи между

векторами $\begin{pmatrix} \bar{\vartheta}_0 \\ \bar{q}_0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \bar{\vartheta}_n \\ \bar{q}_n \end{pmatrix}$ в виде

$$\left\| \frac{\bar{\vartheta}_0}{\bar{q}_0} \right\| = \prod_{i=1}^n A_i \left\| \frac{\bar{\vartheta}_n}{\bar{q}_n} \right\|. \quad (5)$$

Если кроме пассивных имеются слои изоляции, то матрица перехода на слое изоляции имеет вид

$$D_i = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \delta_i/\lambda_i \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad (6)$$

т. е. D получается из матрицы A переходом к стационарным условиям ($s \rightarrow 0$). Если между слоями имеет место контактное сопротивление R_i , соответствующая матрица имеет вид (6) с заменой δ_i/λ_i на R_i .

Ограничиваясь членами, линейными по параметру s преобразования Лапласа, используем матрицу A в виде

$$A = (a_{rk}) = \left\| \begin{array}{cc} 1 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{a} s & \frac{\delta}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{3!} \frac{\delta^2}{a} s \right) \\ \delta c p s & 1 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{a} s \end{array} \right\|. \quad (7)$$

Переход к форме (7) позволяет наиболее просто в аналитической форме

определить линейные по s члены матрицы $\prod_{i=1}^n A_i$.

Рассмотрим теперь матрицу перехода для активного тела. Результат решения (2) при $q_v = \text{const}$ можно записать в виде соотношения, связывающего изображение температур и тепловых потоков на границах слоя

$$\left\| \frac{\bar{\vartheta}_0}{\bar{q}_0} \right\| = A \left\| \frac{\bar{\vartheta}_1}{\bar{q}_1} \right\| + M, \quad (8)$$

где A — матрица (4), (7); M — одностолбцовая матрица

$$M = -\frac{q_a}{s} \left\| \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \right\|$$

$$e_1 = \frac{\text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta - 1}{\delta c p s}, \quad e_2 = \frac{\lambda \sqrt{\frac{s}{a}} \text{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta}{\delta c p s}, \quad (9)$$

где $q_a = q_v \delta$ — плотность теплового потока внутренних источников тепла (на единицу поверхности слоя). Ограничиваясь членами, линейными по

параметру s , используем $\left\| \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \right\|$ в виде

$$e_1 = \frac{1}{2!} \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2 \delta c p s, \quad e_2 = 1 + \frac{1}{3!} \frac{\delta}{\lambda} \delta c p s. \quad (10)$$

Рассмотрим матрицу перехода системы, состоящей из n тел с внутренними источниками тепла

$$\left\| \frac{\bar{\vartheta}_i}{\bar{q}_i} \right\| = A_{i+1} \left\| \frac{\bar{\vartheta}_{i+1}}{\bar{q}_{i+1}} \right\| + M_{i+1} \quad (i=0, \dots, n-1). \quad (11)$$

Перемножая соответствующие матрицы, найдем

$$\left\| \frac{\bar{\vartheta}_0}{\bar{q}_0} \right\| = M_1 + A_1 M_2 + A_1 A_2 M_3 + \dots + A_1 \dots A_{n-1} M_n +$$

$$+A_1 \dots A_n \left\| \frac{\bar{\vartheta}_n}{\bar{q}_n} \right\| = \sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^{j-1} A_i \right) M_j + \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) \left\| \frac{\bar{\vartheta}_n}{\bar{q}_n} \right\|, \quad (12)$$

причем при $j=1$, $\prod_{i=1}^{j-1} A_i = 1$.

Если в j -м слое нет источников тепла, член с M_j исчезает. Если слой можно считать идеальным проводником тепла ($\lambda = \infty$), то матрицы A и M приобретают соответственно вид

$$A_{\lambda=\infty} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \delta c \rho s & 1 \end{array} \right\|, \quad M_{\lambda=\infty} = -\frac{q_a}{s} \left\| \begin{array}{cc} 0 & \\ & 1 \end{array} \right\|. \quad (13)$$

Выражения (5) и (12) представляют два линейных соотношения, связывающих между собой изображения температур и тепловых потоков на двух крайних поверхностях. Два граничных условия дают возможность определения всех четырех величин $\bar{\vartheta}_0$, \bar{q}_0 , $\bar{\vartheta}_n$, \bar{q}_n . Затем из (4) и (11) можно последовательно определить все $\bar{\vartheta}_i$, \bar{q}_i , а также найти значения $\bar{\vartheta}_x$, \bar{q}_x внутри слоя.

Цилиндрические многослойные системы. Для цилиндрического слоя, выделяя линейные члены, запишем матрицу перехода $A = \|a_{rk}\|$ в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \left(\frac{1}{2} r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{r_0^2}{4} - \frac{r_1^2}{4} \right) \frac{s}{a}, \\ a_{12} &= \frac{r_1}{\lambda} \left\{ \ln \frac{r_0}{r_1} + \left[\left(\frac{r_0^2}{4} + \frac{r_1^2}{4} \right) \ln \frac{r_0}{r_1} - \left(\frac{r_0^2}{4} - \frac{r_1^2}{4} \right) \right] \frac{s}{a} \right\}, \\ a_{21} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_1}{r_0} \right) \delta c \rho s \quad (\delta = r_0 - r_1), \\ a_{22} &= \frac{r_1}{r_0} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} r_0^2 \ln \frac{r_0}{r_1} + \frac{r_1^2}{4} - \frac{r_0^2}{4} \right] \frac{s}{a} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где r_0 , r_1 — наружный и внутренний радиусы слоя.

Для центрального цилиндрического тела радиусом r_0 ($r_1=0$; $q_1=0$) матрица A имеет вид

$$a_{11} = 1 + \frac{r_0^2}{4} \frac{s}{a}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = \frac{1}{2} c \rho r_0 s, \quad a_{22} = 0. \quad (15)$$

Соответственно для сферического слоя

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{3} \frac{r_1}{r_0} \right) \frac{\delta^2}{a} s, \quad a_{21} = \left(\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{3} \frac{\delta^2}{r_0^2} \right) \delta c \rho s, \\ a_{12} &= \frac{\delta}{\lambda} \frac{r_1}{r_0} \left(1 + \frac{1}{3!} \frac{\delta^2}{a} s \right), \\ a_{22} &= \frac{r_1^2}{r_0^2} + \left(\frac{1}{3} \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{3!} \frac{r_1^2}{r_0^2} \right) \frac{\delta^2}{a} s, \quad \delta = r_0 - r_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Для сферического тела радиусом r_0 члены матрицы A получаются из (16) при $r_1=0$ и $\delta=r_0$.

Учет двумерности температурного поля. Рассмотрим многослойную систему (рис. 1), на границах которой $y = \pm l$ заданы граничные условия третьего рода. Изменение температуры в направлении y может быть приближенно учтено с помощью метода теплового баланса. Температура в слое в направлении y аппроксимируется полиномом второй степени с

учетом граничного условия и симметрии поля относительно $y=0$

$$\frac{\vartheta - \vartheta_s}{\theta_0 - \vartheta_s} = -\frac{Bi_l}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{l} \right)^2 \right], \quad Bi_l = \alpha_\tau \frac{l}{\lambda}, \quad (17)$$

где ϑ_s — температура поверхности ($y = \pm l$); θ_0 — температура среды; α_τ — коэффициент теплоотдачи для торцовых поверхностей. Интегрируя уравнение нестационарной теплопроводности по y и вводя среднее значение температуры

$$u = \frac{1}{l} \int_0^l \vartheta dy, \quad \frac{u - \vartheta_s}{\theta_0 - \vartheta_s} = -\frac{Bi_l}{3},$$

имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\alpha_\tau}{\lambda l} \frac{(\theta_0 - u)}{\left(1 + \frac{Bi_l}{3}\right)} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) в изображениях можно записать в виде, аналогичном (8), где вектор-столбцы включают изображения средних температур \bar{u} и тепловых потоков $\bar{q} = \lambda d\bar{u}/dx$

$$\begin{vmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{q}_0 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{q}_1 \end{vmatrix} + M.$$

Матрицы A и M имеют вид

$$A = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} H & \frac{\delta}{\lambda} \frac{\operatorname{sh} H}{H} \\ \frac{\lambda}{\delta} H \operatorname{sh} H & \operatorname{ch} H \end{vmatrix},$$

$$H = \sqrt{\frac{s}{a} \delta^2 + N^2}, \quad N^2 = \frac{\alpha_\tau \delta^2}{\lambda l \left(1 + \frac{Bi_l}{3}\right)}, \quad (19)$$

$$M = -\frac{\theta_0}{s} \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \end{vmatrix}, \quad e_1 = (\operatorname{ch} H - 1) / \left(1 + \frac{c\rho l}{\alpha_\tau} \left(1 + \frac{Bi_l}{3}\right) s\right),$$

$$e_2 = \left(\frac{\lambda}{\delta} H \operatorname{sh} H\right) / \left(1 + \frac{c\rho l}{\alpha_\tau} \left(1 + \frac{Bi_l}{3}\right) s\right).$$

Разлагая в ряд по параметру s и ограничиваясь линейными членами, используем A и M в виде

$$A = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} N + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} N}{N} \frac{\delta^2}{a} s & \frac{\delta}{\lambda} \left(\frac{\operatorname{sh} N}{N} + \frac{1}{2} \frac{N \operatorname{ch} N - \operatorname{sh} N}{N^3} \frac{\delta^2}{a} s\right) \\ \frac{\lambda}{\delta} N \operatorname{sh} N + \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} N}{N} + \operatorname{ch} N\right) c\rho \delta s & \operatorname{ch} N + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} N}{N} \frac{\delta^2}{a} s \end{vmatrix},$$

$$e_1 = \left(\operatorname{ch} N - 1 + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} N}{N} \frac{\delta^2}{a} s\right) / \left(1 + \frac{c\rho l}{\alpha_\tau} \left(1 + \frac{Bi_l}{3}\right) s\right), \quad (20)$$

$$e_2 = \left(\frac{\lambda}{\delta} N \operatorname{sh} N + \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} N}{N} + \operatorname{ch} N\right) c\rho \delta s\right) / \left(1 + \frac{c\rho l}{\alpha_\tau} \left(1 + \frac{Bi_l}{3}\right) s\right).$$

При $\alpha_\tau = 0$ ($N = 0$, $Bi_l = 0$) получаем зависимости для одномерного случая.

Примеры расчета матриц перехода для многослойных систем. 1. Два пассивных плоских слоя. По формуле (5) матрица перехода $C = A_1 A_2$;

$C = \|c_{rk}\| A_1 = \|a_{rk}^{(1)}\|$, $A_2 = \|a_{rk}^{(2)}\|$. Используя известное правило умножения

матриц $c_{rk} = \sum_{j=1}^2 a_{rj}^{(1)} a_{jk}^{(2)}$, получим

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} + a_{12}^{(1)} a_{21}^{(2)} = 1 + \left[c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{\delta_1}{2\lambda_1} + c_2 \rho_2 \delta_2 \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{2\lambda_2} \right) \right] s, \\
 c_{12} &= a_{11}^{(1)} a_{12}^{(2)} + a_{12}^{(1)} a_{22}^{(2)} = \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \left\{ c_1 \rho_1 \delta_1 \left[\frac{1}{3!} \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} \right)^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\delta_1}{2\lambda_1} \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right] + c_2 \rho_2 \delta_2 \left[\frac{1}{3!} \left(\frac{\delta_2}{\lambda_2} \right)^2 + \frac{\delta_2}{2\lambda_2} \frac{\delta_1}{\lambda_1} \right] \right\} s, \\
 c_{21} &= a_{21}^{(1)} a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(1)} a_{21}^{(2)} = (c_1 \rho_1 \delta_1 + c_2 \rho_2 \delta_2) s, \\
 c_{22} &= a_{21}^{(1)} a_{12}^{(2)} + a_{22}^{(1)} a_{22}^{(2)} = 1 + \left[c_1 \rho_1 \delta_1 \left(\frac{\delta_1}{2\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right) + c_2 \rho_2 \delta_2 \frac{\delta_2}{2\lambda_2} \right] s.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Выполняя умножение по тому же правилу, получим для n слоев

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 1 + \left[c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{\delta_1}{2\lambda_1} + c_2 \rho_2 \delta_2 \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{2\lambda_2} \right) + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + c_n \rho_n \delta_n \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{\delta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \frac{\delta_n}{2\lambda_n} \right) \right] s, \\
 c_{12} &= \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \left\{ c_1 \rho_1 \delta_1 \left[\left(\frac{1}{3!} \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{2\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{2\lambda_n} \right) \frac{\delta_1}{\lambda_1} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + c_2 \rho_2 \delta_2 \left[\left(\frac{1}{3!} \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_1}{2\lambda_1} + \dots + \frac{\delta_n}{2\lambda_n} \right) \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_1 \delta_3}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{\delta_1 \delta_4}{\lambda_1 \lambda_4} + \dots + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\delta_1 \delta_n}{\lambda_1 \lambda_n} \right] + \dots + c_n \rho_n \delta_n \left[\left(\frac{1}{3!} \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{\delta_1}{2\lambda_1} + \dots + \frac{\delta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \right) \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right] \right\} s, \\
 c_{21} &= \left(\sum_{i=1}^n c_i \rho_i \delta_i \right) s, \\
 c_{22} &= 1 + \left[c_1 \rho_1 \delta_1 \left(\frac{\delta_1}{2\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right) + c_2 \rho_2 \delta_2 \left(\frac{\delta_2}{2\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + c_n \rho_n \delta_n \frac{\delta_n}{2\lambda_n} \right] s.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Если одно из тел (слой i) является идеальным проводником тепла, то температура тела (i -го слоя) однородна и в (21) следует положить $\lambda_i = \infty$. Для слоя изоляции $c_i \rho_i = 0$.

Идеальным проводником может быть и слой хорошо перемешиваемой жидкости. Формулы (21), (22) остаются в силе, а параметр $c_i \rho_i \delta_i$ заменяется на $M_i c_i$, где c — теплоемкость жидкости, M — масса жидкости, приходящаяся на единицу поверхности слоя.

2. Два пассивных цилиндрических слоя. Система состоит из наружного слоя (1) внешним радиусом r_0 и центрального цилиндра (2) радиусом r_1 . Перемножая матрицы, задаваемые зависимостями (14) и (15), получаем

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 1 + \left\{ \left[\frac{1}{2} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{4} \left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1 \right) \right] c_1 \rho_1 \frac{r_1^2}{\lambda_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{r_0}{r_1} \right) \frac{r_1^2}{\lambda_1} + \frac{1}{4} \frac{r_1^2}{\lambda_2} \right] c_2 \rho_2 \right\} s,
 \end{aligned}$$

$$c_{21} = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_1}{r_0} \right) c_1 \rho_1 \delta_1 + \frac{1}{2} c_2 \rho_2 r_1 \frac{r_1}{r_0} \right] s, \quad c_{12} = c_{22} = 0. \quad (23)$$

В случае, если наружный слой достаточно тонкий и может быть принят за плоский, перемножая матрицу A из (7) и матрицу (14), получим

$$c_{11} = 1 + \left[c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{\delta_1}{2\lambda_1} + c_2 \rho_2 r_1 \left(\frac{r_1}{4\lambda_2} + \frac{\delta_1}{2\lambda_1} \right) \right] s, \quad (24)$$

$$c_{21} = \left(c_1 \rho_1 \delta_1 + c_2 \rho_2 \frac{r_1}{2} \right) s, \quad c_{12} = c_{22} = 0.$$

Если центральное тело имеет однородную температуру, следует положить $\lambda_2 = \infty$. Если для наружного слоя изоляции можно пренебречь теплоемкостью слоя, то $c_1 \rho_1 = 0$.

Решение задач нестационарной теплопроводности. 1. Нагревание (охлаждение) многослойного тела (системы без источников тепла). Рассмотрим двуслойную пластину с нулевой начальной температурой. В момент времени $\tau = 0$ пластина нагревается в жидкости с температурой θ_0 . Одна из сторон теплоизолирована ($q_2 = 0$) (это условие может соответствовать плоскости симметрии в теле). На другой стороне задано граничное условие третьего рода ($q_0 = \alpha(\theta_0 - \vartheta_0)$).

Используя связь (5) температур и тепловых потоков на граничных поверхностях

$$\left\| \frac{\bar{\vartheta}_0}{\bar{q}_0} \right\| = A_1 A_2 \left\| \frac{\bar{\vartheta}_2}{\bar{q}_2} \right\|, \quad A_1 A_2 = C,$$

получим

$$\bar{\vartheta}_0 = \alpha \theta_0 \frac{c_{11}}{s(\alpha c_{11} + c_{21})}, \quad \bar{\vartheta}_2 = \alpha \theta_0 \frac{1}{s(\alpha c_{11} + c_{21})},$$

$$\bar{q}_0 = \alpha \theta_0 \frac{c_{21}}{s(\alpha c_{11} + c_{21})}. \quad (25)$$

Температура на стыке пластин определяется из соотношения

$$\left\| \frac{\bar{\vartheta}_1}{\bar{q}_1} \right\| = A_2 \left\| \frac{\bar{\vartheta}_2}{\bar{q}_2} \right\|. \quad (26)$$

С учетом $\bar{q}_2 = 0$ имеем

$$\bar{\vartheta}_1 = a_{11}^{(2)} \bar{\vartheta}_2 = \alpha \theta_0 \frac{a_{11}^{(2)}}{s(\alpha c_{11} + c_{21})}.$$

Здесь элементы матриц A_1 , A_2 , C уже определены уравнениями (7), (21), (22). Распределение температур внутри каждого слоя можно найти из соотношения (3). Подставляя в (25), (26) значения коэффициентов a_{rk} , c_{rk} , получим, например, зависимость для температуры в центре тела

$$\frac{\bar{\vartheta}_2}{\theta_0} = \frac{1}{s(1 + Ts)}, \quad (27)$$

$$T = c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{\delta_1}{2\lambda_1} + c_2 \rho_2 \delta_2 \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{2\lambda_2} \right) + \frac{c_1 \rho_1 \delta_1 + c_2 \rho_2 \delta_2}{\alpha}. \quad (28)$$

Переходя в (27) к оригиналу, найдем

$$\vartheta_2 / \theta_0 = 1 - \exp(-\tau/T), \quad (29)$$

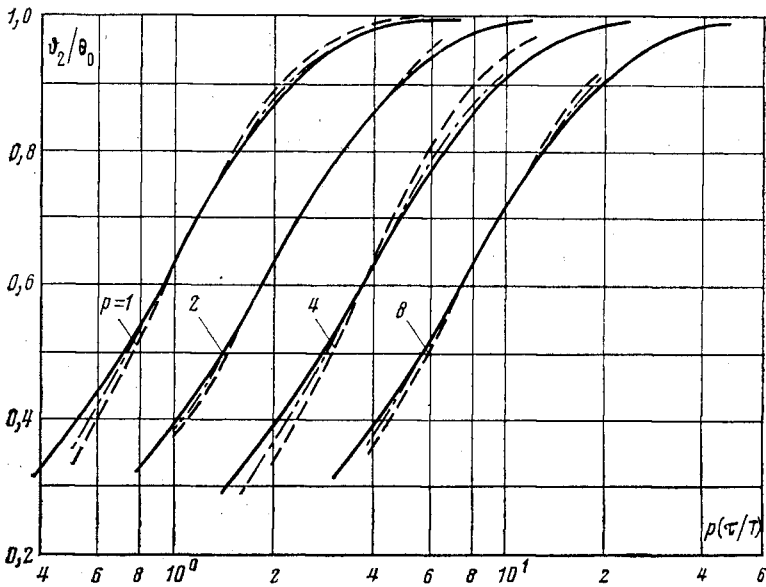


Рис. 2. Температура центра тела для двухслойной пластины: сплошные кривые — расчет по уравнению (29); пунктир ($Bi_1=100$) и штрихпунктир ($Bi_1=1$) — данные [18]

ρ	1	2	4	8
m	10	10	1	4
n	0,01	10	0,01	10

где T можно рассматривать как постоянную времени системы. Запишем τ/T в виде

$$\frac{\tau}{T} = Fo_1 / \left(\frac{1}{2} + \mu \right), \quad \mu = n \left(1 + \frac{1}{2m} \right) + \frac{1+n}{Bi_1}, \quad (30)$$

$$Fo_1 = \frac{a_1 \tau}{\delta_1^2}, \quad Bi_1 = \frac{\alpha \delta_1}{\lambda_1}, \quad n = \frac{c_2 \rho_2 \delta_2}{c_1 \rho_1 \delta_1}, \quad m = \frac{\delta_1}{\lambda_1} / \frac{\delta_2}{\lambda_2}. \quad (31)$$

Аналогично находятся температуры на любых граничных поверхностях

$$\vartheta_0/\theta_0 = 1 - (1 - \beta_0) \exp(-\tau/T), \quad (32)$$

$$\beta_0 = \frac{1/2 + n(1 + 1/2m)}{1/2 + \mu}, \quad \frac{\vartheta_1}{\theta_0} = 1 - (1 - \beta_1) \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right), \quad \beta_1 = \frac{1/2(n/m)}{1/2 + \mu}. \quad (33)$$

На рис. 2 результаты расчета температуры в центре тела сопоставлены для различных значений параметров Bi_1 , m , n с точным решением, полученным Харрисом и Давидсоном и приведенным в [18]. Для ясности графики для различных сочетаний m и n смещены относительно друг друга с помощью параметра ρ , принимающего значения 1, 2, 4 и 8. Соответствие достаточно хорошее, начиная со значений $\tau/T > 0,4$ (расхождение не более 15%). Значительное улучшение соответствия в более широкой области изменения времени можно получить, если использовать следующие соображения. Для однородной пластины ($n=0$) $\mu = 1/Bi_1$. Температуру ϑ_2/θ_0 можно определять по известным зависимостям для центра однородной пластины, принимая за число Bi величину $1/\mu$. В [18] приведены зависимости $\vartheta_2/\theta_0 = f(Fo_1, \mu)$ для случая $m = \infty$ (тело 2 — идеальный проводник тепла), из которых следует, что в области $Fo_1 > 0,1$ они практически совпадают с зависимостями для однородной пластины. Таким образом, μ является комп-

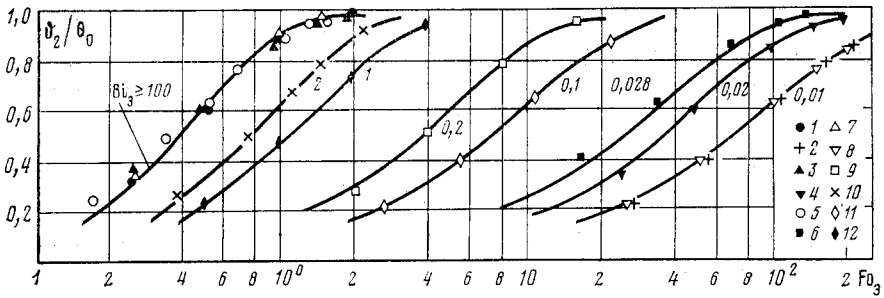


Рис. 3. Сравнение зависимости ϑ_2/θ_0 от Fo_0 и Bi_0 для однородной пластины с данными [18] для двухслойной пластины

Позиция на рисунке	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m	10	10	10	10	1	1	1	1	1	1	1	1
n	0,01	0,01	10	10	10	10	0,01	0,01	1	1	0,01	0,01
Bi_1	100	0,01	100	0,01	100	0,01	100	0,01	0,1	1	0,1	1
Bi_0	101	0,01	200	0,02	282	0,028	102	0,01	0,2	2	0,102	1,02

лексным параметром, с помощью которого можно описать нестационарную теплопроводность системы тел (как эмпирическая константа он использован в [4]).

Ранее числа Fo и Bi определялись по параметрам тела 1. Для описания нестационарной теплопроводности системы тел при произвольном изменении параметров n и m рассмотрим метод расчета, основанный на введении для системы тел эквивалентных параметров. Рассмотрим эквивалентную однородную пластину. Анализируя структуру (28)–(30), при $\alpha = \infty$ имеем

$$\frac{\delta_0^2}{a_0} = 2T = \frac{\delta_1^2}{a_1} + \frac{\delta_2^2}{a_2} + \frac{2\delta_1\delta_2 c_2\rho_2}{a_1 c_1\rho_1}. \quad (34)$$

Введем также эквивалентное значение

$$(c\rho\delta)_0 = c_1\rho_1\delta_1 + c_2\rho_2\delta_2.$$

Зависимость (30) приобретает в этом случае вид

$$\frac{\tau}{T} = Fo_0 \left/ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tau_0^*/Fo_0} \right) \right., \quad (35)$$

где эквивалентные параметры определяются из соотношений

$$Fo_0 = \frac{a_0\tau}{\delta_0^2}, \quad \tau_0^* = \frac{\alpha\tau}{(c\rho\delta)_0}.$$

Величина $1/\mu_0 = \tau_0^*/Fo_0$ является аналогом числа Bi .

Сравнение зависимости ϑ_2/θ_0 от Fo_0 и Bi_0 с соответствующей зависимостью температуры центра однородной пластины, проведенное в широкой области значений m , n и Bi_0 по данным [5] и [18], подтверждает эффективность метода «эквивалентных параметров». На рис. 3 приведены некоторые результаты такого сравнения с данными [18]. Сплошными линиями показаны известные зависимости для однородной пластины.

Оценка погрешностей. Приведем некоторые оценки на примере задачи об охлаждении (нагревании) многослойного тела при граничных условиях третьего рода. Рассмотрим выражение для температуры в центре многослойного тела

$$\frac{\bar{\Phi}_2}{\theta_0} = \frac{1}{s(c_{11} + c_{21}/\alpha)} = \frac{1}{sB(s)}, \quad (\text{П.1})$$

где корни $B(s)$ – собственные числа $s_n = -\mu_n^2$, составляющие монотонно убывающую последовательность отрицательных чисел

$$B(s) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{\mu_i^2} \right). \quad (\text{П.2})$$

Будем рассматривать одночленное приближение

$$B(s) = 1 + Ts, \quad (\text{П.3})$$

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^2}. \quad (\text{П.4})$$

Оценим разность полученного выражения оригинала (29) (отвечающего одночленному разложению $B(s)$)

$$\bar{f}(\tau) = 1 - \exp(-\tau/T)$$

и регулярного члена точного решения

$$f(\tau) = 1 - \frac{\exp(-\mu_1^2 \tau)}{\prod_{j=2}^{\infty} (1 - \mu_1^2 / \mu_j^2)}. \quad (\text{П.5})$$

Учитывая приближенное равенство

$$1 - \mu_1^2 / \mu_j^2 \approx \exp(-\mu_1^2 / \mu_j^2),$$

имеем

$$\Delta = f(\tau) - \bar{f}(\tau) \approx \exp(-\tau/T) - \exp\{-[\mu_1^2(\tau - T) + 1]\}. \quad (\text{П.6})$$

Из (П.6) видно, что регулярная часть точного решения совпадает при $\tau = T$ с решением, отвечающим одночленному разложению (рис. 2 иллюстрирует этот результат).

Для оценки величины Δ при $\tau > T$ достаточно оценить первое собственное число сверху

$$1/T < \mu_1^2 < \lambda^2.$$

Величину λ можно найти, используя методы, развитые в [19], применяя их к расчету теплопроводности многослойных тел. Не приводя подробных выкладок, получаем окончательное выражение для λ^2

$$\lambda^2 = (\beta_1/\alpha + \gamma_1 - \beta_2/\beta_1)^{-1}, \quad (\text{П.7})$$

где $\gamma_1, \beta_1, \beta_2$ – коэффициенты в разложении по параметру s и $c_{11} = 1 + \gamma_1 s$, $c_{21} = s(\beta_1 + \beta_2 s)$. Для n -слойного тела выражение для γ_1 дается формулой (20); c_{21} определяется квадратичным разложением и может быть получено способами, изложенными в данной работе. Выполнив соответствующее матричное перемножение, получим

$$\beta_1 = \sum_1^n C_i, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n C_i p_j + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n C_i p_i + \sum_{i,j,v=3}^n C_i R_j C_v, \quad (\text{П.8})$$

где введены сокращенные обозначения

$$C_i = c_i \rho \delta_i, \quad p_i = \delta_i^2 / a_i, \quad R_i = \delta_i / \lambda_i.$$

Всесоюзный электротехнический институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 4.VIII.1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mayer E.* Heat Flow in Composite Slabs.— JARS, 1952, v. 22, № 3, p. 150.
2. *Смирнов М. С.* Температурное поле в трехслойной стенке при граничном условии четвертого рода.— В кн.: Тепло- и массообмен в капиллярно-пористых телах. Вып. 8. Л.: Госэнергоиздат, 1957.
3. *Holter W. H., Grover J. H.* Insulation Temperature for the Transient Heating of an Insulated Infinite Metal Slab.— JARS, 1960, v. 30, № 9, p. 90.
4. *Grover J. H., Holter W. H.* Solution of the Transient Heat Conduction for Insulated, Infinite Metal Slab.— Jet Propulsion American Rocket Soc., 1957, v. 27, № 11, p. 1249.
5. *Brogan J. J., Schneider P. J.* Heat Conduction in a Series Composite Wall.— Trans. ASME. J. Heat Transfer. Ser. C, 1961, v. 83, N 4, p. 506.
6. *Зайденман И. А., Мучник Г. Ф.* Нестационарная теплопроводность в многослойных средах. Двухслойные системы и определение минимального времени прогресса системы заданной теплоемкости.— ИФЖ, 1963, т. 6, № 2, с. 75.
7. *Мучник Г. Ф., Зайденман И. А.* Нестационарная теплопроводность в многослойных средах. Трехслойные и четырехслойные системы.— ИФЖ, 1963, т. 6, № 3, с. 86.
8. *Михайлов М. Д.* Нестационарные поля в оболочках. М.: Энергия, 1967, с. 120.
9. *Мучник Г. Ф., Зайденман И. А.* Нестационарная теплопроводность в многослойных средах.— ИЖФ, 1962, т. 5, № 12, с. 71.
10. *Егоров В. К.* Диффузионная кинетика в неподвижных средах. М.: Наука, 1970.
11. *Schimmel W. P. Jr., Beck J. V., Donaldson A. B.* Effective Thermal Diffusivity for a Multimaterial Composite Laminate.— Trans. ASME. J. Heat Transfer. Ser. C, 1977, v. 99, № 3, p. 466.
12. *Гуревич Э. И., Рыбин Ю. Л., Филиппов И. Ф.* К расчету нестационарных тепловых процессов в электрических машинах.— Электротехника, 1975, № 1, с. 30.
13. *Гуревич Э. И., Рыбин Ю. Л.* Расчетные модели нестационарных тепловых процессов в обмотках электрических машин.— Электротехника, 1975, № 12, с. 35.
14. *Рыбин Ю. Л.* Применение метода передаточных функций в тепловых режимах электрических машин.— Электротехника, 1977, № 6, с. 43.
15. *Ярышев Н. А.* Теоретические основы измерения нестационарных температур. Л.: Энергия, 1967.
16. *Елейникова Л. С.* Тепловые четырехполюсники. Минск: Наука и техника, 1976.
17. *Карслоу Х. С., Егер Д. К.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
18. *Schneider P. J.* Temperature Response charts. N. Y.: John Wiley and Sons, 1963.
19. *Саломатов В. В.* Методы расчета нелинейных процессов теплового переноса. Изд. Томск. ун-та, 1976, с. 244.