

УДК 517.956.25

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299

EDN: YKDZHU

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С L_1 -ДАНЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ \mathbb{R}^n

Л. М. КОЖЕВНИКОВА

*Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия**Елабужский Институт Казанского Федерального университета, Елабуга, Россия*

Аннотация. Рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка с суммируемой правой частью в пространстве \mathbb{R}^n . Ограничения на структуру уравнения формулируются в терминах обобщенной N -функции. В нерелексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева доказано существование ренормализованного решения в пространстве \mathbb{R}^n .

Ключевые слова: квазилинейное уравнение, эллиптическое уравнение, обобщенная N -функция, пространство Музилака—Орлича—Соболева, ренормализованное решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Л. М. Кожевникова. Существование ренормализованного решения нелинейного эллиптического уравнения с L_1 -данными в пространстве \mathbb{R}^n // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 2. С. 278–299. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299>

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается уравнение

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + b_0(x, u) + b(x, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. Здесь функции $a(x, s_0, s) = (a_1(x, s_0, s), \dots, a_n(x, s_0, s))$, $b_0(x, s_0)$, $b(x, s_0, s)$ имеют рост, определяемый функцией Музилака—Орлича $M(x, z)$. При этом на функцию M и сопряженную к ней функцию \bar{M} не требуется дополнительное ограничение по переменной z (обычно это Δ_2 -условие). Предполагается, что по переменной $x \in \mathbb{R}^n$ функция M подчиняется условию ϕ -регулярности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерелексивного пространства Музилака—Орлича.

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры, в частности, из пространства $L_1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В работе [16] доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.3)$$



в пространствах Музилака—Орлича с неоднородной анизотропной функцией Музилака—Орлича.

Авторы работ [8, 15] установили существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u) + c(u)) + a_0(x, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

с функцией $c \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

В работах [9, 14] (при $a_0 \equiv 0$) и [22] доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u) + c(x, u)) + a_0(x, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

с каратеодориевой функцией $c(x, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, подчиняющейся условию роста по переменной s_0 .

В работе [20] доказаны существование и единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи (1.2), (1.3), установлена их эквивалентность. Все перечисленные результаты получены в пространствах Музилака—Орлича для ограниченных областей Ω .

Трудность в областях с бесконечной мерой состоит в том, что не работают теоремы вложения и аналог неравенства типа Фридрихса, поэтому установить ключевое соотношение (4.7) весьма проблематично. Автор решает эту проблему за счет свойств младшего члена $b_0(x, u)$ уравнения (1.1). Кроме того, важную роль в полученных результатах имеет теорема об аппроксимации элементов нереклексивного пространства Музилака—Орлича—Соболева гладкими функциями (см. лемму 2.1). В работе [3] без ограничений на меру строго липшицевой области Ω доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле (1.1), (1.3) с функцией $b_0(x, s_0) = \frac{M(x, s_0)}{s_0}$ в нереклексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева. При этом на младший член $b(x, s_0, s)$ уравнения (1.1) накладывается условие знакоопределенности по переменной $s_0 \in \mathbb{R}$:

$$b(x, s_0, s)s_0 \geq 0. \tag{1.4}$$

Другим путем в работе [1] в неограниченных областях установлено существование энтропийного решения задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с сингулярным мерозначным потенциалом. При этом на сопряженную функцию \bar{M} накладывается Δ_2 -условие, а младший член уравнения удовлетворяет условию знака. Следует отметить, что впервые в неограниченных областях, допускающих бесконечную меру, для функции $M(x, z) = |z|^{p(x)}$ существование энтропийного и ренормализованного решений уравнения (1.1) в анизотропных пространствах с переменными показателями нелинейностей было установлено в работах [4, 17, 18]. Более полный обзор результатов представлен в работе [5].

В ограниченных областях вопросы существования энтропийных и ренормализованных решений нелинейных эллиптических задач без условия (1.4) исследовались в работах [6, 13] и др. В настоящей работе впервые в пространстве \mathbb{R}^n без условия знакоопределенности (1.4) доказано существование ренормализованного решения уравнения (1.1) в нереклексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева.

2. ПРОСТРАНСТВА МУЗИЛАКА—ОРЛИЧА

В этом разделе будут приведены необходимые сведения из теории обобщенных N -функций и пространств Музилака—Орлича (см. [21]).

Определение 2.1. Пусть функция $M(x, z) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $M(x, \cdot)$ — N -функция по $z \in \mathbb{R}$, т. е. она является выпуклой вниз, неубывающей при $z \in \mathbb{R}_+$, четной, непрерывной, $M(x, 0) = 0$ для п. в. $x \in \mathbb{R}^n$, и

$$\operatorname{vrai} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} M(x, z) > 0 \quad \text{для всех } z \neq 0, \tag{2.1}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{vrai} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{M(x, z)}{z} = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{vrai} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{M(x, z)}{z} = \infty; \tag{2.2}$$

2) $M(\cdot, z)$ — измеримая функция по $x \in \mathbb{R}^n$ для любых $z \in \mathbb{R}$.

Такая функция $M(x, z)$ называется *функцией Музилака—Орлича*, или *обобщенной N -функцией*.

Сопряженная функция $\overline{M}(x, \cdot)$ к функции Музилака—Орлича $M(x, \cdot)$ в смысле Юнга для п. в. $x \in \mathbb{R}^n$ и любых $z \geq 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(x, z) = \sup_{y \geq 0} (yz - M(x, y)).$$

Отсюда следует неравенство Юнга:

$$|zy| \leq M(x, z) + \overline{M}(x, y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Следует отметить, что \overline{M} также является N -функцией (см. [21, пункты 13.4 и 13.6]).

Если для каждой положительной константы l имеем:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{P(x, lz)}{M(x, z)} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{P(x, lz)}{M(x, z)} = 0, \quad (2.4)$$

то это обозначается $P \prec\prec M$ и говорят, что P *растет медленнее*, чем M , в 0 или ∞ .

Функция Музилака—Орлича N удовлетворяет Δ_2 -условию, если существуют константы $c > 0$, $z_0 \geq 0$ и функция $H \in L_1(\mathbb{R}^n)$ такие, что для п. в. $x \in \mathbb{R}^n$ и любых $|z| \geq z_0$ справедливо неравенство

$$N(x, 2z) \leq cN(x, z) + H(x).$$

В настоящей работе не предполагается, что N -функция M и ее сопряженная \overline{M} удовлетворяют Δ_2 -условию.

Существуют три класса Музилака—Орлича:

1) $\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)$ — обобщенный класс Музилака—Орлича, состоящий из измеримых функций $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\varrho_{M, \mathbb{R}^n}(v) = \int_{\mathbb{R}^n} M(x, v(x)) dx < \infty;$$

2) $L_M(\mathbb{R}^n)$ — обобщенное пространство Музилака—Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс $\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)$, с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{M, \mathbb{R}^n} = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \varrho_{M, \mathbb{R}^n} \left(\frac{v}{\lambda} \right) \leq 1 \right\};$$

3) $E_M(\mathbb{R}^n)$ — наибольшее линейное пространство, содержащееся в классе $\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно, $E_M(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n) \subset L_M(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что для любого $v \in E_M(\mathbb{R}^n)$ и любого $\mu > 0$ справедливо неравенство $\varrho_{M, \mathbb{R}^n}(v/\mu) < \infty$. Кроме того, для любого $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$ найдется $\lambda > 0$ такое, что $\varrho_{M, \mathbb{R}^n}(v/\lambda) < \infty$ (см. [21, 7.4]).

Ниже в обозначениях $\|\cdot\|_{M, Q}$, $\varrho_{M, Q}(\cdot)$, $\|\cdot\|_{1, Q}$, $\|\cdot\|_{\infty, Q}$ будем опускать индекс Q , если $Q = \mathbb{R}^n$. Далее будем рассматривать следующие условия на функцию Музилака—Орлича $M(x, z)$.

(M1, loc): *Функция $M(x, z)$ локально интегрируема, т. е.*

$$\varrho_{M, Q}(z) = \int_Q M(x, z) dx < \infty, \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

для любого измеримого множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ такого, что $\operatorname{meas} Q < \infty$.

(M2): *Функция $M(x, z)$ удовлетворяет условию ϕ -регулярности, если существует функция $\phi : [0, 1/2] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что $\phi(\cdot, z)$ и $\phi(r, \cdot)$ — неубывающие функции, и для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| \leq \frac{1}{2}$, $z \in \mathbb{R}^+$ и некоторой константы $c > 0$ выполняется*

$$M(x, z) \leq \phi(|x - y|, z)M(y, z), \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(\varepsilon, c\varepsilon^{-n}) < \infty.$$

Заметим, что из условий $(M1, \text{loc})$, $(M2)$ следует ограниченность функции $M(\cdot, z)$ по $x \in Q$, $\text{meas } Q < \infty$, для любого фиксированного $z \in \mathbb{R}$.

Пусть M и \overline{M} подчиняются условию $(M1, \text{loc})$. Тогда пространство $E_M(\mathbb{R}^n)$ является замыканием по норме $\|\cdot\|_M$ простых интегрируемых функций (см. [21, Theorem 7.6]). Пространство $E_M(\mathbb{R}^n)$ — сепарабельное, и $(E_M(\mathbb{R}^n))^* = L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$. Если M удовлетворяет Δ_2 -условию, то $E_M(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n) = L_M(\mathbb{R}^n)$ и $L_M(\mathbb{R}^n)$ — сепарабельное. Пространство $L_M(\mathbb{R}^n)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда функции Музилака—Орлича M и \overline{M} удовлетворяют Δ_2 -условию.

Для $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство:

$$\|v\|_M \leq \varrho_M(v) + 1.$$

Последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ из $L_M(\mathbb{R}^n)$ модулярно сходится к $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$ ($v^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty}^M v$), если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M \left(\frac{v^j - v}{\lambda} \right) = 0.$$

Если M удовлетворяет Δ_2 -условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Также для двух сопряженных функций Музилака—Орлича M и \overline{M} , если $u \in L_M(\mathbb{R}^n)$ и $v \in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$, выполняется неравенство Гельдера:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx \right| \leq 2\|u\|_M \|v\|_{\overline{M}}.$$

Определим пространство Музилака—Орлича—Соболева

$$W^1 L_M(\mathbb{R}^n) = \{v \in L_M(\mathbb{R}^n) \mid |\nabla v| \in L_M(\mathbb{R}^n)\}$$

с нормой $\|v\|_M^1 = \|v\|_M + \|\nabla v\|_M$. Последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ из $W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$ модулярно сходится к $v \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M \left(\frac{v^j - v}{\lambda} \right) = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M \left(\frac{|\nabla v^j - \nabla v|}{\lambda} \right) = 0.$$

Для краткости записи введем обозначения $(L_M(\mathbb{R}^n))^n = \mathbf{L}_M(\mathbb{R}^n)$, $(L_M(\mathbb{R}^n))^{n+1} = \mathbf{L}_M(\mathbb{R}^n)$, $(E_M(\mathbb{R}^n))^n = \mathbf{E}_M(\mathbb{R}^n)$, $(E_M(\mathbb{R}^n))^{n+1} = \mathbf{E}_M(\mathbb{R}^n)$. Пространство $W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$ отождествляется с подпространством произведения $\mathbf{L}_M(\mathbb{R}^n)$ и является замкнутым по слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_M, \mathbf{E}_{\overline{M}})$.

Сформулируем теорему о плотности гладких функций в пространстве Музилака—Орлича—Соболева (см. [7, Theorem 1]).

Лемма 2.1. *Предположим, что N -функция M удовлетворяет условиям $(M1, \text{loc})$ и $(M2)$, и пусть \overline{M} удовлетворяет условию $(M1, \text{loc})$. Тогда для любого $v \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$ существует последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что*

$$v^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty}^M v \quad \text{модулярно в } W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty.$$

Примеры функций Музилака—Орлича M , удовлетворяющих условиям леммы 2.1:

- 1) N -функция $M(x, z) = M(z)$;
- 2) $M_1(x, z) = |z|^{p(x)}$, $M_2(x, z) = |z|^{p(x)} \ln(1+|z|)$, $M_3(x, z) = |z| \ln^{p(x)}(1+|z|)$, $M_4(x, z) = e^{|z|^{p(x)}} - 1$, где $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [p^-, p^+]$, $p^- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) > 1$, $p^+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) < \infty$ и существует константа $c > 0$

такая, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| \leq \frac{1}{2}$ и выполняется неравенство

$$|p(x) - p(y)| \leq -c / \ln |x - y|.$$

3. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Предполагается, что функции

$$a(x, s_0, s) : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x, s_0, s) : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_0(x, s_0) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1.1), измеримы по $x \in \mathbb{R}^n$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$, для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и выполнено следующее условие.

Условие (M). Существуют неотрицательные функции $\psi, \psi_0 \in E_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и положительные константы $\widehat{a}, \overline{a}, \overline{d}, \widehat{d}, \widehat{b}_0, \overline{b}_0$ такие, что для п. в. $x \in \mathbb{R}^n$ и для любых $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $s_0 \neq t_0$, $s, t \in \mathbb{R}^n$, $s \neq t$ справедливы неравенства:

$$a(x, s_0, s) \cdot s \geq \overline{a}M(x, \overline{d}|s|) - \phi(x); \quad (3.1)$$

$$|a(x, s_0, s)| \leq \psi(x) + \widehat{a}\overline{M}^{-1}(x, M(x, \widehat{d}|s|)) + \widehat{a}\overline{M}^{-1}(x, P(x, s_0)); \quad (3.2)$$

$$(a(x, s_0, s) - a(x, s_0, t)) \cdot (s - t) > 0; \quad (3.3)$$

$$b_0(x, s_0)s_0 \geq \overline{b}_0M(x, s_0); \quad (3.4)$$

$$|b_0(x, s_0)| \leq \psi_0(x) + \widehat{b}_0\overline{M}^{-1}(x, M(x, s_0)). \quad (3.5)$$

Здесь функция Музилака–Орлича $M(x, z)$ подчиняется условиям $(M1, \text{loc})$, $(M2)$, сопряженная к M функция $\overline{M}(x, z)$ удовлетворяет условию $(M1, \text{loc})$. Функция Музилака–Орлича $P(x, z)$ такова, что $P \prec\prec M$ в окрестности 0 и ∞ , $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $|s| = \left(\sum_{i=1}^n s_i^2 \right)^{1/2}$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, непрерывная положительная функция $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\widehat{b} \in L_1(\mathbb{R}^+)$ такие, что при п. в. $x \in \mathbb{R}^n$ для всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство:

$$|b(x, s_0, s)| \leq \widehat{b}(|s_0|) \left(M(x, \widetilde{d}|s|) + \Phi(x) \right), \quad \widetilde{d} \leq \overline{d}. \quad (3.6)$$

Определим срезающую функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathcal{T}_M^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество измеримых функций $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$ при любом $k > 0$. Для любой функции $u \in \mathcal{T}_M^1(\mathbb{R}^n)$ и любого $k > 0$ имеем:

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{|u| < k\}} \nabla u \in L_M(\mathbb{R}^n),$$

где χ_Q — характеристическая функция измеримого множества Q и ∇u — обобщенный градиент u . Введем обозначение $\langle u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u dx$.

Определение 3.1. Ренормализованным решением уравнения (1.1) называется функция $u \in \mathcal{T}_M^1(\mathbb{R}^n)$ такая, что для любого $k > 0$ выполнены условия:

- 1) $b(x, u, \nabla u) \in L_1(\mathbb{R}^n)$;
- 2) $b_0(x, u)\chi_{\{\mathbb{R}^n: |u| < k\}} \in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$;
- 3) $a(x, u, \nabla u)\chi_{\{\mathbb{R}^n: |u| < k\}} \in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$;
- 4) $\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{\mathbb{R}^n: h \leq |u| < h+1\}} M(x, \overline{d}|\nabla u|) dx = 0$;

и для любых функций $S \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\xi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство:

$$\langle (b(x, u, \nabla u) + b_0(x, u) - f)S(u)\xi \rangle + \langle a(x, u, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi \nabla u + S(u)\nabla \xi) \rangle = 0. \quad (3.7)$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (M), тогда существует ренормализованное решение уравнения (1.1).

Следует отметить, что в работе [19] без ограничений на меру строго липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при тех же требованиях на функцию M для уравнения

$$-\text{div } a(x, \nabla u) + \frac{M(x, u)}{u} + b(x, u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

при условии монотонности функции $b(\cdot, s_0)$ установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле и доказана их единственность.

4. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе будут приведены вспомогательные леммы. Предполагается, что выполнено условие (M). Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Приведем теорему Витали в следующей форме (см. [2, гл. III, § 6, теорема 15]).

Лемма 4.1. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций из $L_1(\Omega)$ такая, что $v^j \rightarrow v$ п. в. в Ω , $j \rightarrow \infty$.

Для сходимости

$$v^j \rightarrow v \text{ сильно в } L_1(\Omega), \quad j \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ имела равномерно абсолютно непрерывные интегралы: для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и измеримое множество $Q_\varepsilon \subset \Omega$, $\text{meas } Q_\varepsilon < \infty$ такие, что

$$(i) \quad \int_Q |v^j(x)| dx < \varepsilon \text{ для любого } Q \subset \Omega, \text{ meas } Q < \delta, \quad j \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega \setminus Q_\varepsilon} |v^j(x)| dx < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Замечание 4.1. Очевидно, в случае $\text{meas } \Omega < \infty$ условие (ii) вытекает из условия (i).

Пользуясь выпуклостью функции \overline{M} , из (3.2) выводим оценку:

$$3\overline{M}\left(x, \frac{|a(x, s_0, s)|}{3\hat{a}}\right) \leq M(x, \hat{d}|s|) + \overline{M}\left(x, \frac{\psi}{\hat{a}}\right) + P(x, s_0) = M(x, \hat{d}|s|) + \Psi(x) + P(x, s_0) \quad (4.1)$$

с функцией $\Psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Применяя (2.3), (4.1), для $s^1, s^2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\mu > 0$ устанавливаем неравенства

$$\begin{aligned} |a(x, s_0, s^1)||s^2| &\leq 3\hat{a}\mu \left(\overline{M}\left(x, \frac{|a(x, s_0, s^1)|}{3\hat{a}}\right) + M\left(x, \frac{|s^2|}{\mu}\right) \right) \leq \\ &\leq \hat{a}\mu \left(M(x, \hat{d}|s^1|) + P(x, s_0) + 3M\left(x, \frac{|s^2|}{\mu}\right) + \Psi(x) \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Заметим, что ввиду $P \ll M$, согласно (2.4), для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C(\varepsilon)$ такое, что для п. в. $x \in \mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство:

$$P(x, z) \leq C(\varepsilon)M(x, \varepsilon z). \quad (4.3)$$

Применяя (2.3), (3.5) и выпуклость функции \overline{M} , для $s_0 \in \mathbb{R}$ устанавливаем неравенства

$$|b_0(x, s_0)| \leq \hat{b}_0 \left(M(x, s_0) + 2M(x, 1) + \overline{M}(x, \hat{b}_0^{-1}\psi_0) \right) = \hat{b}_0(M(x, s_0) + 2M(x, 1) + \Psi_0(x)), \quad (4.4)$$

$$2\overline{M}\left(x, \frac{|b_0(x, s_0)|}{2\hat{b}_0}\right) \leq M(x, s_0) + \overline{M}(x, \hat{b}_0^{-1}\psi_0) = M(x, s_0) + \Psi_0(x) \quad (4.5)$$

с функцией $\Psi_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 4.1. Пусть $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что при всех $k \geq 1$ имеем $T_k(v) \in W^1L_M(\mathbb{R}^n)$ и справедливо неравенство

$$\int_{\{\mathbb{R}^n: |v| \geq k\}} \frac{M(x, v)}{|v|} dx \leq C_1, \quad (4.6)$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k_0(C_1, M, \varepsilon)$ такое, что справедливо неравенство:

$$\text{meas } \{\mathbb{R}^n : |v| \geq k\} < \varepsilon, \quad k \geq k_0. \quad (4.7)$$

Доказательство. Из неравенства (4.6), пользуясь монотонностью функции $M(x, s_0)/s_0$ по переменной s_0 , выводим соотношения

$$\text{meas}\{\mathbb{R}^n : |v| \geq k\} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{M(x, k)}{k} \leq \int_{\{\mathbb{R}^n : |v| \geq k\}} \frac{M(x, v)}{|v|} dx \leq C_1.$$

Отсюда, применяя (2.2), устанавливаем (4.7). \square

Лемма 4.2 (см. [10, Lemma 2]). Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность функций из $L_M(\mathbb{R}^n)$ такая, что имеет место сходимость

$$v^j \rightarrow v \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

тогда $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$ и $v^j \rightarrow v$, $j \rightarrow \infty$, в топологии $\sigma(L_M, E_M)$ пространства $L_M(\mathbb{R}^n)$.

Имеем следствие из теоремы Витали.

Лемма 4.3 (см. [7, Lemma 2]). Пусть $v, \{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — функции из $L_M(\mathbb{R}^n)$ и

$$v^j \xrightarrow{M} v \quad \text{модулярно в } L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty.$$

Тогда $v^j \rightarrow v$, $j \rightarrow \infty$, в топологии $\sigma(L_M, L_M)$ пространства $L_M(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 4.4. Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность функций из $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что имеет место сходимость (4.8), тогда $v \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $v^j \rightarrow v$, $j \rightarrow \infty$, в топологии $\sigma(L_\infty, L_1)$ пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Если, кроме того, $g \in L_M(\mathbb{R}^n)$ ($g \in E_M(\mathbb{R}^n)$), то

$$v^j g \rightarrow v g \quad \text{модулярно (сильно) в } L_M(\mathbb{R}^n) \text{ (в } E_M(\mathbb{R}^n)), \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 4.4 следует из теоремы Лебега.

Замечание 4.2. Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$, v — измеримые в \mathbb{R}^n функции такие, что имеет место сходимость (4.8). Тогда

$$\chi_{\{\mathbb{R}^n : |v^j| \leq k\}} \rightarrow \chi_{\{\mathbb{R}^n : |v| \leq k\}} \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty$$

для таких k , что

$$\text{meas}\{\mathbb{R}^n : |v| = k\} = 0. \quad (4.9)$$

Таких k , для которых условие (4.9) не выполнено, может быть не более чем счетное число. Положительные числа k , для которых выполнено условие (4.9), будем называть «правильными» для функции v (см. [12, Lemma 9]).

Лемма 4.5 (см. [21, Definition 9.1, Lemma 9.2]). Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций из $E_M(\Omega)$. Для сходимости

$$v^j \rightarrow 0 \quad \text{в } E_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого измеримого $Q \subset \Omega$, $\text{meas } Q < \infty$,

$$v^j \rightarrow 0 \quad \text{по мере в } Q, \quad j \rightarrow \infty,$$

и семейство функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ имело равномерно абсолютно непрерывные нормы: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $Q_\varepsilon \subset \Omega$, $\text{meas } Q_\varepsilon < \infty$ и $\delta > 0$ такие, что

$$(iii) \quad \|v^j \chi_Q\|_M < \varepsilon \quad \text{для любого } Q \subset Q_\varepsilon, \quad \text{meas } Q < \delta, \quad j \in \mathbb{N};$$

$$(iv) \quad \|v^j \chi_{\Omega \setminus Q_\varepsilon}\|_M < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Лемма 4.6. Пусть M подчиняется условию $(M1, \text{loc})$, тогда для любой функции $v \in E_M(\Omega)$, $\text{meas}(\Omega) < \infty$, ее норма абсолютно непрерывна, т. е. выполнены условия (iii), (iv).

Доказательство следует из [21, Lemma 13.16] и плотности ограниченных функций в $E_M(\Omega)$.

Утверждение 4.1. Пусть Q — ограниченное подмножество \mathbb{R}^n и выполнены условия (3.1)–(3.3) и для некоторого фиксированного $k > 0$ для последовательности функций

$$(T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \in L_M(Q), \quad m \in \mathbb{N},$$

справедливы условия:

$$\nabla T_k(u^m) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(L_M, E_{\overline{M}}) \quad \text{в } L_M(Q), \quad m \rightarrow \infty,$$

$$T_k(u^m) \rightarrow T_k(u) \quad \text{н. в. в } Q, \quad m \rightarrow \infty,$$

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \text{ограничена в } L_{\overline{M}}(Q);$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_Q q_s^m(x) dx = 0,$$

$$q_s^m(x) = (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s), \quad (4.10)$$

где χ_s — характеристическая функция множества $Q_s = \{x \in Q \mid |\nabla T_k(u)| \leq s\}$. Тогда по некоторой подпоследовательности

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{н. в. в } Q, \quad m \rightarrow \infty,$$

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{модулярно в } L_M(Q), \quad m \rightarrow \infty,$$

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_1(Q), \quad m \rightarrow \infty.$$

Доказательство утверждения см. в [5, Лемма 4.10] и [3, Утверждение 1].

Лемма 4.7. Пусть $g^j, j \in \mathbb{N}$, g — такие функции из пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$, что $g^j \geq 0$ н. в. в \mathbb{R}^n ,

$$g^j \rightarrow g \quad \text{сильно в } L_1(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty,$$

и пусть $v^j, j \in \mathbb{N}$, v — измеримые функции в \mathbb{R}^n такие, что имеет место сходимость (4.8) и

$$|v^j| \leq g^j, \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{н. в. в } \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^j dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} v dx, \quad j \rightarrow \infty.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ

5.1. Аппроксимационная задача. Положим

$$f^m(x) = T_m f(x)\chi_{U(m)}, \quad U(m) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Несложно показать, что

$$f^m \rightarrow f \quad \text{в } L_1(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.1)$$

и при этом

$$|f^m(x)| \leq |f(x)|, \quad |f^m(x)| \leq m\chi_{U(m)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим уравнения

$$-\operatorname{div} a^m(x, u, \nabla u) + a_0^m(x, u, \nabla u) = f^m(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

с функциями

$$a^m(x, s_0, s) = a(x, T_m(s_0), s), \quad a_0^m(x, s_0, s) = b^m(x, s_0, s) + b_0(x, s_0).$$

Здесь

$$a^m(x, s_0, s) = (a_1^m(x, s_0, s), \dots, a_n^m(x, s_0, s)), \quad b^m(x, s_0, s) = T_m b(x, s_0, s)\chi_{U(m)}.$$

Очевидно, что

$$|b^m(x, s_0, s)| \leq |b(x, s_0, s)|, \quad |b^m(x, s_0, s)| \leq m\chi_{U(m)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (s_0, s) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (5.4)$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует обобщенное решение $u^m \in \dot{W}^1 L_M(U(m))$ уравнения (5.3) (см. [11, Theorem 13]). Продолжим u^m нулем на $\mathbb{R}^n \setminus U(m)$, тогда для любой функции $v \in \dot{W}^1 L_M(U(l)) \cap L_\infty(U(l))$, $l \leq m$, выполняется интегральное равенство

$$\langle (b^m(x, u^m, \nabla u^m) + b_0(x, u^m) - f^m(x))v \rangle + \langle a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla v \rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

5.2. Оценки для приближенных решений. Установим априорные оценки для последовательности $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Пусть

$$\widehat{B}(s_0) = \frac{1}{\bar{a}} \int_0^{s_0} \widehat{b}(|z|) dz,$$

тогда $0 \leq \widehat{B}(s_0) \leq \widehat{B}(+\infty) = \frac{1}{\bar{a}} \int_0^\infty \widehat{b}(|z|) dz = C_0 < \infty$, $s_0 \in \mathbb{R}^+$. Очевидно, что \widehat{b} ограничена на \mathbb{R}^+ , следовательно, справедлива оценка $\widehat{b}(|s_0|) \leq \widehat{C}$, $s_0 \in \mathbb{R}$.

Положив в (5.5) $v = T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} = T_k(u^m - T_h(u^m)) e^{2\widehat{B}(|u^m|)}$, $h, k > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ & + \int_{\{h \leq |u^m|\}} (b^m(x, u^m, \nabla u^m) + b_0(x, u^m)) T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ & + \frac{2}{\bar{a}} \int_{\{h \leq |u^m|\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \leq k \int_{\{|u^m| \geq h\}} |f^m| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx. \end{aligned}$$

Далее выводим

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \int_{\{h \leq |u^m|\}} b_0(x, u^m) T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \quad (5.6) \\ & + \frac{2}{\bar{a}} \int_{\{h \leq |u^m|\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \leq \\ & \leq k \int_{\{|u^m| \geq h\}} |f| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \int_{\{h \leq |u^m|\}} |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| |T_{k,h}(u^m)| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx. \end{aligned}$$

Применяя (3.4), оценим второй интеграл слева в неравенстве (5.6)

$$\int_{\{h \leq |u^m|\}} b_0(x, u^m) T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx \geq \int_{\{h \leq |u^m|\}} \bar{b}_0 M(x, u^m) \frac{|T_{k,h}(u^m)|}{|u^m|} e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx. \quad (5.7)$$

Применяя (3.1), (3.6), оценим третий интеграл слева в неравенстве (5.6)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\bar{a}} \int_{\{h \leq |u^m|\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \geq \\ & \geq 2 \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left(M(x, \bar{d} |\nabla u^m|) - \frac{\phi}{\bar{a}} \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \geq \quad (5.8) \\ & \geq 2 \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| - \widehat{b}(|u^m|) \left(\frac{\phi}{\bar{a}} + \Phi \right) \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} |T_{k,h}(u^m)| dx \geq \\ & \geq 2 \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| - \widehat{C} \left(\frac{\phi}{\bar{a}} + \Phi \right) \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} |T_{k,h}(u^m)| dx. \end{aligned}$$

Соединяя оценки (5.6)–(5.8), выводим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\ & + \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left(\bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} + |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| \right) |T_{k,h}(u^m)| dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где ϕ_1 — положительная функция из пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$. Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\ & + k \int_{\{|u^m| \geq k+h\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx \leq C_5 k + C_6, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В частности, полагая в (5.9) $h = 0$, устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u^m| < k\}} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) + \phi) dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) |T_k(u^m)| dx \leq C_5 k + C_6, \quad m \geq k. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Отсюда, применяя (3.1), выводим

$$\begin{aligned} & \bar{a} \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx + k \int_{\{|u^m| \geq k\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b} \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx \leq \\ & \leq \bar{a} \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) |T_k(u^m)| dx \leq C_6 + C_5 k, \quad m \geq k. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из оценки (5.12) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} M(x, T_k(u^m)) dx = \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, u^m) dx + \int_{\{|u^m| \geq k\}} M(x, k) dx \leq \\ & \leq \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, u^m) dx + k \int_{\{|u^m| \geq k\}} \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{M(x, u^m)}{u^m} T_k(u^m) dx \leq C_7 k + C_8, \quad m \geq k. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Кроме того, из (5.12) следует оценка

$$\int_{\{|u^m| < k\}} M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx = \int_{\mathbb{R}^n} M(x, \bar{d}|\nabla T_k(u^m)|) dx \leq C_9(k), \quad m \geq k. \quad (5.14)$$

Из оценки (5.11), в частности, имеем

$$\|b^m(x, u^m, \nabla u^m)\|_1 \leq C_{10}(k), \quad m \geq k. \quad (5.15)$$

Кроме того, из оценок (5.13), (5.14) выводим

$$\|T_k(u^m)\|_M + \|\nabla T_k(u^m)\|_M \leq C_{11}(k), \quad m \geq k. \quad (5.16)$$

5.3. Сходимость почти всюду. Из оценки (5.12), согласно предложению 4.1, имеем:

$$\text{meas} \{|u^m| \geq \rho\} \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (5.17)$$

Из (5.10) при $k = 1$ для любого $h > 0$ получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < 1+h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\ & + \int_{\{|u^m| \geq h+1\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (\phi_1 + \phi) dx, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $\phi_1, \phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, и абсолютной непрерывности интеграла в правой части последнего неравенства, учитывая (5.17), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать достаточно большое $\tilde{h}(\varepsilon) > 1$ такое, что для $h \geq \tilde{h}$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned} & \int_{\{h-1 \leq |u^m| < h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\ & + \int_{\{|u^m| \geq h\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Так же, как в [3], устанавливаются сходимость по подпоследовательности:

$$u^m \rightarrow u \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.19)$$

и для любого $k > 0$ имеем сходимости:

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(L_M, E_{\overline{M}}) \quad \text{в } W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.20)$$

$$T_k(u^m) \rightarrow T_k(u) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.21)$$

Выполняя предельный переход в (5.13) по $m \rightarrow \infty$, заключаем принадлежность

$$M(x, T_k(u)), \quad \frac{M(x, u)}{u} T_k(u) \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда, применяя оценку (4.5), заключаем, что условие 2) определения 3.1 выполнено.

Далее докажем, что для любой функции $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ имеет место сходимость

$$b_0(x, u^m) S(u^m) \rightarrow b_0(x, u) S(u) \quad \text{в } L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.22)$$

Учитывая сходимость (5.19), имеем:

$$b_0(x, u^m) S(u^m) \rightarrow b_0(x, u) S(u) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.23)$$

Пусть Q — произвольное измеримое подмножество в \mathbb{R}^n , а функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что $\text{supp } S \subset [-K, K]$ для $K > 0$ и $|S(r)| \leq K_1$ для любого $r \in \mathbb{R}$. Пользуясь (4.4), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \int_Q |b_0(x, u^m)| |S(u^m)| dx = \int_Q |b_0(x, u^m)| |S(u^m)| \chi_{\{\mathbb{R}^n: |u^m| < K\}} dx \leq \\ & \leq K_1 \hat{b}_0 \int_Q (\Psi_0 + 2M(x, 1) + M(x, K)) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду принадлежности $M(x, K) \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, заключаем равномерную интегрируемость последовательности $\{|b(x, u^m) S(u^m)|\}_{m \in \mathbb{N}}$ для любого $Q \subset \mathbb{R}^n : \text{meas } Q < \infty$. Учитывая сходимость (5.23), применяя лемму 4.1, устанавливаем сходимость (5.22).

5.4. Модулярная сходимость градиентов от срезов. Докажем сходимости

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \text{ модулярно в } L_{M,\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.24)$$

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \text{ в } L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.25)$$

Пусть $w \in E_M(\Omega)$ произвольное, из условия (3.3) следует неравенство

$$(a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), w)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - w) \geq 0. \quad (5.26)$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot w dx &\leq \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) dx - \\ &- \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), w) \cdot (\nabla T_k(u^m) - w) dx. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Далее, применяя (4.1), (4.3) ($\varepsilon = 1$), выводим

$$3 \int_{\Omega} \overline{M}(x, |a(x, T_k(u^m), w)(3\widehat{a})^{-1}|) dx \leq \|\Psi\|_1 + C \int_{\Omega} M(x, T_k(u^m)) dx + \int_{\Omega} M(x, \widehat{d}|w|) dx.$$

Отсюда, применяя (5.13), устанавливаем оценку

$$\|a(x, T_k(u^m), w)\|_{\overline{M}} \leq C_{12}, \quad m \geq k. \quad (5.28)$$

Соединяя (5.27), (5.11), (5.16), (5.28), получаем оценку:

$$\int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot w dx \leq C_{13}, \quad m \geq k, \quad \forall w \in E_M(\Omega).$$

Применяя принцип равномерной ограниченности, при любом $k > 0$ имеем оценку:

$$\|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))\|_{\overline{M}} \leq C_{14}(k), \quad m \geq k. \quad (5.29)$$

Из оценки (5.29) следует сходимость по подпоследовательности

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightarrow \tilde{a}_k \text{ по топологии } \sigma(L_{\overline{M}}, E_M) \text{ в } L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.30)$$

Для положительных вещественных чисел m, j, s обозначим через $\omega(m, j, s)$ любую величину такую, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \lim_{j \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \omega(m, j, s) = 0.$$

Пусть $h, k, h - 1 > k > 0$.

Согласно лемме 2.1, существует последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$v^j \rightarrow T_k(u) \text{ модулярно в } W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty,$$

тогда

$$T_k(v^j) \rightarrow T_k(u) \text{ модулярно в } W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty. \quad (5.31)$$

Отсюда, согласно лемме 4.1, следует, что найдется $\lambda > 0$ такое, что для последовательностей

$$\left\{ M \left(x, \frac{|T_k(u) - T_k(v^j)|}{\lambda} \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \left\{ M \left(x, \frac{|\nabla(T_k(u) - T_k(v^j))|}{\lambda} \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}$$

выполнены условия (i), (ii) (5.32)

и справедлива сходимость по некоторой подпоследовательности $J \subset \mathbb{N}$ (см. [21, Remark 7.9]:

$$T_k(v^j) \rightarrow T_k(u), \quad \nabla T_k(v^j) \rightarrow \nabla T_k(u) \text{ п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty. \quad (5.33)$$

Замечание 5.1. Пользуясь выпуклостью функции $M(x, \cdot)$ и тем, что $T_k(u) \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$, несложно установить эквивалентность (5.32) условию:

$$\left\{ M \left(x, \frac{|T_k(v^j)|}{\lambda_1} \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \left\{ M \left(x, \frac{|\nabla T_k(v^j)|}{\lambda_1} \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ подчиняются условиям (i), (ii)}$$

с некоторым $\lambda_1 > 0$.

Кроме того, согласно лемме 4.3, имеем:

$$\nabla T_k(v^j) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(L_M, L_{\overline{M}}), \quad j \rightarrow \infty.$$

Полагаем

$$z^{mj} = T_k(u^m) - T_k(v^j), \quad z^j = T_k(u) - T_k(v^j), \quad m, j \in \mathbb{N},$$

$\varphi_k(\rho) = \rho \exp(\gamma^2 \rho^2)$, где $\gamma = \frac{\widehat{b}_k}{a}$, $\widehat{b}_k = \max\{\widehat{b}(|s|) : |s| \leq k\}$. Очевидно, что

$$\psi_k(\rho) = \varphi'_k(\rho) - 2\gamma|\varphi_k(\rho)| \geq 1/2, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$1/2 \leq \psi_k(z^{mj}) \leq \max_{[-2k, 2k]} \psi_k(\rho) = C_{15}(k), \quad m, j \in \mathbb{N}. \quad (5.34)$$

Ввиду (5.21), (5.33) имеем:

$$\varphi_k(z^{mj}) \rightarrow \varphi_k(z^j), \quad \varphi'_k(z^{mj}) \rightarrow \varphi'_k(z^j), \quad \psi_k(z^{mj}) \rightarrow \psi_k(z^j) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.35)$$

$$\varphi_k(z^j) \rightarrow \varphi_k(0) = 0, \quad \varphi'_k(z^j) \rightarrow \varphi'_k(0) = 1, \quad \psi_k(z^j) \rightarrow \psi_k(0) = 1 \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty, \quad (5.36)$$

а также

$$|\varphi_k(z^{mj})| \leq \varphi_k(2k), \quad 1 \leq \varphi'_k(z^{mj}) \leq \varphi'_k(2k), \quad m, j \in \mathbb{N}, \quad (5.37)$$

$$|\varphi_k(z^j)| \leq \varphi_k(2k), \quad 1 \leq \varphi'_k(z^j) \leq \varphi'_k(2k), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (5.38)$$

Применяя (5.35)–(5.38), по лемме 4.4 устанавливаем сходимости:

$$|\varphi_k(z^{mj})| \rightharpoonup |\varphi_k(z^j)| \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \quad \text{пространства } L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.39)$$

$$|\varphi_k(z^j)| \rightharpoonup 0 \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \quad \text{пространства } L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty. \quad (5.40)$$

Кроме того, для любой функции $g \in E_M(\mathbb{R}^n)$, применяя лемму 4.4, устанавливаем сходимости

$$\varphi_k(z^{mj})g \rightarrow \varphi_k(z^j)g \quad \text{сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.41)$$

$$\varphi_k(z^j)g \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty. \quad (5.42)$$

Введем обозначения χ_s^j , χ_s , $k\chi^m$, $k\chi$ для характеристических функций множеств $\{x \in \mathbb{R}^n : |\nabla T_k(v^j)| \leq s\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : |\nabla T_k(u)| \leq s\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : |u^m| \geq k\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : |u| \geq k\}$, соответственно. Будем рассматривать «правильные» k, s , для которых $\text{meas}\{\mathbb{R}^n : |u| = k\} = 0$ и $\text{meas}\{\mathbb{R}^n : |\nabla T_k(u)| = s\} = 0$.

Положим $\eta_h(r) = \min(1, \max(0, h - r + 1))$, $r \in \mathbb{R}$. Для краткости записи будем использовать обозначения

$$\zeta_{h-1}^m = \eta_{h-1}(|u^m|), \quad \zeta_{h-1} = \eta_{h-1}(|u|), \quad \eta_R = \eta_R(|x|).$$

Из (5.19), (5.33) для правильных k, s следуют сходимости:

$$\zeta_{h-1}^m \rightarrow \zeta_{h-1} \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.43)$$

$$\chi_s^j \rightarrow \chi_s \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty, \quad (5.44)$$

$$k\chi^m \rightarrow k\chi \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.45)$$

Принимая в качестве тестовой функции в (5.5) $\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla(\varphi_k(z^{mj})\eta_R\zeta_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)}) dx + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^n} b^m(x, u^m, \nabla u^m)\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^n} b_0(x, u^m)\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^m\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\ & \quad = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0, \quad m \geq h. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Оценки интегралов I_2 – I_4 . Ввиду оценки (4.4) имеем:

$$|b_0(x, u^m)|\zeta_{h-1}^m \eta_R \leq \widehat{b}_0(M(x, h) + 2M(x, 1) + \Psi_0) \eta_R = \Psi_h \eta_R \in L_1(\mathbb{R}^n);$$

из сходимостей (5.39), (5.40), имеем:

$$|I_3| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_h \eta_R |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx \leq \omega_{h,R}(m) + e^{C_0} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_h \eta_R |\varphi_k(z^j)| dx = \omega_{h,R}(m, j). \quad (5.47)$$

Аналогично, благодаря (5.2), ввиду $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ получаем

$$|I_4| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx \leq \omega(m) + e^{C_0} \int_{\mathbb{R}^n} |f| |\varphi_k(z^j)| dx = \omega(m, j). \quad (5.48)$$

Применяя (5.4), (3.6), оценим интеграл

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{b}(|u^m|) (M(x, \bar{d} |\nabla T_h(u^m)|) + \Phi(x)) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Используя (3.1), выводим

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{\bar{a}} \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{a}\Phi(x) + \phi(x)) |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} |a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)| |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\{|u^m| > k\}} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_h(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx = \quad (5.49) \\ &= I_{21} + I_{22} + I_{23}. \end{aligned}$$

Учитывая то, что $z^{mj} u^m \geq 0$ при $|u^m| \geq k$, выводим

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \varphi'_k(z^{mj}) \nabla z^{mj} \eta_R \zeta_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \int_{\{\mathbb{R}^n: h-1 \leq |u^m| < h\}} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla u^m |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \varphi_k(z^{mj}) \nabla \eta_R \zeta_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \quad (5.50) \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} |a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)| |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\{|u^m| > k\}} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_h(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx = \\ &= I_{11} - I_{12} + I_{13} - I_{14} + I_{15}. \end{aligned}$$

Теперь, используя то, что $I_{15} = I_{23}$, $I_{22} = I_{14}$, и оценки интегралов (5.47)–(5.50), из (5.46) выводим неравенства

$$I_{11} - 2I_{22} \leq \omega_{h,R}(m, j) + I_{21} + I_{12} - I_{13}, \quad m \geq h. \quad (5.51)$$

Далее, учитывая (3.1), получаем

$$\begin{aligned}
I_{12} + I_{21} + 2I_{22} &\leq \varphi_k(2k)e^{C_0} \int_{\{\mathbb{R}^n: h-1 \leq |u^m| < h\}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\
&\quad + C_{16} \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x})) |\varphi_k(z^{mj})| dx + \\
&\quad + 2 \frac{\widehat{b}_k}{a} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \eta_R dx = I_{121} + I_{211} + I_{221}.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Ввиду (5.39), (5.40), имеем:

$$I_{211} = \omega(m, j). \tag{5.53}$$

Благодаря (5.18), заключаем:

$$I_{121} \leq \omega(h). \tag{5.54}$$

Применяя оценку (5.29) и сходимости (5.41), (5.42) с $g = \chi_{U(R+1)}$, устанавливаем соотношения

$$|I_{13}| \leq C_{17} \int_{U(R+1)} |\mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m))| \cdot |\varphi_k(z^{mj})| dx \leq C_{18}(h) \|\varphi_k(z^{mj})\|_{M, U(R+1)} = \omega_{h,R}(m, j). \tag{5.55}$$

Соединяя (5.51)–(5.55), устанавливаем

$$I_5 = I_{11} - I_{221} \leq \omega(h) + \omega_{h,R}(m, j), \quad m \geq h. \tag{5.56}$$

Представление I_5 . Выполняя элементарные преобразования, выводим равенства

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \varphi'_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \frac{2\widehat{b}_k}{a} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \varphi'_k(z^{mj}) \chi_s^j \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx.
\end{aligned}$$

Очевидно равенство

$$I_5 = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2\widehat{b}_k}{\widehat{a}} \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
 & + \int_{\mathbb{R}^n} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \zeta_{h-1}^m a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m))) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \varphi'_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
 & + \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\
 & = I_{51} + I_{52} + I_{53} + I_{54}, \quad m \geq h.
 \end{aligned}$$

Оценки интегралов I_{52} – I_{54} .

Применяя (5.19), (5.35), (5.37) и лемму 4.4 с $g = \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \eta_R \in E_M(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\eta_R \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow \eta_R \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^j)| e^{\widehat{B}(|u|)} \text{ сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (5.30), устанавливаем

$$I_{52} = - \frac{2\widehat{b}_k}{\widehat{a}} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{a}_k \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^j)| \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m).$$

Применяя (5.33), (5.36), (5.38), (5.44), по теореме Лебега устанавливаем:

$$I_{52} = \omega_R(m, j). \tag{5.58}$$

Применяя (5.35), (5.37), (5.45) и лемму 4.4 с $g = \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \eta_R \in E_M(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\nabla T_k(v^j) \chi_s^j \varphi'_k(z^{mj}) \chi_s^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \varphi'_k(z^j) \chi_s \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} \text{ сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимостей (5.30), (5.43), устанавливаем

$$I_{53} = \int_{\mathbb{R}^n} (\widetilde{a}_k - \zeta_{h-1} \widetilde{a}_h) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \varphi'_k(z^j) \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m).$$

Далее, применяя (5.33), (5.36), (5.38), (5.44), по теореме Лебега заключаем:

$$I_{53} = \int_{\mathbb{R}^n} (\widetilde{a}_k - \zeta_{h-1} \widetilde{a}_h) \cdot \nabla T_k(u) \chi_s \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m, j) = \omega_R(m, j). \tag{5.59}$$

Далее, применяя (5.35), (5.37), (5.43) и лемму 4.4 с $g = \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \eta_R \in E_M(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^j) \zeta_{h-1} \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} \text{ сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (5.30), устанавливаем

$$I_{54} = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{a}_h \cdot \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^j) \zeta_{h-1} \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m).$$

Применяя (5.36), (5.38), (5.44), (5.31) и лемму 4.1 (см. замечание 5.1), получаем

$$\nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^j) \eta_R \rightarrow \nabla T_k(u) (\chi_s - 1) \eta_R \text{ модулярно в } L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду принадлежности $\widetilde{a}_h \zeta_{h-1} e^{\widehat{B}(|u|)} \in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$, имеем:

$$I_{54} = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{a}_h \cdot \nabla T_k(u) (\chi_s - 1) \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m, j).$$

В силу того, что $\widetilde{a}_h \cdot \nabla T_k(u) e^{\widehat{B}(|u|)} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, имеем:

$$I_{54} = \omega_R(m, j, s). \tag{5.60}$$

Из (5.56)–(5.60) следует, что

$$I_{51} \leq \omega_{h,R}(m, j, s) + \omega(h). \tag{5.61}$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned}
0 \leq I_6 &= \int_{\mathbb{R}^n} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)) \times \\
&\quad \times (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = I_{51} - I_{61}.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Из (5.19), (5.21) следует сходимость

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)e^{\widehat{B}(|u|)} \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty,$$

а из (3.2), (4.3) имеем оценки

$$|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)| \leq \widehat{a} \left(M(x, \widehat{d}s) + 2M(x, 1) + CM(x, k) \right) + \psi(x), \quad m, j \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь ограниченностью функции $M(\cdot, z)$ по $x \in U(R+1)$, для любых фиксированных $z \in \mathbb{R}$ устанавливаем оценку

$$|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)|\eta_R \leq \psi(x) + C_{19}\eta_R \in E_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m, j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая (5.34), (5.35), по леммам 4.5, 4.6 получаем сходимость

$$\begin{aligned}
&a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})e^{\widehat{B}(|u^m|)}\eta_R \rightarrow \\
&\rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^j)e^{\widehat{B}(|u|)}\eta_R \quad \text{сильно в } E_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Применяя (5.63), (5.20), выводим

$$I_{61} = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^j)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Применяя оценку (4.2) и сходимости (5.33), (5.36), (5.44), по теореме Лебега устанавливаем

$$I_{61} = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u), 0) \cdot \nabla T_k(u)(1 - \chi_s)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m, j).$$

Наконец, благодаря $a(x, T_k(u), 0) \cdot \nabla T_k(u)e^{\widehat{B}(|u|)}\eta_R \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (см. (4.2)) получаем

$$I_{61} = \omega_R(m, j, s). \tag{5.64}$$

Соединяя (5.62), (5.64), (5.61) и применяя (5.34), выводим

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_{\mathbb{R}^n} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)) \times \\
&\quad \times (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\eta_R dx \leq 2I_6 \leq \omega_{h,R}(m, j, s) + \omega(h).
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Используя обозначение (4.10), имеем

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{U(R)} q_s^m(x) dx &\leq I_7 + \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(v^j)\chi_s^j - \nabla T_k(u)\chi_s)\eta_R dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s)\eta_R dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\eta_R dx = I_7 + I_{71} + I_{72} + I_{73}.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Для интегралов I_{71} – I_{73} справедливы оценки (см. [3]):

$$I_{71} = \omega_R(m, j), \quad I_{72} = \omega_R(m, s), \quad I_{73} = \omega_R(m, j, s). \quad (5.67)$$

Соединяя (5.65)–(5.67), получаем

$$\int_{U(R)} q_s^m(x) dx \leq \omega_{R,h}(m, j, s) + \omega(h).$$

Ввиду того, что левая часть последнего неравенства не зависит от j, h , переходя последовательно к пределам по $m \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty$, устанавливаем соотношение

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{U(R)} q_s^m(x) dx \leq \omega(h).$$

Выполняя предельный переход при $h \rightarrow \infty$, выводим соотношение

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{U(R)} q_s^m(x) dx = 0.$$

По утверждению 4.1 ($Q = U(R)$) ввиду произвольности $R > 0$ имеем сходимости (5.24), (5.25) и сходимость

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.68)$$

Далее так же, как в [4, 5.5], устанавливается сходимость по подпоследовательности

$$\nabla u^m \rightarrow \nabla u \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.69)$$

5.5. Предельный переход. Используя оценку (5.29) и сходимости (5.21), (5.68), по лемме 4.2 устанавливаем слабую сходимость

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \quad (5.70)$$

в топологии $\sigma(L_{\overline{M}}, E_M)$ пространства $L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$, $m \rightarrow \infty$.

Из непрерывности $b(x, s_0, s)$ по (s_0, s) и сходимостей (5.19), (5.69) следует, что

$$b^m(x, u^m, \nabla u^m) \rightarrow b(x, u, \nabla u) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.71)$$

Из оценки (5.15), ввиду (5.71), согласно лемме Фату заключаем, что

$$b(x, u, \nabla u) \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, условия 1), 3) определения 3.1 выполнены.

Далее, сходимость

$$b^m(x, u^m, \nabla u^m) \rightarrow b(x, u, \nabla u) \quad \text{в } L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.72)$$

устанавливается так же, как в [5, Шаг 6].

Докажем, что u является ренормализованным решением уравнения (1.1). Условия 1), 2), 3) определения 3.1 доказаны. Докажем условие 4). Применяя (3.1), из неравенства (5.10) получаем

$$\int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} \overline{a}M(x, \overline{d}|\nabla u^m|) dx + k\overline{b}_0 \int_{\{|u^m| \geq k+h\}} \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, пользуясь сходимостями (5.69), (5.19), применяя теорему Лебега и лемму Фату, выполним предельный переход при $m \rightarrow \infty$ для правильных h и получим неравенство:

$$\int_{\{h \leq |u| < k+h\}} \overline{a}M(x, \overline{d}|\nabla u|) dx + k\overline{b}_0 \int_{\{|u| \geq k+h\}} \frac{M(x, u)}{|u|} dx \leq C_4 \int_{\{|u| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx. \quad (5.73)$$

Отсюда, в частности, справедлива оценка вида (4.6). Тогда согласно предложению 4.1 имеем:

$$\text{meas} \{\mathbb{R}^n : |u| \geq h\} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty. \quad (5.74)$$

Выполняя предельный переход в (5.73) при $h \rightarrow \infty$, пользуясь (5.74), устанавливаем соотношение

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{h \leq |u| < k+h\}} M(x, \bar{d}|\nabla u|) dx = 0.$$

Докажем равенство (3.7). Пусть $\xi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \xi \subset U(l)$, $l \geq l_0$ и функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что $\text{supp } S \subset [-K, K]$, $K > 0$. Пусть $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — последовательных слабых решений уравнения (5.3). Взяв $S(u^m)\xi \in \dot{W}^1 L_M(U(l)) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в качестве тестовой функции в (5.5), выводим равенство

$$\begin{aligned} & \langle a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) \rangle + \\ & + \langle (b^m(x, u^m, \nabla u^m) + b_0(x, u^m) - f^m(x))S(u^m)\xi \rangle = I^m + J^m = 0, \quad m \geq l_0. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} I^m &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u^m), \nabla T_K(u^m)) \cdot \nabla T_K(u^m) S'(u^m)\xi dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u^m), \nabla T_K(u^m)) \cdot \nabla \xi S(u^m) dx = I_1^m + I_2^m, \quad m \geq \max(K, l_0). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Ввиду сходимостей (5.19), (5.25), применяя лемму 4.7, устанавливаем

$$I_1^m = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u), \nabla T_K(u)) \cdot \nabla T_K(u) S'(u)\xi dx + \omega(m), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.77)$$

Из сходимости (5.19) по лемме 4.4 получаем:

$$S(u^m)\nabla \xi \rightarrow S(u)\nabla \xi \quad \text{сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, учитывая сходимость (5.70), выводим:

$$I_2^m = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u), \nabla T_K(u)) \cdot \nabla \xi S(u) dx + \omega(m), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.78)$$

Соединяя (5.76)–(5.78), получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I^m &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u), \nabla T_K(u)) \cdot (S'(u)\xi \nabla T_K(u) + S(u)\nabla \xi) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, u, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi \nabla u + S(u)\nabla \xi) dx. \end{aligned} \quad (5.79)$$

По лемме 4.4 имеем

$$S(u^m)\xi \rightarrow S(u)\xi \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда, ввиду сходимостей (5.1), (5.22), (5.72), устанавливаем равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J^m = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x, u, \nabla u) + b_0(x, u) - f)S(u)\xi dx. \quad (5.80)$$

Комбинируя (5.75), (5.79), (5.80), получаем равенство (3.7). Таким образом, приходим к выводу, что u является ренормализованным решением уравнения (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильданова В. Ф., Мукминов Ф. Х. Энтропийное решение для уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве// *Мат. сб.* — 2023. — 214, № 11. — С. 37–62.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
3. Кожевникова Л. М. Существование энтропийного решения нелинейной эллиптической задачи в неограниченной области// *Теор. мат. физ.* — 2024. — 218, № 1. — С. 124–148.
4. Кожевникова Л. М. Энтропийные и ренормализованные решения анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей// *Мат. сб.* — 2019. — 210, № 3. — С. 131–161.
5. Кожевникова Л. М., Кашиникова А. П. Существование решений нелинейных эллиптических уравнений с данными в виде меры в пространствах Музилака–Орлича// *Мат. сб.* — 2022. — 213, № 4. — С. 38–73.
6. Ahmdatt T., Elemine Vall M. S. B., Benkirane A., Touzani A. Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1 // *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.* — 2017. — 44, № 2. — С. 190–213.
7. Ahmida Y., Chlebicka I., Gwiazda P., Youssfi A. Gossez’s approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces// *J. Funct. Anal.* — 2018. — 275, № 9. — С. 2538–2571.
8. Ait Khellou M., Benkirane A. Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak–Orlicz spaces// *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.* — 2016. — 43, № 2. — С. 164–187.
9. Ait Khelloul M., Douiri S. M., El Hadfi Y. Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the log-Hölder continuity condition// *Mediterr. J. Math.* — 2020. — 17, № 1. — С. 1–18.
10. Benkirane A., Sidi El Vally M. An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces// *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.* — 2013. — 20. — С. 57–75.
11. Benkirane A., Sidi El Vally M. Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces// *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.* — 2014. — 21, № 5. — С. 787–811.
12. Chlebicka I. Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth// *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* — 2023. — 153, № 2. — С. 588–618.
13. Douiri S. M., Benkirane A., Ait Khellou M., El Hadfi Y. Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces// *Anal. Math. Phys.* — 2021. — 11, № 2. — С. 66.
14. Elarabi R., Rhoudaf M., Sabiki H. Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak–Orlicz spaces// *Ric. Mat.* — 2018. — 67, № 2. — С. 549–579.
15. Elemine Vall M. S. B., Ahmedatt T., Touzani A., Benkirane A. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data// *Bol. Soc. Parana. Mat.* — 2018. — 36, № 1. — С. 125–150.
16. Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A. Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak–Orlicz space// *Differ. Equ.* — 2018. — 264. — С. 341–377.
17. Kozhevnikova L. M. On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data// *Complex Var. Elliptic Equ.* — 2020. — 65, № 3. — С. 337–367.
18. Kozhevnikova L. M. On solutions of elliptic equations with variable exponents and measure data in \mathbb{R}^n // В сб.: «Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics». — Cham: Birkhäuser, 2021. — С. 221–239.
19. Kozhevnikova L. M. On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1 -data in unbounded domains// *Lobachevskii J. Math.* — 2023. — 44, № 5. — С. 1879–1901.
20. Li Y., Fengping Y., Shulin Zh. Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces// *Nonlinear Anal. Real World Appl.* — 2021. — 61, № 2. — С. 1–20.
21. Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces. — Berlin: Springer, 1983.
22. Talha A., Benkirane A. Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak–Orlicz spaces// *Monatsh. Math.* — 2018. — 186, № 4. — С. 745–776.

Л. М. Кожевникова

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

Елабужский институт Казанского федерального университета, Елабуга, Россия

E-mail: kosul@mail.ru

UDC 517.956.25

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299

EDN: YKDZHU

Existence of a Renormalized Solution to a Nonlinear Elliptic Equation with L_1 -Data in the Space \mathbb{R}^n

L. M. Kozhevnikova

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia

Abstract. We consider a second-order quasilinear elliptic equation with an integrable right-hand side in the space \mathbb{R}^n . Restrictions on the structure of the equation are formulated in terms of a generalized N -function. In the nonreflexive Muzilak–Orlicz–Sobolev spaces, the existence of a renormalized solution in the space \mathbb{R}^n is proved.

Keywords: quasilinear equation, elliptic equation, generalized N -function, Muzilak–Orlicz–Sobolev space, renormalized solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: L. M. Kozhevnikova, “Existence of a Renormalized Solution to a Nonlinear Elliptic Equation with L_1 -Data in the Space \mathbb{R}^n ,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 278–299. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299>

REFERENCES

1. V. F. Vil'danova and F. Kh. Mukminov, “Entropiynoe reshenie dlya uravneniya s meroznachnym potentsialom v giperbolicheskom prostranstve” [Entropy solution for an equation with measure-valued potential in hyperbolic space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2023, **214**, No. 11, 37–62 (in Russian).
2. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], IL, Moscow, 1962 (in Russian).
3. L. M. Kozhevnikova, “Sushchestvovanie entropiynogo resheniya nelineynoy ellipticheskoy zadachi v neogranichennoy oblasti” [Existence of an entropy solution to a nonlinear elliptic problem in an unbounded domain], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2024, **218**, No. 1, 124–148 (in Russian).
4. L. M. Kozhevnikova, “Entropiynye i renormalizovannye resheniya anizotropnykh ellipticheskikh uravneniy s peremennymi pokazatelyami nelineynostey” [Entropy and renormalized solutions of anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity exponents], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 3, 131–161 (in Russian).
5. L. M. Kozhevnikova and A. P. Kashnikova, “Sushchestvovanie resheniy nelineynykh ellipticheskikh uravneniy s dannymi v vide mery v prostranstvakh Muzilaka–Orlicha” [Existence of solutions of nonlinear elliptic equations with measure data in Musielak–Orlicz spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2022, **213**, No. 4, 38–73 (in Russian).
6. T. Ahmdatt, M. S. B. Elemine Vall, A. Benkirane, and A. Touzani, “Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1 ,” *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 2017, **44**, No. 2, 190–213.
7. Y. Ahmida, I. Chlebicka, P. Gwiazda, and A. Youssfi, “Gossez’s approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces,” *J. Funct. Anal.*, 2018, **275**, No. 9, 2538–2571.



8. M. Ait Khellou and A. Benkirane, “Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak–Orlicz spaces,” *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 2016, **43**, No. 2, 164–187.
9. M. Ait Khelloul, S. M. Douiri, and Y. El Hadfi, “Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the log-Hölder continuity condition,” *Mediterr. J. Math.*, 2020, **17**, No. 1, 1–18.
10. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2013, **20**, 57–75.
11. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2014, **21**, No. 5, 787–811.
12. I. Chlebicka, “Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2023, **153**, No. 2, 588–618.
13. S. M. Douiri, A. Benkirane, M. Ait Khellou, and Y. El Hadfi, “Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces,” *Anal. Math. Phys.*, 2021, **11**, No. 2, 66.
14. R. Elarabi, M. Rhoudaf, and H. Sabiki, “Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak–Orlicz spaces,” *Ric. Mat.*, 2018, **67**, No. 2, 549–579.
15. M. S. B. Elemine Vall, T. Ahmedatt, A. Touzani, and A. Benkirane, “Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data,” *Bol. Soc. Parana. Mat.*, 2018, **36**, No. 1, 125–150.
16. P. Gwiazda, I. Skrzypczaka, and A. Zatorska-Goldstein, “Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak–Orlicz space,” *Differ. Equ.*, 2018, **264**, 341–377.
17. L. M. Kozhevnikova, “On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020, **65**, No. 3, 337–367.
18. L. M. Kozhevnikova, “On solutions of elliptic equations with variable exponents and measure data in \mathbb{R}^n ,” In: *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics*, Birkhäuser, Cham, 2021, pp. 221–239.
19. L. M. Kozhevnikova, “On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1 -data in unbounded domains,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 5, 1879–1901.
20. Y. Li, Y. Fengping, and Zh. Shulin, “Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2021, **61**, No. 2, 1–20.
21. J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer, Berlin, 1983.
22. A. Talha and A. Benkirane, “Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak–Orlicz spaces,” *Monatsh. Math.*, 2018, **186**, No. 4, 745–776.

L. M. Kozhevnikova

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia

E-mail: kosul@mail.ru