С. А. Пиунихин, Несколько новых результатов о квазикристаллографических группах в смысле Новикова, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 100–107

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

НЕСКОЛЬКО НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ О КВАЗИКРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУППАХ В СМЫСЛЕ НОВИКОВА

С. А. Пиунихин

Введение.

Пусть E_k — группа изометрий k-мерного евклидова пространства, $\mathbf{R}^k$ — ее подгруппа, состоящая из всех трансляций.

Определение. k-мерной квазикристаллографической группой называется подгруппа G группы E_k, пересечение которой с подгруппой $\mathbf{R}^k$ является конечно порожденной абелевой группой T, вещественные линейные комбинации элементов которой порождают всю группу $\mathbf{R}^k$. Квазикристаллографическая группа называется кристаллографической, если ее подгруппа трансляций имеет ранг k. Это определение принадлежит С. П. Новикову.

В предыдущей работе автора [1] была доказана конечная порожденность двумерных квазикристаллографических групп; из всех квазикристаллографических групп был выделен класс физических, которые характеризуются конечностью фактора по подгруппе трансляций; сделано продвижение в задаче классификации двумерных квазикристаллографических групп, причем в случае, когда группы содержат лишь собственные движения плоскости, классификация доведена до конца.

Основные вопросы (задача Новикова).

1) Вопросы, связанные с конечной порожденностью.

Всегда ли трехмерная квазикристаллографическая группа конечно порождена?

Всегда ли трехмерная квазикристаллографическая группа лежит в некоторой конечно порожденной квазикристаллографической группе?

Всегда ли группа линейных частей квазикристаллографической группы лежит в группе линейных частей некоторой конечно порожденной квазикристаллографической группы? (На все эти вопросы дается ответ в работе).

2) Дать классификацию с точностью до теоретико-группового изоморфизма всех физических квазикристаллографических групп при $k = 2$ и при $k = 3$. (Дается ответ на языке абстрактной ал-

гебры, в некоторых частных случаях приводятся ответы соответствующих алгебраических задач).

§ 1. Вопросы, связанные с конечной порожденностью. Пусть $G = R \leftthreetimes T$ — n-мерная квазикристаллографическая группа. Тогда G конечно порождена тогда и только тогда, когда R конечно порождена. Заметим также, что любая подгруппа $G_1 = (R_1 \leftthreetimes \leftthreetimes T) \subset G$, где R_1 — подгруппа в R, также квазикристаллографическая.

Из теоремы Титса, утверждающей, что любая линейная группа, не являющаяся квазиразрешимой (т. е. не содержащая разрешимую подгруппу конечного индекса), содержит свободную подгруппу с двумя образующими (и, следовательно, содержит свободную подгруппу с бесконечным числом образующих), следует, что задача построения бесконечно порожденной n-мерной квазикристаллографической группы сводится к задаче построения подгруппы $R \subset O(n)$, которая а) не является квазиразрешимой; б) переводит в себя некоторую квазирешетку $T \subset \mathbf{R}^n$. Под квазирешеткой здесь понимается конечно порожденная подгруппа в $\mathbf{R}^n$.

Примером подгруппы $R \subset SO(3)$, обладающей этими свойствами, является образ группы $\widetilde{R} \subset SU(2) \subset \mathbf{H}$ при стандартном накрытии $SU(2) \to SO(3)$, где группа $\widetilde{R}$ задается двумя образующими $\varphi_1 = a_1 + ib_1$; $\varphi_2 = a_2 + jb_2$; a_1, a_2, b_1, b_2 — вещественные числа; $a_1 = \sqrt{2} - 1$; $a_2 = 2a_1$.

П р и м е р трехмерной квазикристаллографической группы, не лежащей ни в какой конечно порожденной квазикристаллографической группе (Г. А. Маргулис). Пусть $R \subset O(3)$ — свободная группа с бесконечным числом образующих $\{g_i\}$, сохраняющая некоторую квазирешетку $T \subset \mathbf{R}^3$ (существование такой подгруппы было показано выше); $e \in \mathbf{R}^3$ — произвольный вектор; $\{a_i\}$ — последовательность алгебраически независимых над $\mathbf{Q}$ вещественных чисел. Тогда подгруппа $G \subset E_3$, порожденная T и элементами $\{a_i e \circ g_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ является квазикристаллографической группой, не лежащей ни в какой конечно порожденной линейной группе, и, следовательно, не лежащей ни в какой конечно порожденной квазикристаллографической группе.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произвольный элемент $g \in G$ может быть записан в виде $g = (a_{i_1} e \circ g_{i_1})^{n_1} \circ \ldots \circ (a_{i_k} e \circ g_{i_k})^{n_k} \circ t$, где $t \in T$; g является трансляцией тогда и только тогда, когда его линейная часть $g' = (g_{i_1})^{n_1} \circ \ldots \circ (g_{i_k})^{n_k}$ есть тождественный оператор. Так как R — свободная группа, отсюда следует, что в этом случае $g = t \in T$. Таким образом, элемент $g \in G$ является трансляцией тогда и только тогда, когда $g \in T$, т. е. G — квазикристаллографическая группа.

Для того чтобы доказать, что G не лежит ни в какой конечно порожденной линейной группе, заметим, что поле, порожденное матричными элементами стандартного представления $G \to E_3 \to \to GL(4, \mathbf{R})$ содержит числа a_i (здесь предполагается, что e взят за один из базисных векторов в $\mathbf{R}^3$). В то же время поле, порожденное матричными элементами представления любой конечно порожденной группы и, следовательно, любой линейной группы, лежащей в некоторой конечно порожденной, является конечно порожденным расширением поля $\mathbf{Q}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 1. *Группа линейных частей R произвольной k-мерной квазикристаллографической группы G лежит в группе линейных частей некоторой конечно порожденной квазикристаллографической группы $\tilde{G}$.*

Доказательство. Пусть $T = \mathbf{Z}^n$ — подгруппа трансляций G. Определим группу $\tilde{R}$ как максимальную подгруппу в $O(k)$, сохраняющую квазирешетку T. Очевидно, что $R \subset \tilde{R}$ и группа $\tilde{G} = \tilde{R} \leftthreetimes T$ — квазикристаллографическая. Группу $\tilde{R}$ можно охарактеризовать, как подгруппу в $GL(n, \mathbf{Z})$, сохраняющую билинейную форму B: $T \times T \to \mathbf{R}$, являющуюся ограничением на $T \times T$ скалярного произведения в $\mathbf{R}^k$. Образ билинейной формы B есть конечно порожденная подгруппа в $\mathbf{R}$ ранга $s \leqslant n^2$. Следовательно, $\tilde{R}$ есть подгруппа в $GL(n, \mathbf{Z})$, сохраняющая s целочисленных билинейных форм, т. е. $\tilde{R}$ — алгебраическая группа над кольцом $\mathbf{Z}$. Но существует теорема [2, с. 18], утверждающая, что любая такая группа конечно порождена, откуда следует, что $\tilde{G}$ конечно порождена, что завершает доказательство теоремы 1.

§ 2. Абстрактное строение физических квазикристаллографических групп. Согласно одному из эквивалентных определений, квазикристаллографическая группа G является физической тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторой кристаллографической группе. Все n-мерные кристаллографические группы при фиксированном n однозначно с точностью до аффинной эквивалентности (а значит, и до изоморфизма) характеризуются следующими инвариантами: а) конечной подгруппой $R \subset O(n)$; б) классом эквивалентных точных n-мерных целочисленных представлений R с точностью до действия группы $\mathrm{Aut}(R)$ на множестве классов эквивалентных представлений; в) классом когомологий $x \in H^2_\rho(R, T)$ с точностью до действия нормализатора группы R в группе автоморфизмов T, причем нулевому классу когомологий отвечает группа G, распадающаяся в полупрямое произведение $R \leftthreetimes T$.

Здесь T — подгруппа трансляций в G; ρ: $R \to GL(n, \mathbf{Z})$ — факторизация присоединенного действия группы G на квазирешетке T по подгруппе $T \subset G$, лежащей в ядре этого действия. Доказательство этих фактов можно найти в [3, с. 185—187].

Наша задача выделить из класса n-мерных (при всех n) кристаллографических групп подкласс, состоящий из групп, которые могут быть реализованы k-мерными (при фиксированном k) квазикристаллографическими группами.

Группа R (фактор G по подгруппе трансляций T) может быть любой конечной подгруппой в $O(k)$. В физически интересных случаях $k=2$ и $k=3$ все такие группы перечислены [4, ч. I, § 20].

Пусть представление ρ' группы R допустимо (т. е. существует k-мерная квазикристаллографическая группа G, для которой класс представления ρ' совпадает с инвариантом ρ), которые мы в дальнейшем не будем различать. Это значит, что в $\mathbf{R}^k$ существует R-инвариантная квазирешетка T ранга n, ограничение на которую стандартного k-мерного представления φ группы R совпадает с представлением ρ. Отсюда вытекает, что любая кристаллографическая группа с инвариантом ρ и любым инвариантом $x \in H^2_\rho(R, T)$ лежит в $(R \leftthreetimes T \otimes \mathbf{Q}) \subset E_k$, т. е. реализуется k-мерной квазикристаллографической группой и задача сводится к выделению из всех целочисленных представлений группы R класса допустимых.

Пусть $\rho\colon R \to GL(n, \mathbf{Z})$ — целочисленное представление группы R; $\rho = \bigoplus_{i=1}^{s} \rho_i$ — разложение ρ на неприводимые над $\mathbf{Q}$ компоненты; $\rho_i = \bigoplus_{j=1}^{r_i} \rho_{ij}$ — разложение ρ_i на неприводимые над $\mathbf{R}$ компоненты. Пусть также $\varphi = \bigoplus_{u=1}^{l} \varphi_u$ — разложение φ на неприводимые над $\mathbf{R}$ компоненты.

ТЕОРЕМА 2. *Представление ρ допустимо тогда и только тогда, когда для каждого ρ_i найдется такой номер $j = 1, \ldots, r_i$, что представления ρ_{ij} и φ_u (при некотором u) эквивалентны, и φ является подпредставлением ρ, рассматриваемого, как вещественное представление. Если φ неприводимо, последнее условие можно откинуть.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $T \subset \mathbf{R}^k$ — подгруппа трансляций квазикристаллографической группы $G = R \leftthreetimes T$; $p\colon T \otimes \mathbf{R} \to \mathbf{R}^k$ — естественная проекция, тождественная на $T \otimes \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^k$. Тогда $\rho = \varphi \oplus \rho \mid \ker p$ и последнее условие выполнено.

Рассмотрим ограничение проекции p на подпространство $\mathscr{V}_i \otimes \mathbf{R} \subset T \otimes \mathbf{R}$, где $\mathscr{V}_i \subset T \otimes \mathbf{Q}$ — пространство представления ρ_i. Аналогично получаем, что $\rho_i = \varphi \mid \overline{\mathscr{V}_i} \oplus \rho_i \mid \ker p$, где черта означает замыкание в $\mathbf{R}^k$, и мы немедленно получаем утверждение теоремы.

б) Достаточность. Очевидно, что допустимость представления ρ равносильна существованию вложения $T \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{R}^k$ такого, что ограничение φ на $T \otimes \mathbf{Q}$ совпадает с ρ и $T \otimes \mathbf{Q}$ плотно в $\mathbf{R}^k$.

Пусть представление ρ удовлетворяет условиям теоремы. Это значит, что существует морфизм представлений $\psi\colon T \otimes \mathbf{R} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i \otimes \mathbf{R} \to \mathbf{R}^k$ такой, что а) ψ является эпиморфизмом; б) $\psi \mid \mathscr{V}_i \otimes \mathbf{R} \neq 0$ (здесь $\mathscr{V}_i$ — пространство представления ρ_i, рассматриваемого, как рациональное. Из условия а) следует, что

$\psi(T \otimes \mathbf{Q})$ плотно в $\mathbf{R}^k$. Осталось доказать, что $\psi|_{T\otimes\mathbf{Q}}$ — вложение при подходящем выборе морфизма ψ.

Из условия б) и неприводимости ρ_i следует, что $\mathscr{V}_i \cap \ker\psi = 0$, откуда получаем, что $\psi \mid \mathscr{V}_i$ — вложение. В выборе морфизма ψ: $(\bigoplus_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i \otimes \mathbf{R}) \to \mathbf{R}^k$ имеется произвол: мы можем умножать морфизм $\psi \mid \mathscr{V}_i \otimes \mathbf{R}$ на вещественную константу $\alpha_i \neq 0$. Мы хотим доказать, что можно подобрать числа α_i так, чтобы $\psi \mid T \otimes \mathbf{Q}$ было вложением. Для этого нам понадобится

ЛЕММА 1. *Пусть $\mathscr{W}_1$ и $\mathscr{W}_2$ — конечномерные рациональные подпространства в $\mathbf{R}^k$. Тогда множество $\mathscr{M}$ всех вещественных чисел α таких, что $\mathscr{W}_1 \cap (\alpha\mathscr{W}_2) \neq 0$, не более, чем счетно.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathscr{M}$. Тогда существуют векторы $x \in \mathscr{W}_1$ и $y \in \mathscr{W}_2$, пропорциональные с коэффициентом α, т. е. $\mathscr{M}$ совпадает с множеством коэффициентов пропорциональности всевозможных пар (x, y), где $x \in \mathscr{W}_1$; $y \in \mathscr{W}_2$, которое не более, чем счетно, так как множество $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ счетно. Лемма доказана.

Докажем индукцией по j $(1 \leqslant j \leqslant s)$, что можно так подобрать числа α_i $(1 \leqslant i \leqslant j)$, чтобы $\psi \mid \bigoplus_{i=1}^{j} \mathscr{V}_i$ было вложением. Основание индукции $j = 1$ уже доказано. Для доказательства индуктивного перехода применим лемму 1, положив $\mathscr{W}_1 = \bigoplus_{i=1}^{j-1} \mathscr{V}_i$; $\mathscr{W}_2 = \mathscr{V}_j$. При $j = s$ мы получим, что $\psi|_{T\otimes\mathbf{Q}}$ — вложение, что завершает доказательство теоремы 2.

§ 3. Классификация допустимых представлений в некоторых частных случаях.

1) $k = 2$; $R = \mathbf{Z}_m$. Этот случай разобран в [1]. Представление ρ является допустимым тогда и только тогда, когда оно реализуется в проективном $\mathbf{Z}_{[\sqrt[m]{1}]}$-модуле со стандартным действием группы $\mathbf{Z}_m$.

2) $k = 2$; $R = \mathscr{D}_m$; $m \neq 2^s$. Представление ρ является допустимым тогда и только тогда, когда оно реализуется в проективном $\mathbf{Z}_{[\sqrt[m]{1}]}$-модуле $A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$, где A_i — инвариантные относительно инволюции идеалы кольца $\mathbf{Z}_{[\sqrt[m]{1}]}$; действие $\mathbf{Z}_m$ стандартное; образующая $a \in \mathscr{D}_m \setminus \mathbf{Z}_m$ переходит при представлении ρ в инволюцию. Полной системой инвариантов представления ρ являются а) ранг модуля A над кольцом $\mathbf{Z}_{[\sqrt[m]{1}]}$; б) класс идеалов $\prod_{i=1}^{r} A_i$ с точностью до вещественной эквивалентности. В случае простого m все такие модули классифицированы [5].

3) $k = 2$; $R = \mathscr{D}_2 = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$. Представление ρ является допустимым тогда и только тогда, когда в его разложении на неразложимые над $\mathbf{Z}$ компоненты встречаются только представле-

ния ρ_1; ρ_2; ρ_3, причем кратности вхождений представлений ρ_1 и ρ_2 в ρ совпадают. Здесь $\rho_1(a) = 1$; $\rho_1(b) = -1$; $\rho_2 = -\rho_1$; $\rho_3(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\rho_3(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; a и b — образующие в $\mathscr{D}_2$, соответствующие отражениям от различных осей в $\mathbf{R}^2$.

4) $k = 3$; $R = \mathbf{Z}_2$; ρ является допустимым тогда и только тогда, когда: ρ нетривиально и $\dim\rho \geqslant 3$. Напомним, что существуют три различных неразложимых представления $\mathbf{Z}_2$: $\rho_1(a) = 1$; $\rho_2(a) = -1$; $\rho_3(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; разложение на неразложимые компоненты однозначно (здесь a — образующая в $\mathbf{Z}_2$).

5) $k = 3$; $R = \mathbf{Z}_p$; p — простое, нечетное. Целочисленные представления этой группы описаны в [6, с. 471]. Пользуясь обозначениями [6], сформулируем результат: представление ρ допустимо тогда и только тогда, когда среди его неразложимых компонент встречаются или тривиальное представление $\oplus$ представление типа A; или представление типа $(A,\ a_0)$.

6) $k = 3$; $R = \mathscr{D}_p$; p — простое, нечетное. Целочисленные представления этой группы описаны в [5]. Пользуясь обозначениями [5], сформулируем результат: представление ρ допустимо тогда и только тогда, когда а) среди его неразложимых компонент встречаются только $4h + 2$ из $7h + 3$ различных, где h — число классов идеалов в $\mathbf{Z}_{[\theta+\bar\theta]}$: $\rho_{1i} = A_i$; $\rho_{2i} = A_i'$; $\rho_{3i} = \begin{pmatrix} A_i' & F \\ 0 & S \end{pmatrix}$; $\rho_{4i} = \begin{pmatrix} A_i & F \\ 0 & S' \end{pmatrix}$; $\rho_5 = S$; $\rho_6 = S'$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$; б) представления ρ_{3i} и ρ_{4j}; ρ_5 и ρ_6; ρ_{3i} и ρ_6; ρ_{4i} и ρ_5 не могут входить в ρ одновременно; в) $\dim\rho \geqslant 3$; г) в ρ не могут входить только S и S', что эквивалентно точности ρ.

Классы идеалов кольца $\mathbf{Z}_{[\theta+\bar\theta]}$, где $\theta = \sqrt[p]{1}$ описаны в [7, с. 41—42] и в [8, с. 399] (см. дальнейшие ссылки там же). При $p < 50$ $h = 1$.

7) $k = 3$; $R = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$. Представление ρ является допустимым тогда и только тогда, когда а) среди его неразложимых компонент встречаются только представления ρ_1; ρ_2; ρ_3 из случая 3); представления $\rho_4, \ldots, \rho_{11}$, где $\rho_4(a) = \rho_4(b) = -1$;

$$\rho_5(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \rho_5(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\rho_6 = -\rho_5; \quad \rho_7(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_7(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\rho_8 = -\rho_7; \quad \rho_9(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_9(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\rho_{10} = -\rho_9; \quad \rho_{11} = 1;$$

б) $\dim \rho \geqslant 3$; в) если в представление ρ входят ρ_4 или ρ_{11}, то ρ изоморфно $\rho_4 \oplus \ldots \oplus \rho_4 \oplus \rho'$ или $\rho_{11} \oplus \ldots \oplus \rho_{11} \oplus \rho'$ соответственно, где ρ' — представление, являющееся допустимым при $k = 2$; г) представления ρ_5, ρ_7 и ρ_9 не могут входить в ρ одновременно с представлениями ρ_6, ρ_8 и ρ_{10}.

Целочисленные представления группы $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ классифицированы в [9].

8) $k = 3$; $R = A_4$. Согласно теореме 2 ρ допустимо тогда и только тогда, когда среди его неприводимых над $\mathbf{Q}$ компонент встречаются трехмерные (все они изоморфны).

Целочисленные представления группы A_4 с этим свойством классифицированы в [10]. Неразложимых представлений такого вида существует 6, из них 3 трехмерных и 3 шестимерных.

9) $k = 3$; $R = A_5$. Среди рациональных неприводимых представлений группы A_5 условиям теоремы 2 удовлетворяет ровно одно шестимерное, изоморфное (как вещественное представление) сумме стандартного трехмерного представления A_5, реализованной, как группа вращений додекаэдра, и представления, полученного из него при помощи внешнего автоморфизма A_5 [11, с. 71].

Таким образом, задача сводится к отысканию всех инвариантных решеток в пространстве $\mathscr{W} = \mathscr{V} \oplus \ldots \oplus \mathscr{V}$, где $\mathscr{V}$ — пространство описанного выше шестимерного рационального представления.

10) $k = 3$; $R = S_4$. Группа S_4 имеет два трехмерных вещественных представления [4, 11]. Оба они неприводимы и реализуются над $\mathbf{Q}$. Согласно теореме 2 задача сводится к отысканию инвариантных решеток в пространствах $\mathscr{W}_i = \mathscr{V}_i \oplus \ldots \oplus \mathscr{V}_i$, где $\mathscr{V}_i$ $(i = 1, 2)$ — рациональные трехмерные пространства этих представлений.

11) $k = 3$; $R = R_1 \times \mathbf{Z}_2$, где R_1 — конечная подгруппа $SO(3)$, не совпадающая с $\{1\}$ или с $\mathbf{Z}_2$. Тогда представление ρ допустимо тогда и только тогда, когда ограничение представления ρ на подгруппу R_1 допустимо и $\rho(1 \times a) = -\mathbf{1}$, где a — образующая в $\mathbf{Z}_2$.

12) Неразобранными остались случаи $k = 3$; $R = \mathbf{Z}_m$; m — не простое; $R = \mathscr{D}_m$, m — не простое; $k = 2$; $R = \mathscr{D}_{2^s}$. Не до конца разобраны случаи $k = 3$; $R = S_4$ и $R = A_5$. Обширная библиография о целочисленных представлениях конечных групп, из которой можно извлечь часть интересующей нас информации, содержится в [5, 6].

Вне нашего рассмотрения остался вопрос вычисления групп $H_\rho(R, T)$ и действия на них нормализатора R в $\operatorname{Aut}(T)$.

§ 4. Некоторые примеры.

1) Интересными примерами k-мерных квазикристаллографических групп являются подгруппы в $E_k(K) = O(k, K) \times K^k$, пересечение которых с подгруппой трансляций $K^k \subset E_k(K)$ совпадает с $\mathscr{R}^k$, где $K \subset \mathbf{R}$ — конечное расширение поля рациональных чисел; $\mathscr{R}$ — кольцо целых элементов поля K.

Наиболее важным частным случаем таких групп являются группы изометрий проективных $\mathscr{R}$-модулей ранга k.

2) Общим видом двумерной квазикристаллографической группы без несобственных движений является группа G с подгруппой трансляций T — проективным $\mathbf{Z}_{[\theta_1, \ldots, \theta_n, \theta]}$-модулем, где $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — целые алгебраические числа, по модулю равные единице; $\theta = \sqrt[m]{1}$; и фактором по подгруппе трансляций $\mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}_m$; образующие группы $\mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}_m$ действуют на T, как умножения на $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и θ соответственно.

Случай двумерной квазикристаллографической группы с несобственными движениями получается незначительным усложнением приведенной конструкции (введением инволюции в T).

В заключение автор благодарит С. П. Новикова и Э. Б. Винберга за внимание к работе и Г. А. Маргулиса за предоставление примера трехмерной квазикристаллографической группы, не лежащей ни в какой конечно порожденной квазикристаллографической группе.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
20.10.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пиунихин С. А. О квазикристаллографических группах в смысле Новикова // Математические заметки. 1990. Т. 47, вып. 5. С. 81—87.
[2] Платонов В. П. Алгебраические группы // Алгебра. Топология. Геометрия. Итоги науки. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1974. С. 5—36.
[3] Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. Т. 29. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 147—259.
[4] Дубровин Б. В., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
[5] Lee M. P. Integral representations of dihedral groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 110. P. 213—231.
[6] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.
[7] Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. М.: Мир, 1974.
[8] Боревич Э. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
[9] Назарова Л. А. Целочисленные представления четверной группы // ДАН СССР. 1961. Т. 140. С. 1011—1014.
[10] Назарова Л. А. Целочисленные представления знакопеременной группы четвертой степени // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15. С. 437—444.
[11] Винберг Э. Б. Линейные представления групп. М.: Наука, 1985.