

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. L. Kalyazin, D. I. Lamden, I. L. Mostinskii,  
Wave generation on the surface of a variable-viscosity  
liquid-film flowing under the action of a hot gas-  
stream,  
*TVT*, 1982, Volume 20, Issue 3, 529–537

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt6378>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that  
you have read and agreed to these terms of use  
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

April 21, 2025, 05:12:59



УДК 536.423.4

## ВОЛНООБРАЗОВАНИЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ ПРИ ЕЕ ТЕЧЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГОРЯЧЕГО ГАЗОВОГО ПОТОКА

*Калязин А. Л., Ламден Д. И., Мостинский И. Л.*

В линейном приближении аналитически решена задача о волновом движении пленки жидкости с переменной вязкостью при течении по горизонтальной поверхности под действием обтекающего ее газового потока. Предполагается, что механизм волнообразования обусловлен возникающей неустойчивостью движения пленки и наличием обратного влияния ее волнообразного течения на газовый поток. Получены зависимости для критической скорости потока газа, при которой начинается волнообразование, а также для волновых чисел и скоростей волн.

Задача о движении жидкой пленки по плоской поверхности, обтекаемой потоком газа, встречается в ряде технологических процессов, многие из которых протекают в условиях значительных перепадов температур между поверхностью, по которой течет пленка, и потоком. При значительных скоростях газового потока, омывающего пленку жидкости, ее течение носит отчетливо выраженный волнообразный характер. Волновые движения тонких пленок имеют в этих условиях существенные особенности, поскольку вследствие интенсивного теплообмена гребни волн имеют значительно более высокую температуру, чем остальная поверхность пленки [1], а следовательно, и существенно более высокую подвижность, поскольку вязкость большинства жидкостей резко падает с повышением температуры. Наличие вязкого трения в жидкости приводит (в отсутствие внешних сил) к быстрому затуханию случайных возмущений стационарного течения пленки, поэтому волновые движения тонкого слоя вязкой жидкости возможны только при наличии внешних сил, непрерывно возбуждающих и поддерживающих колебательные движения в пленке.

Большинство теоретических работ, посвященных волновым движениям вязкой жидкости, основаны на отбрасывании в уравнениях Навье — Стокса конвективных членов. Профиль скорости течения в этом случае соответствует профилю скорости течения невозмущенного слоя жидкости, однако толщина пленки является переменной величиной. Если ограничиться рассмотрением длинных волн малой амплитуды  $a_0$ , бегущих по горизонтальной поверхности слоя жидкости со средней толщиной  $h_0$ , т. е. считать, что

$$a_0 \ll l, \quad (1)$$

$$h_0 \ll l, \quad (2)$$

где  $l$  — длина волны, то уравнение для продольной составляющей скорости жидкости  $u$ , учитывающее переменность вязкости, примет следующий вид:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Граничные условия для него

$$u|_{y=0} = 0, \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} = \tau. \quad (5)$$

Здесь  $\tau$  — касательное напряжение трения со стороны обтекающего пленку газового потока. Из уравнения для поперечной компоненты скорости сама скорость вообще выпадает, и оно описывает изменение гидростатического давления в жидкости

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g. \quad (6)$$

Рассмотренный подход справедлив в том случае, когда конвективные члены в уравнениях Навье — Стокса намного меньше членов, содержащих вязкость (хотя, как показывает сравнение с экспериментом [2–5], такое описание можно использовать и при не слишком сильном нарушении такого соотношения величин конвективных и вязких членов уравнения). По порядку величины конвективные члены равны

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \ll u^2 k,$$

в то время как член с вязкостью

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \frac{uv}{h^2}.$$

Таким образом, уравнения (3) и (6) могут быть использованы, если выполнено условие

$$\frac{uh}{\nu} kh \equiv \text{Re}_h kh \ll 1. \quad (7)$$

Согласно уравнению (6),

$$p = -\rho gy + f(x),$$

поэтому величина  $\partial p / \partial x$ , входящая в (3), не зависит от  $y$ . Интегрируя уравнение (3), получим

$$u = \int_0^y \left[ \frac{\partial p}{\partial x} (y-h) + \tau \right] \frac{dy}{\mu(T(y))}. \quad (8)$$

В частности, в случае постоянной вязкости

$$u = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{y^2}{2} - hy \right) + \tau y \right]. \quad (9)$$

Если течение жидкой пленки сопровождается переносом тепла через нее, то необходимо принять во внимание температурную зависимость физических свойств жидкости. В большинстве случаев достаточно учесть зависимость вязкости от температуры и приближенно считать плотность и теплопроводность жидкости постоянными [6]. Поскольку в рамках сделанных приближений основную роль играет поперечный перенос тепла через пленку за счет теплопроводности, температура в пленке в точке  $y$  может быть найдена из соотношения

$$q = \lambda (T - T_0) / y, \quad (10)$$

где  $T_0$  — температура поверхности, по которой течет пленка;  $q$  — тепловой поток на пленку;  $\lambda$  — теплопроводность жидкости. При этом профиль скорости течения (8) можно представить в виде

$$u = \int_0^y \left[ \frac{\partial p}{\partial x} (y-h) + \tau \right] \frac{dy}{\mu(T(y))}, \quad (11)$$

где, согласно (10),  $T(y) = yq/\lambda + T_0$ .

Чтобы получить соотношение, описывающее изменение толщины пленки с течением времени, используем уравнение неразрывности в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = - \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (12)$$

Подставляя выражения (9) или (11) для профиля  $u(y)$ , получим из (12)

$$\frac{1}{\mu} \left( - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{h^3}{3} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{h^2}{2} - \frac{\partial p}{\partial x} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \tau h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = - \frac{\partial h}{\partial t} \quad (13)$$

для  $\mu = \text{const}$  или

$$\frac{1}{\mu(T_0)} \left( - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} f_1(h) + \frac{\partial \tau}{\partial x} f_2(h) - \frac{\partial p}{\partial x} f_1'(h) \frac{\partial h}{\partial x} + \tau f_2'(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) = - \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (14)$$

$$f_1(h) = \int_0^h dy \int_0^y \frac{(h-y') \mu(T_0)}{\mu(T(y'))} dy', \quad f_2(h) = \int_0^h dy \int_0^y \frac{\mu(T_0)}{\mu(T(y'))} dy' \quad (15)$$

для переменной вязкости.

Как показано выше, для поддержания волновых движений вязкой жидкости необходимо наличие внешних сил, возбуждающих такие движения. При обтекании пленки газовым потоком такими силами являются колебания давления и касательного напряжения трения со стороны потока. Поскольку эти колебания сами возникают из-за наличия возмущений поверхности жидкости, то они зависят от формы  $a(x, t) = h(x, t) - h_0$  возмущенной поверхности пленки ( $h_0$  — средняя толщина пленки). Таким образом, величины  $p$  и  $\tau$ , входящие в уравнения (13), (14) и определяющие движения пленки, состоят из постоянных и переменных компонент

$$p = p_0 + p_k(a(x, t)), \quad (16)$$

$$\tau = \tau_0 + \tau_k(a(x, t)). \quad (17)$$

Компоненты  $p_0$  и  $\tau_0$  слабо зависят от  $x$  и  $t$  (при стабилизированном течении в канале  $\tau_0$  и  $\partial p_0 / \partial x$  — постоянные величины) и соответствуют средним значениям давления и напряжения трения при обтекании волнистой поверхности  $h(x, t)$ . Пульсационные составляющие этих величин имеют пространственный период изменения, соответствующий длине волны, возникающей на поверхности пленки. Именно эти величины определяют устойчивость течения относительно волнообразования и основные характеристики волнового движения. Таким образом, чтобы получить из (13) или (14) уравнения, описывающие в явном виде волновое движение пленки вязкой жидкости, необходимо определить зависимости пульсаций давления  $p_k(a(x, t))$  и касательного напряжения  $\tau_k(a(x, t))$  от формы возмущения поверхности  $a(x, t)$ .

Рассмотрим сначала величину пульсаций давления в газе, возникающих при обтекании им волнистой поверхности. Пока рассмотрим газ как идеальную (невязкую) среду. Несколько ниже будут приведены оценки, показывающие достаточную широту области применимости такого приближения.

Так как скорость волновых движений вязкой пленки мала по сравнению со скоростями газового потока, то движение газовой фазы можно

считать квазистационарным, т. е. соответствующим обтеканию неподвижной поверхности  $a(x) \equiv a(x, t_0)$  в каждый момент времени  $t_0$ . Для определения пульсаций давления достаточно ограничиться анализом обтекания газом неподвижной волнистой поверхности. При обтекании волнистой поверхности скорость газа выше над пучностями и уменьшается над впадинами. Согласно уравнению Бернулли вдоль линий тока

$$\rho_r v_r^2 / 2 + p = \text{const}, \quad (18)$$

так что давление газа над пучностями меньше, чем над впадинами. Такие периодические колебания давления стремятся увеличить искажения поверхности. Это неустойчивость Кельвина — Гельмгольца. Такой анализ является только грубым приближением к действительной картине прежде всего потому, что в нем не учитывается профиль продольной скорости, существующий в газовом потоке вблизи раздела фаз: его учет может значительно изменить результаты вычисления параметров волнового движения.

Пусть  $V(y)$  — профиль скорости основного течения газового тока в направлении оси  $x$ , когда он обтекает невозмущенную (гладкую) поверхность. Если на поверхности жидкости появляются волны, то на основное течение газа накладывается возмущающее его течение, состоящее из отдельных колебаний, причем каждое такое колебание представляет собой волну, движущуюся вместе с волной на поверхности жидкости. Как отмечено выше, для анализа движений в газовой фазе достаточно рассмотреть ее взаимодействие со стационарной волновой поверхностью. Пусть уравнение такой поверхности имеет вид

$$h(x) = h_0 + a_0 \cos kx \quad (a_0 k \ll 1). \quad (19)$$

Для возмущений скорости можно ввести функцию тока  $\psi(x, y)$

$$v_x = \partial\psi/\partial y, \quad v_y = -\partial\psi/\partial x, \quad (20)$$

которую в случае (19) следует искать в виде

$$\psi(x, y) = \varphi(y) \cos kx, \quad (21)$$

так что

$$v_x = \varphi'(y) \cos kx, \quad v_y = -k\varphi(y) \sin kx, \quad (22)$$

Подставив эти скорости в уравнения Навье — Стокса, линеаризованные по скоростям возмущений  $v_x, v_y$ , и исключив из них давление, получим (полагая  $v_r = 0$ ) уравнение типа Орра — Зоммерфельда [7] для возмущенного движения без учета вязкости

$$V(y)(\varphi'' - k^2\varphi) - V''(y)\varphi = 0. \quad (23)$$

Граничные условия к этому уравнению заключаются в отсутствии возмущений скорости на большом расстоянии от поверхности жидкости и в равенстве нулю нормальной составляющей скорости на поверхности раздела фаз

$$\varphi = 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad (24)$$

$$v_y / (V + v_x) \approx v_y / V = dh/dx \quad \text{при } y = h(x).$$

В простейшем случае, проанализированном Кельвином и Гельмгольцем, пренебрегают наличием профиля скорости и считают, что  $V(y) = V_0$ . В этом случае нетрудно получить решение задачи (23), (24), которое с учетом (5) имеет вид

$$v_x = +a_0 V_0 k \cos kxe^{-ky}, \quad v_y = -a_0 V_0 k \sin kxe^{-ky}. \quad (25)$$

Распределение давления вдоль поверхности пленки в соответствии с (18) имеет вид

$$p_r = -\rho_r a_0 V_0^2 k \cos kx. \quad (26)$$

Точное аналитическое решение уравнения (23) с произвольной  $V(y)$  неизвестно, однако общепринята [8, 9] следующая приближенная фор-

мула для пульсаций давления:

$$p_r = -\rho_r a_0 k \int_0^{\infty} V^2(y) e^{-ky} k dy \cos kx, \quad (27)$$

физический смысл которой становится достаточно ясным, если обратиться к (25) и заметить, что амплитуда возмущений скорости уменьшается по мере удаления от границы раздела как  $e^{-ky}$ , а величина пульсаций давления определяется скоростью газового потока в прилегающем к поверхности пленки слое газа толщиной порядка  $k^{-1} = l/2\pi$ .

Возмущающим силам со стороны газового потока противодействуют силы тяжести и поверхностного натяжения жидкости. Величины давлений, которые создаются этими силами на поверхности пленки, равны соответственно

$$p_{\text{грав}} = -\rho g a(x) = -\rho g a_0 \cos kx, \quad (28)$$

$$p_{\text{нат}} = \sigma/R \simeq \sigma a''(x) = -\sigma a_0 k^2 \cos kx. \quad (29)$$

Таким образом, для величины пульсаций давления, действующих на волнистую поверхность пленки ( $a(x) = a_0 \cos kx$ ), окончательно получаем

$$p_k = \left( \rho g + \sigma k^2 - \rho_r k \int_0^{\infty} V^2(y) e^{-ky} k dy \right) a_0 \cos kx. \quad (30)$$

Поскольку скорость движений вязкой пленки мала по сравнению со скоростями, характерными для потока газа, то аналогичная картина распределения давлений вдоль волнистой поверхности будет наблюдаться и в том случае, когда параметры волны (например, амплитуда) зависят от времени. Движение газа успеваает соответствующим образом измениться вслед за сравнительно медленным изменением параметров волны; таким образом, формулу (30) можно использовать и в том случае, когда параметры (синусоидальной) волны зависят от времени. Для описания волнового движения вязкой пленки необходимо также, согласно (13), (14), знать величину касательного напряжения  $\tau$  со стороны газового потока. При малой вязкости газа ее пульсационная составляющая (см. (17)) не оказывает заметного влияния на образование волны. Как показывают оценки, основанные на сравнении соответствующих членов ( $\partial p/\partial x$  и  $\partial \tau/\partial y$ ) в уравнении Навье — Стокса для газовой фазы, отношение пульсаций касательного напряжения  $\tau_k$  и давления  $p_k$  по порядку величины равно

$$\tau_k/p_k \sim (\nu_r k/V_k)^{1/2} = \sqrt{2\pi/\text{Re}_l}, \quad (31)$$

где

$$V_k = \int_0^{\infty} V(y) e^{-ky} k dy$$

— характерное значение скорости газового потока на высоте порядка  $k^{-1} = l/2\pi$  над поверхностью пленки. Поэтому выражение  $\text{Re}_l$  имеет смысл числа Рейнольдса, взятого для длины волны  $l$  и скорости газового потока, в слое толщиной порядка  $l$ , поле скоростей в котором определяется шероховатостью обтекаемой поверхности (см. (25), (27)). Для типичных условий волнообразования и большинства газов величина (31) значительно меньше единицы.

Таким образом, оказывается, что воздействие на пленку пульсаций касательного напряжения, возникающих под действием обтекающего пленку газового потока, пренебрежимо мало по сравнению с аналогичным воздействием пульсаций давления, вызываемых как поверхностными и гравитационными силами, так и взаимодействием газового потока с поверхностью пленки. В связи с этим можно считать, что для замыка-

ния (13), (14) по  $\tau$  достаточно пользоваться условием

$$\tau = \tau_0 = \text{const}, \quad (32)$$

в то время как для замыкания по  $p$  необходимо учитывать его зависимость от амплитуды волн и использовать уже полученное выражение (30).

Теперь можно приступить непосредственно к исследованию устойчивости пленки и определению ее волновых характеристик. Для этого преобразуем уравнения (13), (14). При малых амплитудах волнового движения, когда

$$|a(x, t)| \ll h_0 \quad (33)$$

(см. (19)), в этих уравнениях можно оставить только линейные по  $h$  члены. При этом необходимо иметь в виду, что амплитуда пульсаций давления с  $p_k$  пропорциональна согласно (30) амплитуде волны  $a_0$ , а  $\tau_k$  можно пренебречь. Таким образом, линеаризованные по амплитуде возмущенного движения уравнения имеют следующий вид:

для  $\mu = \text{const}$

$$\frac{1}{\mu} \left[ -\frac{\partial^2 p_k h_0^3}{\partial x^2} \frac{1}{3} - \left( \frac{\partial p_0}{\partial x} h_0^2 - \tau_0 h_0 \right) \frac{\partial a}{\partial x} \right] = -\frac{\partial a}{\partial t}, \quad (34)$$

для переменной вязкости

$$\frac{1}{\mu(T_0)} \left[ -\frac{\partial p_k}{\partial x^2} f_1(h_0) - \left( \frac{\partial p_0}{\partial x} f_1'(h_0) - \tau_0 f_2'(h_0) \right) \frac{\partial a}{\partial x} \right] = -\frac{\partial a}{\partial t}. \quad (35)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде бегущей волны с растущей или убывающей амплитудой

$$a(x, t) = a_0 \cos k(x - ct) e^{-kst}.$$

Здесь  $s$  — величина, имеющая размерность скорости и определяющая устойчивость течения и развитие возмущения во времени;  $c$  — скорость распространения волны.

Согласно полученным выше результатам (см. (30) и следующий далее текст), пульсации давления в газе при обтекании им волнистой поверхности имеют вид

$$p_k = - \left( \rho g + \sigma k^2 - \rho_r k \int_0^{\infty} V^2(y) e^{-ky} k dy \right) a_0 \cos k(x - ct) e^{-kst}. \quad (36)$$

Подставляя выражения (37), (33) в уравнения (13), (14), получим соответственно

для  $\mu = \text{const}$

$$s = \frac{1}{\mu} \frac{h_0^3}{3} \left( \rho g + \sigma k^2 - \rho_r k \int_0^{\infty} V^2(y) e^{-ky} k dy \right) k, \quad (37)$$

$$c = \left( \frac{\partial p_0}{\partial x} h_0^2 + \tau_0 h_0 \right) \frac{1}{\mu}; \quad (38)$$

для переменной вязкости

$$s = \frac{1}{\mu(T_0)} f_1(h_0) \left( \rho g + \sigma k^2 - \rho_r k \int_0^{\infty} V^2(y) e^{-ky} k dy \right) k, \quad (39)$$

$$c = \frac{1}{\mu(T_0)} \left( -\frac{\partial p_0}{\partial x} f_1'(h_0) + \tau f_2'(h_0) \right). \quad (40)$$

Как легко видеть, скорость движения волн  $c$ , согласно (38) и (40), соответствует скорости течения жидкости на поверхности пленки в том случае, когда волнообразование отсутствует ( $h(x)=h_0$ ). В случае постоянной вязкости жидкости невозмущенный профиль скорости течения пленки под действием силы трения со стороны потока газа ( $\partial p_0/\partial x=0$ ) имеет линейный вид. При этом скорость волн  $c$ , равная скорости течения на поверхности пленки, вдвое превосходит среднерасходную скорость течения. В случае переменной вязкости верхние слои пленки, имеющие более высокую температуру, обладают пониженной вязкостью и относительно более высокой скоростью течения. Скорость волн на пленках такого рода превосходит среднерасходную скорость течения более чем вдвое: отношение этих скоростей может достигать десять и более раз. Что касается критерия  $s$ , то его знак и зависимость от волнового числа  $k$  одинаковы для случаев (37) и (39).

Согласно полученным результатам, устойчивость течения пленки определяется величиной пульсаций давления в газовом потоке: скорость нарастания амплитуды волн пропорциональна в общем случае величине

$$k \left( \rho g + \sigma k^2 - \rho_r k \int_0^{\infty} V^2(y) e^{-ky} k dy \right),$$

так что можно записать

$$s = \text{const } k \left( \rho g + \sigma k^2 - \rho_r k \int_0^{\infty} V^2(y) e^{-ky} k dy \right), \quad (41)$$

где  $\text{const}$  — константа, не зависящая от волнового числа.

Рассмотрим в качестве  $V(y)$  профиль скорости в турбулентном пограничном слое. Как известно, в этом случае профиль скорости определяется выражением

$$V(y) = u_* \varphi(\eta), \quad (42)$$

где  $\eta = y u_* / \nu_r$  — обобщенная поперечная координата;  $\varphi(\eta)$  — некоторая универсальная функция, которая при малых и больших значениях  $\eta$  имеет соответственно вид

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{при } \eta < \eta_1, \eta_1 \approx 11,5 \\ 2,5 \ln \eta + 5,5 & \text{при } \eta > \eta_1; \end{cases} \quad (43)$$

а  $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho_r}$  — так называемая «динамическая скорость», связанная со скоростью  $V_0$  в ядре газового потока соотношением

$$u_* = \sqrt{c_f / 2} V_0. \quad (44)$$

Подставляя профиль скорости (42) в выражение (41), получим

$$\begin{aligned} s &= \text{const } k \left( \rho g + \sigma k^2 - \rho_r k u_*^2 \int_0^{\infty} \varphi^2(\eta) e^{-k y} k dy \right) = \\ &= \text{const } \Lambda \left( \rho g + \sigma \frac{u_*^2}{\nu_r^2} \Lambda^2 - \rho_r \Lambda^2 \frac{u_*^3}{\nu_r} \int_0^{\infty} \varphi^2(\eta) e^{-\Lambda \eta} d\eta \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь  $\Lambda = k \nu_r / u_*$ .

Неустойчивость возникает в том случае, если при некоторых значениях  $\Lambda$

$$s(\Lambda) < 0. \quad (46)$$

Как видно из (45), при малых значениях  $u_*$  вся кривая  $s(\Lambda)$  лежит в верхней полуплоскости, т. е.  $s(\Lambda) > 0$  для всех  $\Lambda > 0$ . При некотором критическом значении  $u_* = u_{* \text{кр}}$  кривая  $s(\Lambda)$  касается оси абсцисс в точке  $\Lambda = \Lambda_{\text{кр}} : s(\Lambda_{\text{кр}}) = 0$ , что соответствует началу неустойчивости. Параметры  $u_{* \text{кр}}$  и  $\Lambda_{\text{кр}}$  следует, очевидно, искать из системы уравнений

$$s(\Lambda) = 0, \quad (47)$$

$$\partial s(\Lambda) / \partial \Lambda = 0. \quad (48)$$



Используя выражение (46) для  $s(\Lambda)$ , получим

$$\rho g + \frac{\sigma u_*^2}{v_r^2} \Lambda^2 - \rho_r \frac{u_*^3}{v_r} I(\Lambda) = 0, \quad (49)$$

$$\rho g + 3 \frac{\sigma u_*^2}{v_r^2} \Lambda^2 - \rho_r \frac{u_*^3}{v_r} J(\Lambda) = 0, \quad (50)$$

где

$$I(\Lambda) \equiv \Lambda^2 \int_0^\infty \varphi^2(\eta) e^{-\Lambda \eta} d\eta, \quad J(\Lambda) \equiv \frac{\partial}{\partial \Lambda} (I(\Lambda)). \quad (51)$$

Графики функций  $I$  и  $J$  представлены на рис. 1. Преобразовывая систему (50), (51), получим следующие уравнения для определения  $\Lambda_{кр}$  и  $u_{*кр}$ :

$$\left( \frac{4\sigma^3}{v_r^4 \rho_r^2 \rho g} \right)^{1/3} = \frac{J(\Lambda_{кр}) - I(\Lambda_{кр})}{\Lambda_{кр}^2 (3I(\Lambda_{кр}) - J(\Lambda_{кр}))^{1/3}}, \quad (52)$$

$$u_{*кр} = \left( \frac{2\rho g}{\rho_r} v_r \right)^{1/2} (3I(\Lambda_{кр}) - J(\Lambda_{кр}))^{-1/3}. \quad (53)$$

Результаты численного решения этих уравнений представлены на рис. 2. Как видно из этого рисунка, при малой величине поверхностного натяжения ( $\sigma \rightarrow 0$ ) начало волнообразования имеет место при динамической скорости

$$u_{*кр} = 0,415 (2\rho g v_r / \rho_r)^{1/2}. \quad (54)$$

При этом безразмерное волновое число, для которого наступает неустойчивость,

$$\Lambda_{кр} = 0,128, \quad (55)$$

что соответствует длине волны

$$l_{кр} = 2\pi v_r / \Lambda_{кр} u_{*кр} = 49,1 v_r / u_*. \quad (56)$$

Величина  $u_{*кр}$  слабо зависит от параметра  $(4\sigma^3 / v_r^4 \rho_r^2 \rho g)^{1/3}$ , а величина  $\Lambda_{кр}$  может быть меньше, чем (55), в полтора-два раза. Следует иметь в виду, что для многих вязких жидкостей в условиях волнообразования величина этого параметра может достигать нескольких сотен, поэтому учет влияния поверхностного натяжения, особенно для определения длин волн, возникающих на поверхности пленки, весьма существен.

В данной работе авторы ограничились определением характеристик волн, возникающих при достижении газом критической скорости, отвечающей началу волнообразования. Расчет волнового движения при скоростях, заметно превышающих критическую, требует, вообще говоря, сложного

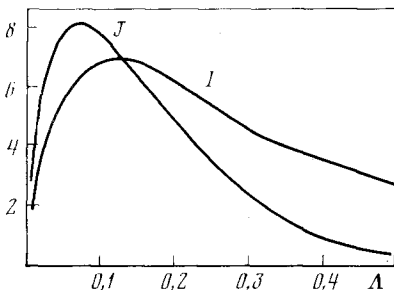


Рис. 1

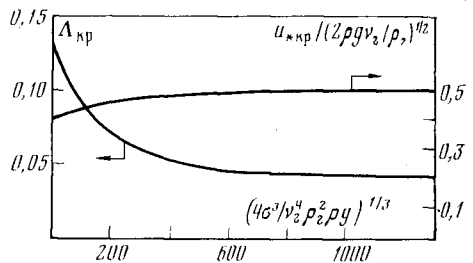


Рис. 2

анализа взаимодействия волнистой пленки и газового потока с учетом нелинейных эффектов. Однако качественную картину изменения длины волн с ростом скорости газового потока можно получить, если считать, что при  $u_* > u_{*кр}$  наибольшую роль играют волны с максимальной скоростью роста амплитуды  $s(\Lambda)$ . Чтобы определить соответствующее значение  $\Lambda$ , необходимо решить уравнение (48) (или, что то же, (50)), которое позволяет построить зависимость  $\Lambda(u_*)$  при  $u_* > u_{*кр}$ . Соответствующие расчеты показывают, что длина волны лишь незначительно уменьшается с ростом скорости потока газа. Это подтверждается и имеющимися экспериментальными данными [1], полученными при исследовании волн, образующихся на поверхности жидкой шлаковой пленки при обтекании ее высокотемпературным потоком газообразных продуктов сгорания. Зафиксированные там длины волн составляют около 1–2 см при скорости газа, достигающей 450 м/с. Расчет на основе проведенного рассмотрения дает для них значения порядка 2–3 см (критическая скорость газа в этих условиях составляет ~80 м/с). Наблюдающееся таким образом хорошее согласование между расчетными и экспериментальными значениями длин волн распространяется также и на скорости их распространения.

Институт высоких температур  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
5.VI.1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буренков Д. К., Долинский Ю. Л., Залкинд В. И. и др. Исследование влияния шлаковой пленки на характеристики электродов канала МГД-генератора установки У-02.— В кн.: МГД-электростанции на твердом топливе. М.: ИВТАН, 1979, с. 195.
2. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Т. 1, 2.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, № 1, с. 116.
3. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Т. 3.— ЖЭТФ, 1949, т. 19, № 2, с. 395.
4. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1, с. 43.
5. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1, с. 63.
6. Калязин А. Л., Ламден Д. И., Мостинский М. Л. Течение и тепломассообмен пленки жидкости с переменной вязкостью, образующейся при обтекании поверхности горячим аэродисперсным потоком.— ТВГ, 1980, т. 18, № 6, с. 1226.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
8. Miles J. W. The hydrodynamic stability of a thin film of liquid in uniform shearing motion.— J. Fluid Mech., 1960, v. 8, p. 593.
9. Craik A. D. D. Wind-generated waves in thin liquid films.— J. Fluid Mech., 1966, v. 26, p. 369.