М. С. Агранович, Г. В. Розенблюм, Спектральные граничные задачи для системы Дирака с сингулярным потенциалом, *Алгебра и анализ*, 2004, том 16, выпуск 1, 33–69

Алгебра и анализ
Том 16 (2004), вып. 1

Посвящается Михаилу Шлемовичу Бирману
в связи с его 75-летием

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© М. С. АГРАНОВИЧ, Г. В. РОЗЕНБЛЮМ

Введение. Постановка задач

Запишем свободный оператор Дирака в $\mathbb{R}^3$ в виде

$$\mathcal{D} = \sum_1^3 \alpha_j D_j + \beta. \tag{1}$$

Здесь $D_j = -i\partial_j = -i\partial/\partial x_j$, α_j — 4×4-эрмитовы матрицы

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где σ_j — матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а $\beta = \alpha_4$ — диагональная 4×4-матрица с главной диагональю $(1, 1, -1, -1)$. Эти матрицы имеют собственные значения ± 1 и связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &\sigma_l \sigma_k = -\sigma_k \sigma_l \ (l \neq k), \quad \sigma_l^2 = I_2; \\ &\alpha_l \alpha_k = -\alpha_k \alpha_l \ (l \neq k), \quad \alpha_l^2 = I_4; \end{aligned} \tag{4}$$

здесь и дальше I_m — единичная $m \times m$-матрица. Вектор-функцию $w(x)$, на которую будет действовать оператор $\mathcal{D}$, запишем в виде

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 01-01-00284 и грантом Шведского Совета по научным исследованиям.

Положим еще

$$\sigma(\xi) = \sum_{1}^{3} \xi_j \sigma_j. \tag{5}$$

Квадрат этой матрицы — матрица $|\xi|^2 I_2$. Запись системы Дирака в виде (1) используется в [1] и многих статьях из нашего списка литературы.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, которую для простоты предположим бесконечно гладкой. Через $\nu = \nu(x)$ обозначим единичную внешнюю нормаль в точке $x \in \Gamma$. Рассмотрим граничную задачу с двумя числовыми вещественными параметрами λ и μ:

$$(\mathcal{D} + V)w(x) - \lambda w(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{6}$$

$$Bu := i\sigma(\nu(x))v^+(x) - \mu u^+(x) = g(x) \quad (x \in \Gamma), \tag{7}$$

где верхние плюсы обозначают граничные значения функций. Через $V(x)$ обозначен эрмитов потенциал, имеющий, вообще говоря, кулоновскую особенность в начале координат, которое мы будем считать лежащим в Ω. В простейшем случае эта особенность имеет вид $\theta/|x|$, где θ — вещественное число. Потенциал получается прибавлением к этой дроби функции, гладкой в $\overline{\Omega}$. Именно с вхождением в систему кулоновской особенности связаны многочисленные аналитические трудности, преодолеваемые в работе. В общем случае потенциал может быть матричной функцией, подчиненной некоторым неравенствам и добавочным ограничениям.

Система (6) отвечает, например, электрону в поле точечного ядра. Задача (6), (7) поставлена физиками (см. [2] и указанные там ссылки). Но граничное условие не имеет физического смысла и ставится в вычислительных целях. А именно, область Ω рассматривается как „черный ящик", и предполагается выяснять, что происходит на его границе. Более точно, пусть значения параметров λ и μ таковы, что задача однозначно разрешима, и пусть $f = 0$. Требуется найти u^+ по g. Оператор, переводящий g в u^+, называется *R-матрицей*. Если u^+ найдено и μ отлично от 0, что также предполагается, то v^+ также определяется из граничного условия (7), так что становятся известными данные Коши решения. Для однородной системы Дирака эти внутренние данные Коши равны внешним, и последние заменяют систему в Ω при рассмотрениях во внешней области $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$.

Для построения R-матрицы физики предлагают два спектральных подхода. Положим $f = 0$, $g = 0$. Тогда получаются две спектральные задачи:

I. Задача со спектральным параметром λ при фиксированном μ.

II. Задача со спектральным параметром μ при фиксированном λ.

Эти подходы состоят в использовании разложений по собственным функциям соответственно задач I и II.

Цель настоящей работы состоит в исследовании спектральных свойств обеих задач и выяснении возможностей их математически корректного использования для построения R-матрицы. Задачи I и II рассматриваются соответственно в главах I и II.

Об этих задачах, R-матрице и двух подходах к ее построению мы узнали от Р. Шмытковского, автора книги [2]. Приносим ему искреннюю благодарность за это, а также за консультации и обсуждение наших результатов.

Прежде чем перейти к их краткому описанию, сделаем два замечания.

Замечание 1. На первый взгляд, u^+ и v^+ „неравноправно" входят в граничное условие. На самом же деле их можно поменять местами, умножив граничное условие на $-i\sigma(\nu)/\mu$ и заменив μ параметром $\tilde{\mu} = -1/\mu$, ср. [2].

Замечание 2. В силу известного неравенства Харди

$$\int \frac{|h(x)|^2}{|x|^2}\,dx \leqslant 4\int |\nabla h|^2 dx \quad (h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)), \tag{8}$$

где h — скалярная функция (см., например, [3, гл. VI, §5]), оператор умножения на потенциал с кулоновской особенностью действует ограниченным образом из соболевского пространства $H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ в $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Действительно, функции из $H^1(\Omega)$ можно, как известно, продолжить до финитных функций из $H^1(\mathbb{R}^3)$, используя ограниченный оператор продолжения. Поэтому оператор $\mathcal{D} + V$ с кулоновским потенциалом всегда действует ограниченным образом из $H^1(\Omega)^4$ в $L_2(\Omega)^4$.

В значительной степени наше исследование опирается на тонкие результаты, известные для оператора Дирака с потенциалом типа кулоновского в $\mathbb{R}^3$. Но оно не сводится к использованию только этих результатов, нам приходится рассматривать специфические вопросы, начиная с определения и описания самосопряженных операторов, отвечающих задачам I и II, и заканчивая выяснением поведения их собственных значений.

Начнем с объяснения содержания главы I.

При отсутствии особенности, т. е. в случае гладкого потенциала V, задача (6), (7) с ненулевым вещественным μ эллиптична и, как легко проверяется интегрированием по частям, является формально самосопряженной (см. [4] [1]). Это сразу приводит к следующему описанию свойств первой спектральной задачи. Оператору $\mathcal{D}+V$ можно сопоставить самосопряженный оператор $(\mathcal{D}+V)_\Omega$ в $L_2(\Omega)^4$. Его область определения — подпространство $H^1(\Omega, B)^4$ соболевского L_2-пространства $H^1(\Omega)^4$, состоящее из функций, удовлетворяющих однородному граничному условию (7) с $g = 0$. Из этого подпространства оператор действует ограниченным образом в $L_2(\Omega)^4$. Этот оператор имеет дискретный спектр, ортонормированный базис из собственных функций в $L_2(\Omega)^4$ и правильную асимптотику собственных значений

$$\lambda_n = bn^{1/3} + O(1) \ (n \to \pm\infty), \quad b = \left(\frac{3\pi^2}{\operatorname{mes}\Omega}\right)^{1/3}. \tag{9}$$

Здесь положительные и отрицательные собственные значения считаются занумерованными в порядке неубывания с учетом кратностей. Оценка остатка оптимальна. Оператор не является полуограниченным, поэтому собственные значения имеют две предельные точки $\pm\infty$. Ортонормированный базис из собственных функций в $L_2(\Omega)^4$ остается безусловным базисом в $H^1(\Omega, B)^4$. (Базис называется безусловным, если остается базисом после любой перестановки его членов.)

По поводу формулы (9) сошлемся на общие результаты из [5, п. 6]. Имеется также другой способ вывода этой асимптотики, но без квалифицированной оценки остатка. При $V = 0$ он состоит в переходе к вариационной задаче для системы второго порядка $\mathcal{D}^2 w = \lambda \mathcal{D} w$ и использовании результатов из работы [6] для соответствующего отношения квадратичных форм сначала на $H^1(\Omega)^4$ и $H_0^1(\Omega)^4$, что отвечает вариационным

[1] Обозначения у нас несколько изменены по сравнению с [4].

задачам Неймана и Дирихле с однородными граничными условиями. В этих случаях получается одинаковая асимптотика, так что она распространяется и на нашу задачу. Младшие члены, возникающие из-за потенциала, не влияют на асимптотику.

В случае потенциала с особенностью мы уже не можем непосредственно пользоваться результатами теории эллиптических граничных задач.

Но в этом случае, начиная с 70-х годов, исследовалась проблема построения и описания самосопряженного оператора в $\mathbb{R}^3$, определяемого оператором Дирака с потенциалом, имеющим кулоновскую особенность. Историю этого вопроса и подробные ссылки см. в [7, гл. 4, с. 305–306]. Упомянем также обзор [8]. Если для простоты потенциал скалярный, то различают три случая:

1) $|\theta| < \sqrt{3}/2$,

2) $\sqrt{3}/2 \leqslant |\theta| < 1$,

3) $|\theta| \geqslant 1$.

Рост θ отвечает росту „атомного числа" ядра; в первом случае это атомные числа до 118, во втором — от 119 до 137. Эти случаи наиболее интересны в атомной физике. В первом из них доказывается существенная самосопряженность оператора Дирака на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$, т. е. самосопряженность замыкания этого оператора в $L^2(\mathbb{R}^3)^4$. Пусть потенциал для простоты финитный, тогда область определения этого замыкания — пространство $H^1(\mathbb{R}^3)^4$. Во втором случае бесконечно много самосопряженных расширений, но строится distinguished — выделенное самосопряженное расширение, отвечающее состояниям с конечной энергией. Область определения теперь состоит из таких функций w из $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)^4$, что $\varphi w \in H^1(\mathbb{R}^3)^4$, если φ — гладкая функция, равная 0 вблизи начала и ограниченная вместе с первыми производными. Причина скачкообразной потери гладкости возле особенности отчетливо видна в случае чисто кулоновского потенциала $V(x) = \theta/|x|$, если строить нужный оператор при помощи разделения переменных (на этом кратко остановимся в §5, где проведем разделение переменных для граничной задачи). В §1 и §2 мы полнее, чем здесь, опишем результаты, относящиеся к построению этого оператора, и будем на них существенно опираться.

В третьем случае, для больших атомных чисел, по-видимому, нет физических оснований выделять предпочтительное самосопряженное расширение. Более того, распространено мнение, что система Дирака не вполне адекватна физической ситуации с тяжелыми ядрами, хотя в литературе имеются публикации, относящиеся и к этому случаю.

В §1 и 2 мы сопоставим задаче (6), (7) с $g = 0$ самосопряженный оператор $(\mathcal{D} + V)_\Omega$ в $L_2(\Omega)^4$, опишем его область определения и действие на функции из нее и выясним спектральные свойства этого оператора. При этом случаи 1) и 2) будут рассмотрены соответственно в §1 и 2 и будет использована „*склейка*" результатов для системы Дирака с сингулярным потенциалом во всем пространстве и результатов для граничной задачи без особенностей.

Область определения этого оператора в первом случае — пространство $H^1(\Omega, B)^4$. Несколько сложнее второй случай, в котором область определения „хуже": функции из нее вблизи особенности принадлежат лишь $H^{1/2}$, так что требуется специальное определение нормы в этой области определения, чтобы получить утверждение об ограниченности прямого и обратного оператора (вне спектра). По существу это *норма графика* оператора.

В обоих случаях спектр нашего оператора оказывается дискретным. Собственные функции сохраняют свойство базисности в области определения оператора. Для собственных значений в §3 получается правильная асимптотика с теми же предельными точками $\pm\infty$ и той же постоянной b (но без квалифицированной оценки остатка).

Последнее, однако, не очень просто. Дело в том, что слагаемое с сингулярным потенциалом не является относительно компактным возмущением остальной части оператора. Это затруднение преодолевается переходом к рассмотрению разности резольвент возмущенного и невозмущенного оператора. При этом существенно используются результаты Ненчу [9]: абстрактная схема для неполуограниченных операторов с исследованием резольвенты и ее реализация в $\mathbb{R}^3$. Сначала мы показываем, что определенный у нас оператор, отвечающий задаче, тоже является реализацией абстрактной схемы Ненчу. Это обстоятельство интересно и само по себе. На заключительном этапе используются оценки спектра из работ [6, 10].

Основные результаты содержатся в теоремах 1.1, 2.5 и 3.1. Они охватывают некоторые ситуации с матричными потенциалами и распространяются на потенциалы с кулоновскими особенностями в нескольких точках.

В случае 3) мы лишь отметим возможность описания всех возможных самосопряженных операторов, отвечающих задаче в шаре в случае чисто кулоновского потенциала. См. §5.

Перейдем к содержанию главы II. В случае гладкого потенциала вторая спектральная задача рассмотрена в [4]. Уже в этом случае она необычна. Для упрощения обозначений примем, что $\lambda = 0$; но приходится предположить, что функции $V(x) \pm 1$ нигде не обращаются в нуль (ср. [11]). Тогда при помощи исключения из системы (6) v или u получаются сильно эллиптические 2×2-системы второго порядка в Ω. Предположим, что соответствующие задачи Дирихле однозначно разрешимы. Тогда, используя соответствующие операторы Пуассона, удается свести спектральную задачу II к спектральному уравнению в $L_2(\Gamma)^2$ относительно u^+ (или v^+) с некоторым псевдодифференциальным оператором первого порядка. Этот оператор оказывается *неэллиптическим, но обратимым на бесконечно гладких функциях*. Его неэллиптичность по существу связана с тем, что задача Дирихле для системы Дирака (с заданием только u^+ или только v^+) неэллиптична; ср. [11]. Далее, выясняется, что линейные комбинации этого оператора и обратного к нему с двумя ненулевыми коэффициентами эллиптичны. (В [4] рассмотрена только одна линейная комбинация и остался недосмотр в случае переменных коэффициентов.) Это приводит к утверждению о существовании гладкого ортонормированного базиса в $L_2(\Gamma)^2$ из частей u_n^+ собственных функций на Γ с *двумя* точками накопления собственных значений, 0 и ∞ (точнее, $+0$ и $-\infty$), что необычно. При этом указывается асимптотика обеих серий собственных значений с оценками остатка. Можно образовать базис и из нижних частей v_n^+ собственных функций. Базисность сохраняется во всех соболевских пространствах на Γ.

Мы распространяем этот результат на случай, когда потенциал имеет кулоновскую особенность, сразу с $0 < |\theta| < 1$. Для этого снова рассматриваем соответствующие системы второго порядка, но они теперь имеют *вырождение* в старшей части и *кулоновскую особенность* в младшем члене. Грубо говоря, это системы следующей структуры:

$$\nabla|x|\nabla u(x)+\frac{\theta^2}{|x|}u(x)=0. \tag{10}$$

С соответствующей вариационной задачей Дирихле удается „справиться" при помощи специальных аналогов неравенств Харди и Гординга. Для скалярной системы типа (10) нужный аналог неравенства Харди имеет вид

$$\int\frac{|h(x)|^2}{|x|}dx\leqslant\int|x||\nabla h(x)|^2dx\quad(h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)) \tag{11}$$

(см. [13]). Это неравенство можно также доказать, копируя стандартное доказательство неравенства (8) (см. [3]), но используя подстановку $w=rh$ вместо $w=r^{1/2}h$, где $r=|x|$.

Нам понадобится аналогичное неравенство с $\sigma(D)$ вместо ∇ (для двумерных вектор-функций), фактически содержащееся в [13], ср. также [12]. Спектральные результаты при условии разрешимости только что упомянутых задач Дирихле сохраняются без потерь. Они сформулированы в теореме 10.1.

В §4 и 11 мы обсуждаем спектральные способы построения R-матрицы для системы Дирака.

Отметим сначала, что в случае (скалярной) задачи для уравнения Шрёдингера

$$\Delta u+Vu-\lambda u=0 \text{ в } \Omega,\quad \partial_\nu u-\mu u=g \text{ на } \Gamma, \tag{12}$$

где ∂_ν — производная по нормали, если эта задача однозначно разрешима, R-матрицей называется оператор $g\mapsto u^+$. Этот оператор строится либо при помощи собственных функций в Ω задачи со спектральным параметром λ, либо при помощи собственных функций на Γ задачи со спектральным параметром μ; см. [2] и приведенные там ссылки. В атомной и молекулярной физике это понятие R-матрицы для уравнения Шрёдингера и спектральные способы ее построения, по-видимому, очень популярны. Их анализ математическими средствами проведен в [14, 15].

Понятие R-матрицы для системы Дирака и предложения использовать спектральные подходы для ее построения возникли по естественной аналогии (см. снова [2] и приведенные там ссылки). Нам не удается обосновать подход с использованием собственных функций задачи I, но мы предлагаем удовлетворительную, с нашей точки зрения, регуляризацию соответствующего ряда. Что же касается подхода с использованием собственных функций задачи II, то он допускает полное и удобное обоснование. По-видимому, первой физической работой в последнем направлении была статья [16] (см. также [2] и приведенные там ссылки).

Заканчивая это введение, мы хотели бы отметить постоянное благотворное влияние на нашу математическую деятельность замечательных исследований, идей и результатов М. Ш. Бирмана. В связи с его юбилейным днем рождения желаем ему здоровья и счастливого продолжения его творчества на многие годы.

Договоримся отождествлять функции, определенные в Ω и равные нулю вблизи Γ, с функциями на $\mathbb{R}^3$, получаемыми из исходных продолжением нулем вне Ω.

Через O_ε обозначается открытый шар радиуса ε с центром в начале. При достаточно малом ε его замыкание лежит в Ω, и тогда будем пользоваться обозначением $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\overline{O}_\varepsilon$. Положим также $\Omega_0=\Omega\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^3_0=\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$.

Положительные постоянные C_j не зависят от рассматриваемых функций и нумеруются, как правило, заново в каждом новом параграфе.

Глава I. ЗАДАЧА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В СИСТЕМЕ

§1. Случай кулоновской особенности с $|\theta| < \sqrt{3}/2$

В этом параграфе будем предполагать, что

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x); \tag{1.1}$$

здесь $V_1(x)$ — гладкая (класса C^1) в $\overline{\Omega}$ функция, а $V_0(x)$ — гладкая вне начала функция, равная 0 вблизи Γ и удовлетворяющая неравенству

$$|V_0(x)| \leqslant \frac{\theta}{|x|}, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1.2}$$

Обе функции могут быть эрмитовыми матрицами, тогда неравенство (1.2) (как и аналогичные неравенства ниже) относится к операторной норме матрицы, она равна максимальному модулю собственных значений. Дополнительно, как в [13], *предположим, что матрица $V_0(x)$ перестановочна с матрицей $x \cdot \alpha = \sum_1^3 x_j\alpha_j$.* Пусть $V(x)$ имеет такой же вид в $\mathbb{R}^3$ с финитными $V_j(x)$.

Условимся для краткости обозначать в этом и следующем параграфах соболевские пространства $H^s(\mathbb{R}^3)^4$ через H^s и, в частности, $L_2(\mathbb{R}^3)^4 = H^0(\mathbb{R}^3)^4$ через L_2 или H^0.

Оператор Дирака $(\mathcal{D} + V)_{\mathbb{R}^3}$ с таким потенциалом рассмотрен в работе Шминке [17] и более поздней работе Фогельзанга [13] соответственно в скалярном случае (при немного более общих, чем у нас, предположениях) и матричном случае. Они доказали существенную самосопряженность этого оператора в L_2 на $C_0^\infty(\mathbb{R}_0^3)^4$, обобщив результаты своих предшественников. Область определения соответствующего самосопряженного оператора, как мы уже отметили во Введении, — пространство H^1, если потенциал, например, финитен. Его поведение на бесконечности на самом деле не играет существенной роли для самосопряженности (см. [18] и приведенные там ссылки на работы Чернова и других авторов).

Напомним, что в граничной задаче (6), (7) число μ считается вещественным и ненулевым.

Теорема 1.1. *При указанных предположениях задаче* (6), (7) *с* $\lambda = 0$ *и* $g = 0$ *отвечает самосопряженный оператор в* $L_2(\Omega)^4$ *с областью определения* $H^1(\Omega, B)^4$. *Его спектр дискретен. В* $L_2(\Omega)^4$ *он имеет ортонормированный базис из собственных функций, остающийся безусловным базисом в* $H^1(\Omega, B)^4$.

Если $V(x)$ *при* $x \neq 0$ *и граница бесконечно гладкие, то собственные функции принадлежат* $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$.

Доказательство. Из замечания 2 во Введении следует, что оператор $(\mathcal{D} + V)_\Omega$, отвечающий рассматриваемой задаче, всегда действует ограниченным образом из $H^1(\Omega, B)^4$ в $H^0(\Omega)^4$. Мы сначала проверим его фредгольмовость при указанных в начале параграфа предположениях. Для этого выведем *априорную оценку* и построим *правый параметрикс* (ср., например, [19]).

Пусть φ_1 — (скалярная) функция из $C_0^\infty(\Omega)$, равная 1 в окрестности начала, и φ_2 — функция из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равная $1 - \varphi_1$. Еще две функции понадобятся немного позднее: функция ψ_1 из $C_0^\infty(\Omega)$, равная 1 в окрестности носителя $\operatorname{supp}\varphi_1$, и функция ψ_2 из

$C^\infty(\overline{\Omega})$, равная 1 в окрестности носителя $\operatorname{supp}\varphi_2$ и 0 в окрестности начала. Все эти функции предположим неотрицательными.

Будем сначала считать, что $V_1(x)=0$. Пусть w — функция из $H^1(\Omega,B)^4$.

Для функции $\varphi_1 w$, если рассматривать ее как финитную функцию на $\mathbb{R}^3$, справедливо следующее неравенство Фогельзанга [13]:

$$\|\varphi_1 w/|x|\|_{0,\mathbb{R}^3} \leqslant C_1\|(\mathcal{D}+V)(\varphi_1 w)\|_{0,\mathbb{R}^3}. \tag{1.3}$$

Точнее, такая оценка доказана на функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}_0^3)^4$, но они, как известно, плотны в $H^1(\mathbb{R}^3)^4$ (см., например, [7, с. 12]). Как следствие получается оценка

$$\|\mathcal{D}(\varphi_1 w)\|_{0,\mathbb{R}^3} \leqslant C_2\|(\mathcal{D}+V)(\varphi_1 w)\|_{0,\mathbb{R}^3}.$$

Отсюда в силу эллиптичности оператора $\mathcal{D}$ и ограниченности функции $\mathcal{D}\varphi_1$ следует, что

$$\|\varphi_1 w\|_{1,\Omega} \leqslant C_3\big[\|(\mathcal{D}+V)w\|_{0,\Omega}+\|w\|_{0,\Omega}\big]. \tag{1.4}$$

С другой стороны, в силу эллиптичности задачи без особенности

$$\|\varphi_2 w\|_{1,\Omega} \leqslant C_4\big[\|(\mathcal{D}+V)(\varphi_2 w)\|_{0,\Omega}+\|\varphi_2 w\|_{0,\Omega}\big],$$

так что

$$\|\varphi_2 w\|_{1,\Omega} \leqslant C_5\big[\|(\mathcal{D}+V)w\|_{0,\Omega}+\|w\|_{0,\Omega}\big]. \tag{1.5}$$

Из (1.4) и (1.5) получаем

$$\|w\|_{1,\Omega} \leqslant C_6\big[\|(\mathcal{D}+V)w\|_{0,\Omega}+\|w\|_{0,\Omega}\big]. \tag{1.6}$$

Это и есть нужная оценка. Разумеется, она распространяется на случай $V_1\neq 0$. Кроме того, к потенциалу V можно добавить isI_4, где s удобно считать вещественным.

Теперь построим правый параметрикс. Снова пусть сначала $V_1=0$.

Обозначим через R_1 оператор, обратный к $(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}+is_0I_4$ при каком-нибудь ненулевом вещественном s_0; он существует ввиду самосопряженности оператора $(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}$ и действует ограниченным образом из $L_2(\mathbb{R}^3)^4$ в $H^1(\mathbb{R}^3)^4$. Через R_2 обозначим оператор, действующий из $L_2(\Omega)^4$ в $H^1(\Omega,B)^4$ и обратный к оператору, отвечающему граничной задаче (6), (7) с $g=0$, потенциалом ψ_2V вместо V и добавлением is_0I_4 к нему; R_2 существует в силу самосопряженности аналогичного оператора с $s_0=0$. (Далее, I_4, как правило, опускаем.) Положим

$$R=\psi_1R_1(\varphi_1\cdot)+\psi_2R_2(\varphi_2\cdot). \tag{1.7}$$

Пусть f — функция из $L_2(\Omega)^4$. Функция $u=Rf$ удовлетворяет граничным условиям (7) с $g=0$, и

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}+V)_\Omega Rf &\\ =\psi_1&(\mathcal{D}+V+is_0-is_0)R_1(\varphi_1 f)+\psi_2(\mathcal{D}+V+is_0-is_0)R_2(\varphi_2 f)\\ &+\Big(\sum_1^3\alpha_jD_j\psi_1\Big)R_1(\varphi_1 f)+\Big(\sum_1^3\alpha_jD_j\psi_2\Big)R_2(\varphi_2 f).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$(\mathcal{D}+V)_\Omega Rf=f+Uf, \tag{1.8}$$

где U — ограниченный оператор из $L_2(\Omega)^4$ в $H^1(\Omega)^4$, следовательно, компактный оператор в $L_2(\Omega)^4$. Значит, оператор R — искомый правый параметрикс. Он же остается правым параметриксом, если добавить к V гладкую функцию и is (формулу для R при этом менять не нужно).

Итак, установлена фредгольмовость оператора $(\mathcal{D}+V)_\Omega$.

Перед потенциалом можно поставить множитель t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, все сохраняется. Так как индекс не меняется при непрерывных деформациях, а при $t=0$ он очевидным образом равен нулю (как индекс формально самосопряженной эллиптической задачи), то он равен нулю и при $t=1$, т. е. для отвечающего нашей задаче оператора.

Этот оператор — симметрический. Нам осталось проверить, что он *самосопряженный*. Для этого достаточно, как известно, доказать, что при больших по модулю вещественных s для задачи с добавлением is к потенциалу имеет место единственность (тогда имеет место однозначная разрешимость при всех ненулевых вещественных s). Посмотрим еще раз на вывод априорной оценки. С учетом самосопряженности соответствующих операторов мы можем написать вместо (1.4) и (1.5) соответственно

$$|s|\|\varphi_1 w\|_{0,\Omega} \leqslant C_7\|(\mathcal{D}+V+is)(\varphi_1 w)\|_{0,\Omega} \tag{1.9}$$

и

$$|s|\|\varphi_2 w\|_{0,\Omega} \leqslant C_8\|(\mathcal{D}+V+is)(\varphi_2 w)\|_{0,\Omega}, \tag{1.10}$$

где постоянные не зависят от s. Конечно, отсюда получается оценка

$$|s|\|w\|_{0,\Omega} \leqslant C_9\|(\mathcal{D}+V+is)w\|_{0,\Omega} \tag{1.11}$$

при достаточно больших $|s|$, что и дает единственность.

Область определения $H^1(\Omega, B)^4$ оператора $(\mathcal{D}+V)_\Omega$ компактно вложена в $L_2(\Omega)^4$, поэтому его спектр дискретен.

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\lambda = 0$ — не точка спектра. Тогда наш оператор определяет непрерывный в обе стороны изоморфизм между $H^1(\Omega, B)^4$ и $L_2(\Omega)^4$. Поэтому ортонормированный базис из собственных функций в $L^2(\Omega)$ остается безусловным базисом в $H^1(\Omega, B)^4$.

Последнее утверждение теоремы вытекает из локальной теоремы о гладкости решений эллиптических задач. •

Из соображений интерполяции дополнительно получается, что при $0 < s < 1/2$ этот базис остается безусловным базисом в $H^s(\Omega)^4$, а при $1/2 < s < 1$ в $H^s(\Omega, B)^4$ — подпространстве в $H^s(\Omega)^4$, состоящем из функций, удовлетворяющих однородному граничному условию (7) (ср. [15]).

Отметим еще, что так как рассматриваемый оператор действует из $H^1(\Omega, B)^4$ в $H^0(\Omega)^4$, то автоматически получается правильная по порядку оценка модулей его собственных значений снизу (см., например, [19]).

В заключение отметим следующее. Линеал гладких функций w в $\overline{\Omega}$, равных нулю вблизи начала и удовлетворяющих граничному условию, плотен в $H^1(\Omega, B)^4$. Поэтому если оператор $(\mathcal{D}+V)_\Omega$ задать сначала на таких функциях, то он будет существенно самосопряженным. В этом отношении при условии (1.2) ситуация в Ω похожа на ситуацию в $\mathbb{R}^3$.

§2. Случай кулоновской особенности с $|\theta| < 1$

Теперь предположим, что $V(x)$ — матричный потенциал вида (1.1), где $V_1(x)$ — гладкая в $\overline{\Omega}$ матричная функция, а $V_0(x)$ равна 0 вблизи Γ, удовлетворяет неравенству

$$|V_0(x)| \leqslant \frac{\theta}{|x|} \quad \text{с } 0 < \theta < 1 \tag{2.1}$$

и является гладкой вне начала; при этом обе матрицы эрмитовы. Будем считать, что в $\mathbb{R}^3$ потенциал имеет тот же вид с финитными V_j. (Но в §3 мы увидим, что к нему можно добавить, по крайней мере, небольшую постоянную, и воспользуемся этим.)

2.1. Оператор Дирака с сингулярным потенциалом в $\mathbb{R}^3$. Оператор Дирака в $\mathbb{R}^3$ с потенциалом, имеющим кулоновскую особенность рассматриваемого сейчас вида, изучали, в частности, Ненчу [9], Вюст [20–22], Клаус-Вюст [23–24] и Шминке [25].

В [9] используются квадратичные и полуторалинейные формы, так что подход аналогичен классическому подходу к граничным задачам для сильно эллиптических систем второго порядка. Оператор $\mathcal{D}$ не полуограничен. Тем не менее Ненчу показывает, что сумма форм оператора $\mathcal{D}$ и оператора умножения на потенциал определяет самосопряженный оператор в L_2. Более точно:

Предложение 2.1. *Существует такой самосопряженный оператор $(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}$ в L_2 с областью определения $H_V = H_V(\mathbb{R}^3)^4$, содержащейся и плотной в пространстве $H^{1/2}$, что*

$$((\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}w_1, w_2)_{0,\mathbb{R}^3} = (\mathcal{D}w_1 + Vw_1, w_2)_{0,\mathbb{R}^3} \quad (w_1 \in H_V, w_2 \in H^{1/2}). \tag{2.2}$$

Этот оператор определен указанными условиями однозначно.

В формулировке у Ненчу вместо $H^{1/2}$ используется область определения оператора $|\mathcal{D}|^{1/2}$. Но

$$|\mathcal{D}|^{1/2} = (\mathcal{D}^2)^{1/4} = (I - \Delta)^{1/4} I_4,$$

так что $D(|\mathcal{D}|^{1/2})$ — это просто $H^{1/2}$.

Некоторые пояснения к тому, как получено предложение 2.1, приведены ниже в п. 2.3.

Замечание 2.2. Оператор $\mathcal{D}$, как эллиптический дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами и всюду невырожденным полным символом, изоморфно отображает H^s на H^{s-1} при любом s. Оператор (умножения на) V действует ограниченным образом из H^1 в H^0. По двойственности он действует ограниченным образом из H^0 в H^{-1} и в силу соображений интерполяции — из H^s в H^{s-1} при $0 \leqslant s \leqslant 1$.

В частности, операторы $\mathcal{D}$ и V действуют из $H^{1/2}$ в $H^{-1/2}$, так что правая часть в (2.2) заведомо имеет смысл как непрерывный антилинейный функционал над $H^{1/2}$ и справедлива формула

$$(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}w_1 = \mathcal{D}w_1 + Vw_1 \quad (w_1 \in H_V) \tag{2.3}$$

в смысле равенства в $H^{-1/2}$. Однако область определения оператора $(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}$ состоит из таких $w_1 \in H^{1/2}$, что правая часть в (2.2) непрерывна по w_2 на $H^{1/2}$ относительно нормы в L_2 и *сумма* справа в (2.3) принадлежит L_2.

Очевидно, что $H^{1/2} \subset H_V \subset H^1$. При предположениях предыдущего параграфа $H_V = H^1$.

Для удобства отметим несколько локальных свойств функций из H_V.

Предложение 2.3. 1. *Функция* $(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}w$, $w \in H_V$, *равна нулю вне носителя функции* w.

2. *В пространстве* H_V *возможно умножение на любую гладкую функцию* φ. *При этом справедлива „формула Лейбница“*

$$(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\varphi w) = \varphi(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}w + \varphi_1 w, \qquad \text{где } \varphi_1 = \mathcal{D}(\varphi I_4). \tag{2.4}$$

3. *Если* $w \in H_V$ *и* φ *— гладкая финитная функция, равная* 0 *в окрестности начала, то* $\varphi w \in H^1$. *В частности, если финитная функция* $w \in H_V$ *равна нулю в окрестности начала, то она принадлежит* H^1.

Доказательство. Утверждение 1 следует из формулы (2.3).

Проверим утверждение 2. Пусть $w_1 \in H_V$, так что форма $(\mathcal{D}w_1 + Vw_1, w_2)_0$ непрерывна по w_2 в норме L_2. Тогда, считая для простоты, что φ вещественна, имеем

$$(\mathcal{D}(\varphi w_1) + V\varphi w_1, w_2)_{0,\mathbb{R}^3} = (\mathcal{D}w_1 + Vw_1, \varphi w_2)_{0,\mathbb{R}^3} + (w_1, \varphi_1 w_2)_{0,\mathbb{R}^3}, \tag{2.5}$$

где $\varphi_1 = \mathcal{D}(\varphi I_4)$. Заметим, что первое слагаемое справа в (2.5) не превосходит по модулю $C_1\|\varphi w_2\|_{0,\mathbb{R}^3}$ и, значит, $C_2\|w_2\|_{0,\mathbb{R}^3}$. Конечно, последнее верно и для второго слагаемого. Значит, левая часть в (2.5) непрерывна по w_2 в норме L_2.

Формула (2.4) следует из формулы (2.5).

Проверим утверждение 3. Пусть ψ — финитная гладкая функция, равная 1 в окрестности носителя функции φ и нулю в окрестности начала. Из (2.3) с учетом (2.4) получаем

$$(\mathcal{D}+\psi V)(\varphi w) \in L_2$$

и применяем локальную теорему о повышении гладкости решений эллиптических систем. Получаем, что $\varphi w \in H^1$. •

Условие Ненчу $D((\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}) \subset D(|\mathcal{D}|^{1/2})$ означает конечность кинетической энергии. В работах Вюста [20–22] предложен другой подход к построению выделенного самосопряженного расширения оператора $\mathcal{D}+V$ — при помощи замены сингулярного потенциала V аппроксимирующими его „срезанными“ возле особенности потенциалами $V^{(t)}$, $t \to \infty$. Условие Ненчу заменено условием $D((\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}) \subset D(|x|^{-1/2})$, означающим конечность потенциальной энергии. Затем в работах Клауса–Вюста [23–24] показано, что эти два расширения совпадают и сходимость при аппроксимации имеет место в смысле сходимости резольвент по норме. Но в этих работах потенциал предполагается скалярным.

2.2. Оператор, отвечающий граничной задаче с сингулярным потенциалом. Перейдем к рассмотрению граничной задачи. Через $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, B)^4$ обозначим пространство функций, сужения которых на Ω_ε при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ принадлежат $H^1(\Omega_\varepsilon)^4$ и удовлетворяют граничному условию $Bu = 0$.

Оператор, отвечающий нашей задаче с особенностью, мы определим следующим образом, используя функции φ_1, φ_2 и ψ_2, введенные в доказательстве теоремы 1.1:

$$(\mathcal{D}+V)_\Omega = (\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\varphi_1\cdot)\big|_\Omega + (\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega(\varphi_2\cdot). \tag{2.6}$$

Справа оператор $(\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega$ отвечает эллиптической задаче без особенности, он действует из $H^1(\Omega,B)^4$ в $L_2(\Omega)^4$. Функцию ψ_2 можно свободно менять, она лишь должна равняться 1 в окрестности носителя функции φ_2 и нулю в окрестности начала.

Обозначим область определения оператора (2.6) через $H_V(\Omega,B)^4$. Она состоит из таких функций $w\in L_2(\Omega)^4$, что для любой функции φ из $C_0^\infty(\Omega)$ с носителем в окрестности начала произведение φw принадлежит $H_V(\mathbb{R}^3)^4$ и для любой функции φ из $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, равной 0 в окрестности начала и 1 вне большей окрестности, произведение φw принадлежит $H^1(\Omega,B)^4$.

Из (2.6) и (2.3) следует, что если $w\in H_V(\Omega,B)^4$, то

$$(\mathcal{D}+V)_\Omega w=\mathcal{D}w+Vw, \tag{2.7}$$

и здесь *сумма* справа принадлежит $H^0(\Omega)^4$.

Норму в пространстве $H_V(\Omega,B)^4$ определим равенством

$$\|w\|^2_{H_V(\Omega,B)^4}=\|(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\varphi_1 w)\|^2_{0,\Omega}+\|\varphi_2 w\|^2_{1,\Omega}+\|w\|^2_{0,\Omega}, \tag{2.8}$$

где φ_1 и φ_2 — те же функции, что и выше (на самом деле существенно только расположение их носителей и то, что их сумма превосходит всюду положительную постоянную). При помощи теоремы о локальной гладкости решений эллиптических задач получается, что функции из $H_V(\Omega,B)^4$ принадлежат пересечению $H^{1/2}(\Omega)^4\cap H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega,B)^4$.

Замечание 2.4. 1. При разных выборах разбиений единицы и функции ψ_2 определения оператора (2.6) эквивалентны.

2. Нормы, отвечающие разным разбиениям единицы, эквивалентны.

Действительно, отметим, прежде всего, что если φ — гладкая функция с носителем, лежащим внутри области $\Omega\setminus\{0\}$, то

$$(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\varphi\cdot)=(\mathcal{D}+\psi V)_\Omega(\varphi\cdot), \tag{2.9}$$

где ψ — другая гладкая функция с носителем внутри $\Omega\setminus\{0\}$, равная 1 в окрестности носителя функции φ.

Пусть теперь функции $\widetilde{\varphi}_j$, $j=1,2$, образуют второе разбиение единицы с такими же свойствами, как у φ_j, и $\widetilde{\psi}_2$ — гладкая функция в $\overline{\Omega}$, равная 1 в окрестности носителя функции $\widetilde{\varphi}_2$ и нулю в окрестности начала. Сравним два определения — с функциями φ_j, ψ_2 и с функциями $\widetilde{\varphi}_j$, $\widetilde{\psi}_2$. Не ограничивая общности, предположим, что $\psi_2=\widetilde{\psi}_2$. При определении (2.6) с функциями φ_j мы имеем с учетом предложения 2.3

$$(\mathcal{D}+V)_\Omega w=(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}((\widetilde{\varphi}_1+\widetilde{\varphi}_2)\varphi_1 w)\big|_\Omega+(\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega((\widetilde{\varphi}_1+\widetilde{\varphi}_2)\varphi_2 w).$$

Здесь в силу (2.9)

$$(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\widetilde{\varphi}_2\varphi_1 w)\big|_\Omega=(\mathcal{D}+V)_\Omega(\widetilde{\varphi}_2\varphi_1 w).$$

Поэтому

$$(\mathcal{D}+V)_\Omega w=(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\widetilde{\varphi}_1\varphi_1 w)\big|_\Omega+\sum_{\{i,j\}\neq\{1,1\}}(\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega(\widetilde{\varphi}_i\varphi_j w).$$

Такое же выражение получается, если исходить из определения с функциями $\widetilde{\varphi}_j$.

Теперь наметим проверку того, что норма (2.8) оценивается через аналогичную норму с функциями $\widetilde{\varphi}_j$. Имеем, например,

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\varphi_1 w)\|_{0,\Omega} \\
&\quad\leqslant \|(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\widetilde{\varphi}_1\varphi_1 w)\|_{0,\Omega} + \|(\mathcal{D}+V)(\widetilde{\varphi}_2\varphi_1 w)\|_{0,\Omega} \\
&\quad\leqslant \|\varphi_1(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\widetilde{\varphi}_1 w)\|_{0,\Omega} + \|(\mathcal{D}\varphi_1)(\widetilde{\varphi}_1 w)\|_{0,\Omega} + C_1\|\widetilde{\varphi}_2\varphi_1 w\|_{1,\Omega} \\
&\quad\leqslant C_2\big[\|(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\widetilde{\varphi}_1 w)\|_{0,\Omega} + \|\widetilde{\varphi}_2 w\|_{1,\Omega} + \|w\|_{0,\Omega}\big].
\end{aligned}$$

И т. д.

Пространство $H_V(\Omega, B)^4$ полно и, значит, гильбертово. (Скалярное произведение, отвечающее норме (2.8), выписывается очевидным образом.)

Это утверждение следует из полноты пространства $H_V(\mathbb{R}^3)^4$ с нормой графика оператора $(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}$.

Хотя мы не можем рассматривать задачу в обычных соболевских пространствах (в отличие от ситуации в предыдущем параграфе), мы ввели в области определения оператора, грубо говоря, норму его графика и можем использовать самосопряженность оператора в $\mathbb{R}^3$, а также оператора с потенциалом без особенности в Ω. Это приводит к нужному результату:

Теорема 2.5. *Оператор* (2.6) *является самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)^4$ с областью определения $H_V(\Omega, B)^4$. Он имеет дискретный спектр и ортонормированный в $L_2(\Omega)^4$ базис из собственных функций, остающийся безусловным базисом в $H_V(\Omega, B)^4$.*

Если $V(x)$ при $x \neq 0$ и граница Γ бесконечно гладкие, то собственные функции принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$.

Доказательство. Несложно проверяется, что оператор $(\mathcal{D}+V)_\Omega$ симметричен. Действительно, умножив (2.6) на $\varphi_1 + \varphi_2$, получаем сумму четырех операторов

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\varphi_1\cdot) + \varphi_2(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\varphi_1\cdot) \\
&\quad + \varphi_1(\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega(\varphi_2\cdot) + \varphi_2(\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega(\varphi_2\cdot),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где в первых двух слагаемых подразумеваются необходимые продолжения нулем вне Ω и сужения на Ω. 1-е и 4-е слагаемые — самосопряженные операторы соответственно ввиду самосопряженности оператора $(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}$ в $L_2(\mathbb{R}^3)^4$ и оператора $(\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega$ в $L_2(\Omega)^4$. Проверим, что 2-е и 3-е слагаемые формально (на функциях из $H^1(\Omega)^4$) сопряжены. Рассмотрим интеграл [2]

$$\int_\Omega \varphi_2(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\varphi_1 w_1)\cdot \overline{w}_2\,dx.$$

Так как подынтегральное выражение равно 0 вне $\operatorname{supp}\varphi_1$, то перед $\overline{w}_2$ можно вставить множитель ψ_1. После этого можно считать, что интеграл берется по $\mathbb{R}^3$. С учетом самосопряженности оператора $(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}$ получим

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi_1 w_1 \cdot \overline{(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}(\psi_1\varphi_2 w_2)}\,dx.$$

[2]В подобных местах стандартное скалярное произведение векторов w_1 и w_2 с комплексными компонентами мы записываем в виде $w_1\cdot\overline{w}_2$.

Так как $\operatorname{supp}\psi_1\varphi_2 \subset \Omega \setminus \{0\}$, то можно заменить $(\mathcal{D}+V)_{\mathbb{R}^3}$ на $(\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega$ и снова считать, что интеграл берется по Ω. Далее, функция $\mathcal{D}\psi_1$ равна нулю на $\operatorname{supp}\varphi_1$, поэтому ψ_1 можно вынести за знак оператора $(\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega$ и после этого опустить. Получим

$$\int_\Omega w_1 \cdot \overline{\varphi_1(\mathcal{D}+\psi_2 V)_\Omega(\varphi_2 w_2)}\, dx,$$

что и требовалось — здесь на w_2 действует 3-й оператор в (2.10).

Теперь проверяем, что $(\mathcal{D}+V)_\Omega$ является ограниченным фредгольмовым оператором из $H_V(\Omega,B)^4$ в $L_2(\Omega)^4$ с нулевым индексом.

Проверка аналогична проведенной в предыдущем параграфе. Прежде всего, заметим, что в силу определения (2.8) нормы в $H_V(\Omega,B)^4$ наш оператор автоматически оказывается ограниченным из $H_V(\Omega,B)^4$ в $L_2(\Omega)^4$.

Далее, проверяется априорная оценка

$$\|u\|_{H_V(\Omega,B)^4} \leqslant C_3\big[\|(\mathcal{D}+V)_\Omega u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega}\big]. \tag{2.11}$$

А именно пусть $w \in H_V(\Omega,B)^4$ и s_0 — вещественное ненулевое число. Тогда

$$\|\varphi_1 w\|_{H_V(\Omega,B)^4} \leqslant C_4\|(\mathcal{D}+V+is_0)_{\mathbb{R}^3}(\varphi_1 w)\|_{0,\Omega}$$

и

$$\|\varphi_2 w\|_{1,\Omega} \leqslant C_5\|(\mathcal{D}+\psi_2 V+is_0)_\Omega(\varphi_2 w)\|_{0,\Omega}$$

ввиду самосопряженности соответствующих операторов с $s_0=0$ соответственно в L_2^4 и $L_2(\Omega)^4$. Отсюда выводится (2.11).

Далее, эти операторы с вещественным $s_0 \neq 0$ имеют обратные R_1 и R_2, и правый параметрикс строится по формуле (1.7).

Таким образом, оператор $(\mathcal{D}+V)_\Omega$ фредгольмов. Вводя множитель t перед V, $0 \leqslant t \leqslant 1$, убеждаемся в том, что он имеет нулевой индекс.

При достаточно большом по модулю вещественном s_0 проверяется обратимость оператора $(\mathcal{D}+V+is_0)_\Omega$. Его спектр дискретен, так как обратный оператор действует из $L_2(\Omega)^4$ в $H^{1/2}(\Omega)^4$. Не ограничивая общности, можно принять, что обратимость имеет место при $s_0=0$, и тогда получается утверждение о безусловной базисности собственных функций в области определения. •

2.3. Абстрактная схема Ненчу. Итак, оператор $(\mathcal{D}+V)_\Omega$ построен, и теорема 2.5 доказана. Теперь мы кратко обсудим абстрактную схему в [9]. Как уже упоминалось, там она использована для исследования оператора Дирака с сингулярным потенциалом в $\mathbb{R}^3$ и получен приведенный выше результат (см. предложение 2.1), а мы в следующем параграфе покажем, что она позволяет вторым способом определить наш оператор $(\mathcal{D}+V)_\Omega$. Эта схема содержит важную формулу для резольвенты исследуемого оператора (см. ниже (2.21)).

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, A и V — самосопряженные операторы в H с областями определения $D(A)$ и $D(V)$. Предположим[3], что оператор $|A|$ положительно определен, $D(V) \supset D(A)$ и справедливо неравенство

$$\||V|f\| \leqslant C\||A|f\| \quad (f \in D(|A|)) \tag{2.12}$$

[3]Для упрощения изложения мы несколько сужаем общность по сравнению с [9].

($D(|A|)$ совпадает, конечно, с $D(A)$). Тогда в силу теоремы Хайнца (см., например, [26, §12]) $D(|V|^{1/2}) \supset D(|A|^{1/2})$ и

$$\||V|^{1/2}f\| \leqslant C\||A|^{1/2}f\| \quad (f \in D(|A|^{1/2})). \tag{2.13}$$

Запишем полярные разложения операторов A и V в виде $A = T|A|$, $V = S|V|$, где $Tf = f$, если $Af = 0$, и $Sf = f$, если $Vf = 0$. Полуторалинейные формы операторов A и V имеют вид

$$\begin{aligned} h_A[f,g] &= (|A|^{1/2}f, T|A|^{1/2}g), \\ h_V[f,g] &= (|V|^{1/2}f, S|V|^{1/2}g). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Они обе определены на $D(|A|^{1/2})$, и в силу (2.13) справедливо неравенство

$$|h_V[f,f]| \leqslant C\||A|^{1/2}f\|^2 \quad (f \in D(|A|^{1/2}). \tag{2.15}$$

Пусть еще W — ограниченный оператор в H и оператор $W|A|^{-1/2}$ компактен. Сейчас мы сформулируем условия, при которых существует единственный оператор B с областью определения $D(B) \subset D(|A|^{1/2})$ такой, что

$$(Bf,g) = h_A[f,g] + h_V[f,g] + h_W[f,g] \;\; (f \in D(B), \quad g \in D(|A|^{1/2})). \tag{2.16}$$

Для этого предположим, что $z \notin \sigma(A)$ (т.е. z не принадлежит спектру оператора A), и рассмотрим оператор

$$M(z) = |V|^{1/2}(A-z)^{-1}|V|^{1/2}. \tag{2.17}$$

Этот оператор первоначально определен на $D(|V|^{1/2})$, но ограничен и допускает ограниченное продолжение на H, которое строится по формуле

$$M(z) = \{|V|^{1/2}|A|^{-1/2}\}\{|A|(A-z)^{-1}\}\{(|V|^{1/2}|A|^{-1/2})^*\}. \tag{2.18}$$

Отсюда также видно, что $M(z)$ аналитически зависит от z. Предположим, что

$$\|M(z_0)\| < 1 \quad \text{при некотором } z_0 \notin \sigma(A), \tag{2.19}$$

так что оператор $I + SM(z)$ обратим при $z = z_0$. Далее, предположим, что оператор

$$|V|^{1/2}(A-z_0)^{-1}(A-z)^{-1}|V|^{1/2} \text{ продолжается до компактного при } z \notin \sigma(A). \tag{2.20}$$

Предложение 2.6. *При указанных условиях* (*включая* (2.12), (2.19), (2.20)) *существует единственный самосопряженный оператор B с областью определения $D(B) \subset D(A)$, для которого справедливо соотношение* (2.16).

Это утверждение содержится в следствии 2.1 в [9]. Там в приложении последнего к ситуации в $\mathbb{R}^3$ роль оператора A играет свободный оператор Дирака, V — это оператор умножения на сингулярную часть потенциала и W — оператор умножения на его гладкую часть, а B — полный оператор Дирака с потенциалом, состоящим из сингулярной и гладкой части. Мы покажем в следующем параграфе, что наш оператор $(\mathcal{D} + V)_\Omega$ получается аналогичным образом, если под A понимать оператор $(\mathcal{D})_\Omega$, отвечающий свободной системе Дирака в Ω, в случае, когда он имеет ограниченный обратный, или оператор $(\mathcal{D} + c)_\Omega$ с небольшой вещественной постоянной, которая добавляется для обратимости. Доказательство будет опираться на конкретные результаты в [9] для оператора Дирака в $\mathbb{R}^3$.

Следующие результаты из [9] будут нам особенно нужны.

Предложение 2.7. 1. *При тех же предположениях $(I + SM(z))^{-1}$ — мероморфная функция от z вне $\sigma(A)$, следовательно, она существует в $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ по крайней мере вне множества, которое не имеет точек накопления в $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$.*

2. *Если $z \notin \sigma(A)$ и оператор $I + SM(z)$ обратим, то $z \notin \sigma(B)$ и справедлива следующая формула для разности резольвент операторов B и A:*

$$\begin{aligned}&(B-z)^{-1} - (A-z)^{-1}\\ &= -(|V|^{-1/2}(A-\bar{z})^{-1})^*(I + SM(z))^{-1}S|V|^{1/2}(A-z)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

У нашего оператора $A = (\mathcal{D} + V)_\Omega$ спектр дискретен, так что мы сможем пользоваться этой формулой при почти всех вещественных z.

§3. Асимптотика собственных значений

Здесь основная цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.1. *При предположениях, сделанных в §2, для собственных значений спектральной задачи* I *имеет место формула*

$$\lambda_n = bn^{1/3} + o(|n|^{1/3}) \ (n \to \pm\infty), \quad \text{где } b = \left(\frac{3\pi^2}{\operatorname{mes}\Omega}\right)^{1/3}. \tag{3.1}$$

Ключевым местом в доказательстве будет использование формулы типа (2.21) для разности резольвент операторов, отвечающих нашей задаче с сингулярным потенциалом и без него. Сначала в п. 3.1–3.4 проверим, что наш оператор $(\mathcal{D}+V)_\Omega$ получается также по схеме Ненчу (см. п. 2.3) и удовлетворяет предположениям, при которых справедлива эта формула.

3.1. Обозначения. В этом параграфе будет удобно несколько изменить обозначения. Рассмотрим задачу

$$(\mathcal{D} + c)w = f \ (x \in \Omega), \quad Bw = 0 \ (x \in \Gamma). \tag{3.2}$$

Здесь мы положим $c = 0$, если при $c = 0$ эта задача однозначно разрешима; в противном случае мы зафиксируем малое по модулю вещественное c, при котором она однозначно разрешима. Насколько оно должно быть малым, выяснится дальше; в частности, мы принимаем, что $|c| < 1$. Через L_0 обозначим соответствующий оператор в $L_2(\Omega)^4$. Вместо $\mathcal{D} + c$ будем писать $\mathcal{D}_c$; это же обозначение будет использоваться для соответствующего оператора в $L_2(\mathbb{R}^3)^4$. Потенциал V будем прибавлять к $\mathcal{D}_c$. Мы будем считать его удовлетворяющим неравенству (2.1) с $\theta < 1$, равным нулю вблизи границы и продолженным нулем вне Ω. Этим общность доказательства не ограничивается, так как гладкое в $\overline{\Omega}$ слагаемое не влияет на асимптотику. Суммарный потенциал, вообще говоря, не финитен, но он равен постоянной c в окрестности бесконечности. Через L обозначим оператор в $L_2(\Omega)^4$, отвечающий исследуемой нами задаче

$$(\mathcal{D}_c + V)w = f \ (x \in \Omega), \quad Bw = 0 \ (x \in \Gamma). \tag{3.3}$$

Обозначим через P оператор сужения функций, определенных в $\mathbb{R}^3$, на Ω и через P^* оператор продолжения функций, определенных в Ω, на $\mathbb{R}^3$ нулем вне Ω (в предыдущем тексте эти операторы присутствовали неявно). Пусть $V = S|V|$ — полярное разложение матрицы V.

3.2. Область определения оператора $|L_0|^{1/2}$ и ограниченность формы оператора V на ней. В силу неравенства Харди (8) и априорной оценки для однозначно разрешимой эллиптической задачи (3.2)

$$\|Vw\|_{0,\Omega} \leqslant C_1\|L_0w\|_{0,\Omega} \tag{3.4}$$

на функциях w из $H^1(\Omega, B)^4$. Это неравенство сохраняется для оператора $|V|$ вместо V и оператора $|L_0|$ вместо L_0 (ср. с (2.12)).

Обозначим через $H_{1/2} = H^{1/2}(\Omega, B)^4$ область определения оператора $|L_0|^{1/2}$. Ее стандартное описание состоит в следующем: если $\{w_j\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в $L_2(\Omega)^4$ из собственных функций оператора L_0 и λ_j — соответствующие собственные значения, то принадлежность функции $w = \sum c_j(w)w_j$ из $L_2(\Omega)^4$ пространству $H_{1/2}$ равносильна конечности нормы в нем, определяемой равенством

$$\|w\|_{1/2}^2 = \||L_0|^{1/2}w\|_{0,\Omega}^2 = \sum |\lambda_j||c_j(w)|^2. \tag{3.5}$$

Немного ниже мы увидим, что $H_{1/2}$ — линеал в соболевском пространстве $H^{1/2}(\Omega)^4$, и опишем этот линеал.

В силу теоремы Хайнца оператор $|V|^{1/2}$ определен на этом пространстве и на нем

$$\||V|^{1/2}w\|_{0,\Omega} \leqslant C_2\|w\|_{1/2} \tag{3.6}$$

(ср. с (2.13)). На этом же пространстве определена полуторалинейная форма оператора V

$$h_V[w_1, w_2] = \left(|V|^{1/2}w_1, S|V|^{1/2}w_2\right)_{0,\Omega}, \tag{3.7}$$

и мы видим, что она ограничена на нем:

$$|h_V[w, w]| \leqslant C_3\|w\|_{1/2}^2 \tag{3.8}$$

(ср. с (2.15)).

Вернемся к пространству $H_{1/2}$. Оно включено в гильбертову шкалу пространств H_ϑ — областей определения операторов $|L_0|^\vartheta$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. Эта шкала совпадает с интерполяционной шкалой как для вещественного, так и для комплексного метода интерполяции с точностью до эквивалентности норм (см. [4] [27, п. 1.18.10, замечание 3]). Вещественный и комплексный способы интерполяции подпространств соболевских пространств, выделяемых граничными условиями, изучены соответственно в работах Гривара [28] и Сили [29]. Из их результатов следует, что $H_{1/2}$ — *линеал в пространстве $H^{1/2}(\Omega)^4$, выделяемый граничным условием $Bu = 0$ в следующем обобщенном смысле.* 1) *Пусть $\rho(x)$ — положительная непрерывная функция на $\overline{\Omega}$, равная расстоянию от точки x до границы Γ вблизи границы. Тогда функция $\rho^{-1/2}(x)Bw(x)$ принадлежит $L_2(\Omega)^4$.* 2) *Продолжение функции $Bw(x)$ нулем вне Ω принадлежит $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)^4$.* Эквивалентность двух таких условий непосредственно проверена в книге [30, п. 3.6].

Следует, однако, отметить, что эти детали в отношении смысла граничного условия в конечном счете для нас несущественны, так как функции из области определения нашего оператора принадлежат $H^1(\Omega_\varepsilon, B)^4$ при любом $\varepsilon > 0$, так что граничное условие удовлетворяется в обычном смысле следов функций из $H^1(\Omega)$.

[4]Авторы благодарны В. И. Овчинникову за эту ссылку.

3.3. Оператор $M(z)$ и обратимость оператора $I+SM(z)$ при $z=is$ с большим s. Напомним, что L_0 — самосопряженный оператор с дискретным спектром. Определим оператор $M(z)$ вне этого спектра формулой

$$M(z) = |V|^{1/2}(L_0 - z)^{-1}|V|^{1/2} \tag{3.9}$$

(ср. с (2.17)). Априори он определен на $H^{1/2}(\Omega)^4$, но допускает продолжение до ограниченного оператора на $H^0(\Omega)^4$ по формуле

$$M(z) = \{|V|^{1/2}|L_0|^{-1/2}\}\{|L_0|(L_0 - z)^{-1}\}\{(|V|^{1/2}|L_0|^{-1/2})^*\} \tag{3.10}$$

(ср. с (2.18)).

Предложение 3.2. *Норма оператора $M(z)$ меньше 1 при $z = is$ с достаточно большим по модулю вещественным s, так что оператор $I + SM(z)$ обратим при этих z.*

Этот факт мы выведем из аналогичного факта, установленного в [9] для операторов в $\mathbb{R}^3$, поэтому нам понадобятся вспомогательные операторы

$$\begin{aligned} M_1(z) &= |V|^{1/2}P(\mathcal{D}_c - z)^{-1}P^*|V|^{1/2}, \\ M_2(z) &= |V|^{1/2}(\mathcal{D}_c - z)^{-1}|V|^{1/2}, \\ M_3(z) &= |V|^{1/2}(\mathcal{D} - z)^{-1}|V|^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Первый из этих операторов определен на функциях в Ω из области определения оператора $|V|^{1/2}$, второй и третий - на функциях в $\mathbb{R}^3$ из области определения в сущности того же оператора. Но мы сейчас увидим, что $M_1(z)$ продолжается до ограниченного оператора в $L_2(\Omega)^4$, а $M_2(z)$ и $M_3(z)$ - в $L_2(\mathbb{R}^3)^4$. Как функции от z, $M_1(z)$ и $M_2(z)$ определены для z вне спектра $\sigma(\mathcal{D}_c)$ и $M_3(z)$ - вне $\sigma(\mathcal{D})$, в частности, при невещественных z, но все они вместе определены также и на некотором интервале вещественной оси, так как спектр оператора $\mathcal{D}$ не содержит точек интервала $(-1,1)$ [7, п. 1.4.4], а точку c мы считаем лежащей на нем.

Операторы $M_2(z)$ и $M_3(z)$ продолжаются до ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^3)^4$, например, в силу замечания 2.2. В определении оператора $M_1(z)$ можно P и P^* переставить с $|V|^{1/2}$, и нетрудно видеть, что

$$\|M_1(z)\| \leqslant \|M_2(z)\|. \tag{3.12}$$

Из результатов в [9] (см. там п. 5) следует, что при наших предположениях о потенциале

$$\|M_3(is)\| \leqslant b_1 < 1, \quad s \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

(см. также [24]). Мы сейчас проверим, что то же верно для оператора $M_2(is)$ при достаточно малом c. Для этого рассмотрим разность

$$\begin{aligned} &M_3(is) - M_2(is) \\ &= |V|^{1/2}\big[(\mathcal{D} - is)^{-1} - (\mathcal{D} + c - is)^{-1}\big]|V|^{1/2} \\ &= c\big\{|V|^{1/2}|\mathcal{D}|^{-1/2}\big\}\big\{|\mathcal{D}|(\mathcal{D} - is)^{-1}\big\}\big\{(\mathcal{D} + c - is)^{-1}\big\}\big\{(|V|^{1/2}|\mathcal{D}|^{-1/2})^*\big\} \\ &= T_1\, T_2(s)\, T_3(c,s)\, T_4. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь операторы T_1 и T_4 ограничены. Равномерная по s ограниченность оператора $T_2(s)$ и равномерная по c, $|c| \leqslant 1/2$, и s ограниченность оператора $T_3(c,s)$ проверяются при помощи спектральной теоремы (они являются функциями от самосопряженного оператора $\mathcal{D}$, равномерно ограниченными на его спектре) или переходом к преобразованиям Фурье. Таким образом, норма оператора (3.14) равномерно стремится к нулю при $c \to 0$.

Будем теперь считать c выбранным так, что

$$\|M_2(is)\| \leqslant b_2 < 1 \tag{3.15}$$

например, с постоянной $b_2 = (1 + b_1)/2$.

Для доказательства предложения 3.2 осталось проверить следующее предложение.

Предложение 3.3. *Норма оператора $M(z) - M_1(z)$ в $H^0(\Omega)^4$ стремится к нулю при $z = is$, $s \to \pm\infty$.*

Доказательство. Пусть $f_1, f_2 \in L_2(\Omega)^4 = H^0(\Omega)^4$. Рассмотрим полуторалинейную форму оператора $(L_0 - z)^{-1} - P(\mathcal{D}_c - z)^{-1}P^*$. Ее можно записать в виде

$$h(f_1, f_2) = (f_1, (L_0 - \bar{z})^{-1} f_2)_{0,\Omega} - ((\mathcal{D}_c - z)^{-1} P^* f_1, P^* f_2)_{0,\mathbb{R}^3}. \tag{3.16}$$

Положим

$$w_1 = (\mathcal{D}_c - z)^{-1} P^* f_1, \quad w_2 = (L_0 - \bar{z})^{-1} f_2. \tag{3.17}$$

Теперь эта форма принимает вид

$$(P(\mathcal{D}_c - z)w_1, w_2)_{0,\Omega} - (Pw_1, (\mathcal{D}_c - \bar{z})w_2)_{0,\Omega}, \tag{3.18}$$

где $\mathcal{D}_c$ понимается (только в этой формуле) как дифференциальный оператор в Ω. При помощи интегрирования по частям получаем, что

$$h(f_1, f_2) = (\Phi\gamma w_1, \gamma w_2)_{0,\Gamma}, \tag{3.19}$$

где γ — оператор сужения на границу и Φ — некоторая гладкая матрица на Γ. Перепишем эту формулу в виде

$$\begin{aligned} h(f_1, f_2) &= (\Phi\gamma P(\mathcal{D}_c - z)^{-1} P^* f_1, \gamma(L_0 - \bar{z})^{-1} f_2)_{0,\Gamma} \\ &= \big((\gamma(L_0 - \bar{z})^{-1})^* \Phi\gamma P(\mathcal{D}_c - z)^{-1} P^* f_1, f_2\big)_{0,\Omega}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь $\gamma(L_0 - \bar{z})^{-1}$ — оператор, действующий ограниченным образом из $H^0(\Omega)^4$ в $H^{1/2}(\Gamma)^4$ и, значит, в $H^0(\Gamma)^4$; сопряженный оператор $(\gamma(L_0 - \bar{z})^{-1})^*$ действует ограниченным образом по крайней мере из $H^0(\Gamma)^4$ в $H^0(\Omega)^4$.

Следовательно,

$$(L_0 - z)^{-1} - P(\mathcal{D}_c - z)^{-1} P^* = (\gamma(L_0 - \bar{z})^{-1})^* \Phi\gamma P(\mathcal{D}_c - z)^{-1} P^*. \tag{3.21}$$

Подобный способ представления разности резольвент двух операторов с разными областями определения предложен М. Ш. Бирманом в [31]. Из (3.9), (3.11) и (3.21) следует, что

$$M(z) - M_1(z) = T_1(z) T_2(z), \tag{3.22}$$

где

$$\begin{aligned} T_1(z) &= |V|^{1/2} (\gamma(L_0 - \bar{z})^{-1})^*, \\ T_2(z) &= \Phi\gamma P(\mathcal{D}_c - z)^{-1} P^* |V|^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Второй из этих двух операторов переводит функции в Ω в функции на Γ, первый — функции на Γ в функции в Ω.

Проверим, что оператор $T_1(z)$ продолжается до ограниченного оператора из $H^0(\Omega)^4$ в $H^0(\Gamma)^4$ при $z = is$ с вещественным s равномерно по s. Пусть ψ — такая скалярная функция из $C_0^\infty(\Omega)$, что $\psi V = V$. Отсюда следует, что $(\psi-1)V = 0$, $(\psi-1)|V|^{1/2} = 0$, так что $\psi|V|^{1/2} = |V|^{1/2}$.

Имеем (g — функция на Γ, f — функция в Ω):

$$\begin{aligned}&(\psi(\gamma(L_0-\bar{z})^{-1})^* g, f)_{0,\Omega}\\ &= (g, \gamma(L_0-\bar{z})^{-1}\psi f)_{0,\Gamma} = ((\gamma(L_0-\bar{z})^{-1}\psi\cdot)^* g, f)_{0,\Omega},\end{aligned}$$

так что

$$T_1(z) = |V|^{1/2}(\gamma(L_0-\bar{z})^{-1}\psi\cdot)^*.$$

Прокоммутируем здесь оператор $(L_0-\bar{z})^{-1}$ и оператор умножения на ψ и воспользуемся тем, что $\gamma\psi\cdot = 0$. Получим

$$T_1(z) = |V|^{1/2}(\gamma(L_0-\bar{z})^{-1}[\psi, \mathcal{D}]^*(L_0-\bar{z})^{-1})^*.$$

Имеем

$$\begin{aligned}&((\gamma(L_0-\bar{z})^{-1}[\psi,\mathcal{D}](L_0-\bar{z})^{-1})^* g, f)_{0,\Omega}\\ &= (g, \gamma(L_0-\bar{z})^{-1}[\psi,\mathcal{D}](L_0-\bar{z})^{-1} f)_{0,\Gamma}\\ &= ((\gamma(L_0-\bar{z})^{-1})^* g, [\psi,\mathcal{D}](L_0-\bar{z})^{-1} f)_{0,\Omega}\\ &= ((L_0-z)^{-1}[\psi,\mathcal{D}]^*(\gamma(L_0-\bar{z}))^{-1})^* g, f)_{0,\Omega}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$T_1(z) = \{|V|^{1/2}(L_0-z)^{-1}\}\{[\psi,\mathcal{D}]^*\}\{(\gamma(L_0-\bar{z})^{-1})^* g\}.$$

Здесь средний множитель — не зависящая от z гладкая функция. Левый множитель можно записать в виде

$$\{|V|^{1/2}|L_0|^{-1/2}\}\{|L_0|^{1/2}(L_0-is)^{-1}\},$$

ясно, что это равномерно по s ограниченный оператор. Наконец,

$$\gamma(L_0-\bar{z})^{-1} = \{\gamma L_0^{-1}\}\{L_0(L_0+is)^{-1}\},$$

и видно, что это равномерно ограниченный оператор из $H^0(\Omega)^4$ в $H^0(\Gamma)^4$, так что сопряженный оператор из $H^0(\Gamma)^4$ в $H^0(\Omega)^4$ тоже равномерно ограничен.

Проверим, что оператор $T_2(z)$ продолжается до ограниченного оператора из $H^0(\Omega)^4$ в $H^0(\Gamma)^4$ и его норма стремится к нулю при $z = is$, $s \to \pm\infty$. С той же функцией ψ, поскольку $\gamma\psi\cdot = 0$, имеем

$$T_2(z) = \Phi\gamma P[(\mathcal{D}_c - z)^{-1}, \psi]P^*|V|^{1/2}. \tag{3.24}$$

Перепишем эту формулу в виде

$$\begin{aligned}T_2(z) &= \Phi\gamma P(\mathcal{D}_c - z)^{-1}[\psi,\mathcal{D}](\mathcal{D}_c - z)^{-1}P^*|V|^{1/2}\\ &= \{\Phi\gamma P|\mathcal{D}|^{-1/2-\varepsilon}\}\{|\mathcal{D}|^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{D}_c - z)^{-1}\}\{[\psi,\mathcal{D}]\}\\ &\quad\times\{(\mathcal{D}_c - z)^{-1}|\mathcal{D}|^{1/2}\}\{(|V|^{1/2}|\mathcal{D}|^{-1/2})^* P^*\}\end{aligned}$$

с $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Здесь справа пятый сомножитель — ограниченный оператор из $H^0(\Omega)^4$ в $H^0(\mathbb{R}^3)$. Четвертый — ограниченный оператор в $H^0(\mathbb{R}^3)^4$ с нормой, стремящейся к нулю при $z = is$, $s \to \pm\infty$. Третий — ограниченный оператор в этом же пространстве, не зависящий от z. Второй — ограниченный оператор в этом пространстве с нормой, стремящейся к нулю. Первый — не зависящий от z ограниченный оператор из этого пространства в $H^0(\Gamma)^4$. •

3.4. Теперь рассмотрим оператор

$$|V|^{1/2}(L_0 - z_0)^{-1}(L_0 - z)^{-1}|V|^{1/2}$$

(ср. с (2.20)) в предположении, что z и z_0 не принадлежат спектру оператора L_0. *Этот оператор продолжается до компактного оператора в* $H^0(\Omega)^4$. Чтобы убедиться в этом, достаточно переписать его в виде

$$\{|V|^{1/2}|L_0|^{-1/2}\}\{|L_0|^{1/2}(L_0 - z_0)^{-1}\}\{|L_0|^{1/2}(L_0 - z)^{-1}\}\{(|V|^{1/2}|L_0|^{-1/2})^*\}.$$

Здесь компактны второй и третий сомножители.

3.5. Все это вместе позволяет воспользоваться результатами, сформулированными в п. 2.3.

В силу предложения 2.6 справедливо

Предложение 3.4. *Существует единственный самосопряженный оператор* $\widetilde{L}$ *в* $H^0(\Omega)^4$ *с* $D(\widetilde{L}) \subset D(|L_0|^{1/2}) = H_{1/2}$ *такой, что*

$$(\widetilde{L}w_1, w_2)_{0,\Omega} = h_{L_0}[w_1, w_2] + h_V[w_1, w_2], \quad w_1 \in D(\widetilde{L}), \ w_2 \in H_{1/2}. \tag{3.25}$$

Справа в этой формуле можно еще добавить форму опущенного нами оператора умножения на гладкую матрицу V_1.

Теорема 3.5. *Операторы* L *и* $\widetilde{L}$ *совпадают.*

Доказательство. Вернемся к определению оператора L. Области определения операторов L и L_0 — это $H_V(\Omega, B)^4$ и $H^1(\Omega, B)^4$. Конечно, первая содержит вторую. Пусть $w_1 \in H_V(\Omega, B)^4$. Тогда $\varphi_1 w_1$ и $\varphi_2 w_1$ тоже принадлежат $H_V(\Omega, B)^4$ (см., в частности, предложение 2.3) и в силу формул (2.6) и (2.7)

$$\begin{aligned} Lw_1 &= (\mathcal{D} + (c + V))_{\mathbb{R}^3}(\varphi_1 w_1) + (\mathcal{D} + c + \psi_2 V)_\Omega(\varphi_2 w_1) \\ &= \mathcal{D}(\varphi_1 w_1) + (c + V)(\varphi_1 w_1) + \mathcal{D}(\varphi_2 w_1) + (c + V)(\varphi_2 w_1) \\ &= L_0 w_1 + V w_1. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Следовательно, для $w_2 \in H_{1/2}$

$$(Lw_1, w_2)_{0,\Omega} = ((L_0 + V)w_1, w_2)_{0,\Omega} = h_{L_0}[w_1, w_2] + h_V[w_1, w_2],$$

и оператор L совпадает с оператором $\widetilde{L}$ в силу единственности последнего. •

Из предложений 2.7 и 3.2 получаем

Предложение 3.6. 1. *Оператор* $(I + SM(z))^{-1}$ *— мероморфная операторнозначная функция вне спектра* $\sigma(L_0)$. *В частности, оператор* $I + SM(z)$ *имеет ограниченный обратный всюду вне* $\sigma(L_0)$ *за возможным исключением дискретного множества точек, которое не имеет точек накопления вне* $\sigma(L_0)$.

2. *Пусть* z *не принадлежит спектру* $\sigma(L_0)$ *и оператор* $I + SM(z)$ *обратим. Тогда* z *не принадлежит* $\sigma(L)$ *и справедлива формула*

$$\begin{aligned} &(L - z)^{-1} - (L_0 - z)^{-1} \\ &\quad = -(|V|^{1/2}(L_0 - \bar{z})^{-1})^*(1 + SM(z))^{-1}S|V|^{1/2}(L_0 - z)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

В частности, найдется вещественная точка $z = \lambda_0$, в которой эта формула верна.

Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим оператор $K = |V|^{1/2}(L_0-\lambda_0)^{-1}$ для этого λ_0. Спектр оператора K^*K совпадает со спектром вариационной задачи для отношения квадратичных форм $\|Kw\|^2_{0,\Omega}/\|w\|^2_{0,\Omega}$, $w \in L_2(\Omega)^4$. Положим $f = (L_0 - \lambda_0)^{-1}w$, это функция из $H^1(\Omega, B)^4$. Мы приходим к вариационной задаче для отношения

$$(|V|f, f)_{0,\Omega}/\|(L_0 - \lambda_0)f\|^2_{0,\Omega}. \tag{3.28}$$

Здесь знаменатель эквивалентен $\|f\|^2_{1,\Omega}$. Пространство $H^1(\Omega, B)^4$ содержится между пространствами $H^1_0(\Omega)^4$ и $H^1(\Omega)^4$. Если T — компактный оператор, то условимся обозначать через $s_j(T)$ его s-числа (сингулярные числа, см., например, [32, гл. II]). Как легко проверить, $|V| \in L_{3/2}(\Omega)$. Благодаря этому из теоремы 3.1 в [6] и теоремы 1 в [10] о собственных значениях вариационных граничных задач следует, что

$$s_j(K^*K) = O(j^{-2/3}),$$

так что

$$s_j(K) = O(j^{-1/3}). \tag{3.29}$$

Теперь воспользуемся неравенством Фань Цюя для s-чисел произведения компактных операторов T_1 и T_2,

$$s_{k+l-1}(T_1T_2) \leqslant s_k(T_1)s_l(T_2), \tag{3.30}$$

а также тем обстоятельством, что $s_j(BT) \leqslant \|B\|s_j(T)$, если T — компактный, а B — ограниченный оператор (см., например, [32]). Из формулы (3.27) видно, что разность операторов $(L - \lambda_0)^{-1}$ и $(L_0 - \lambda_0)^{-1}$ есть произведение K^*BK, где B — ограниченный оператор. Поэтому s-числа этой разности имеют оценку $O(j^{-2/3})$. Как следствие таким же образом оцениваются модули собственных значений этой разности. А так как собственные значения оператора $(L_0 - \lambda_0)^{-1}$ в силу (9) имеют асимптотику вида $b^{-1}j^{-1/3}$ $(j \to \pm\infty)$, то собственные значения оператора $(L - \lambda_0)^{-1}$ имеют ту же асимптотику в силу варианта теоремы Г. Вейля, предложенного Бирманом–Соломяком (см. в [6] лемму 1.5). Отсюда и следует утверждение теоремы 3.1. •

§4. Вычисление R-матрицы: первая формула

Опишем формальную процедуру построения R-матрицы при помощи собственных функций первой спектральной задачи. Рассмотрим задачу

$$(\mathcal{D} + V)w = \lambda w \text{ в } \Omega, \quad Bw = g \text{ на } \Gamma. \tag{4.1}$$

Пусть w — ее решение при некотором λ, отличном от собственных значений λ_n. Как всякую функцию из $L_2(\Omega)^4$, w можно разложить по ортонормированному базису $\{w_n\}_1^\infty$ из собственных функций:

$$w = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n w_n, \quad \text{где } c_n = (w, w_n)_\Omega. \tag{4.2}$$

Вычисление коэффициентов при помощи интегрирования по частям показывает, что

$$c_n = \frac{(g, u_n^+)_\Gamma}{\lambda_n - \lambda}. \tag{4.3}$$

Соответствующую выкладку приведем немного ниже. Получаем

$$w(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(g, u_n^+)_\Gamma}{\lambda_n - \lambda} w_n(x) \tag{4.4}$$

в $L_2(\Omega)^4$. Если бы в этом разложении можно было бы перейти на границу, то мы бы получили, в частности,

$$u^+(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(g, u_n^+)_\Gamma}{\lambda_n - \lambda} u_n^+(x). \tag{4.5}$$

Это и есть первая формула для R-матрицы — оператора перехода от g к u^+. В физической литературе вопрос о справедливости такого разложения остался, с нашей точки зрения, дискуссионным (ср. [2] и приведенные там ссылки). К сожалению, и мы ничего не можем сказать об этом ряде даже в случае гладкой g. Чтобы перейти на границу, надо рассматривать w и w_j как функции из $H^t(\Omega)$ с $t > 1/2$, но тогда после перехода на границу возникает противоречие, состоящее в том, что w_j удовлетворяют, а w не удовлетворяет однородному граничному условию.

Однако возможна следующая регуляризация этого ряда. Математически это очень простой ход — перевод неоднородности из граничного условия в уравнение. *Пусть $g \in H^{1/2}(\Gamma)^2$, и пусть $w_0(x)$ — функция из $H^1(\Omega)^4$ с нулевой верхней компонентой u_0, удовлетворяющая граничному условию* (7):

$$i\sigma(\nu)v_0^+(x) = g(x). \tag{4.6}$$

Если потенциал содержит особенность в начале координат, то дополнительно будем считать, что $v_0(x) = 0$ вблизи начала. Тогда $w - w_0$ — функция из области определения оператора, отвечающего спектральной задаче. Ее разложение по собственным функциям w_n сходится по крайней мере в $H^1(\Omega_\varepsilon)^4$, $\varepsilon > 0$, и допускает переход на границу. Получаем, в частности,

$$u^+(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(g, u_n^+)_\Gamma}{\lambda_n - \lambda} - (v_0, v_n)_\Omega \right] u_n^+(x). \tag{4.7}$$

Это разложение сходится в $H^{1/2}(\Gamma)^2$. Подчеркнем, что мы фактически вычли из ряда (4.4) ряд с нулевой суммой в Ω на уровне верхних компонент u.

При отсутствии особенности можно предположить немного бóльшую гладкость g и получить несколько улучшенную сходимость: при $g \in H^{1-\delta}(\Gamma)^2$ имеем сходимость в $H^{1-\delta}(\Gamma)^2$, здесь $\delta > 0$ сколь угодно малó.

Приведем теперь пропущенную выкладку. Имеем

$$\begin{aligned}((\mathcal{D} + V)w, w_n)_\Omega &= \lambda(w, w_n)_\Omega \\ &= i^{-1}[(\sigma(\nu)v^+, u_n^+)_\Gamma + (u^+, \sigma(\nu)v_n^+)_\Gamma] + (w, (\mathcal{D} + V)w_n)_\Omega \\ &= -\mu(u^+, u_n^+)_\Gamma - (g, u_n^+)_\Gamma + \mu(u^+, u_n^+)_\Gamma + \lambda_n(w, w_n)_\Omega,\end{aligned}$$

так что $(\lambda - \lambda_n)c_n = -(g, u_n)_\Gamma$, что и дает (4.3).

§5. Разделение переменных в уравнении Дирака со сферически симметричным потенциалом и случай кулоновской особенности с $|\theta| \geqslant 1$

В случае сферически симметричного потенциала и, в частности, чисто кулоновского потенциала хорошо известна методика разделения переменных в уравнении Дирака в $\mathbb{R}^3$ и исследования соответствующих уравнений первого порядка на луче. См. книгу Вайдмана [33] и многочисленные ссылки в ней на более ранние работы Реллиха, Вайдмана, Руса–Сангрена и других авторов. Р. Шмытковский обратил наше внимание на то, что для задачи в шаре с центром в начале при граничном условии (7) (с $g = 0$) разделение переменных тоже проходит. Здесь мы наметим переделку исследования в $\mathbb{R}^3$ на случай задачи в шаре. Обозначения у нас по сравнению с [33] немного изменены.

5.1. Пусть потенциал имеет вид $V = V(|x|)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{D}+V$ в единичном (для простоты) шаре $O_1 = \{x : |x| < 1\}$. Положим

$$\begin{aligned} r &= |x|, \\ \sigma_r &= r^{-1}\sum x_j\sigma_j, \\ U &= U(x) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_r \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Матрица $U(x)$ унитарна. По теореме I.A.2 из [33]

$$U^*\mathcal{D}U = \begin{pmatrix} 0 & -iI_2 \\ iI_2 & 0 \end{pmatrix} P_r + \frac{i}{r}\begin{pmatrix} 0 & iQ \\ iQ & 0 \end{pmatrix} + \beta + V(|x|), \tag{5.2}$$

где

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{r}\Big(\sum_1^3 x_jD_j - i\Big), \\ Q &= I_2 - i\sum_1^3 \sigma_j(x\times\nabla)_j. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Оператор Q называется в [33] полным угловым моментом. Его можно рассматривать как оператор на единичной сфере S^2 в $L_2(S^2)^2$. Это эллиптический оператор 1-го порядка с дискретным спектром, содержащимся в $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, — ср. с теоремой I.A.3 из [33]. Это видно из проверяемой в доказательстве формулы

$$(Q - \tfrac{1}{2}I_2)^2 = \tfrac{1}{4}I_2 - \mathcal{B}, \tag{5.4}$$

где $\mathcal{B}$ — оператор Лапласа–Бельтрами на S^2 с собственными значениями $l(l+1)$. Пусть K_l — соответствующее собственное $(4l+2)$-мерное подпространство в $L_2(S^2)^2$, натянутое на

$$\begin{pmatrix} Y_{l,j} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{l,j} \end{pmatrix}, \quad j = -l, -l+1, \ldots, l, \tag{5.5}$$

где $Y_{l,j}$ — полная ортонормированная система *сферических гармоник* порядка l. Это подпространство инвариантно относительно Q, и сужение Q_l этого оператора на K_l при $l \geqslant 1$ имеет собственные значения $l+1$ и $-l$. При $l = 0$ векторы из K_l постоянны и остается собственное значение 1.

Таким образом, Q имеет ортонормированную в $L_2(S^2)^2$ систему собственных функций

$$Z_{k,j} = \begin{pmatrix} z_{k,j,1} \\ z_{k,j,2} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, j(k), \tag{5.6}$$

отвечающих собственным значениям $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Здесь $j(k) = 2|k|$ [34].

Обозначим через $Y(r)$ столбец из двух скалярных функций $y_1(r)$ и $y_2(r)$ и определим изометрические операторы

$$W_{k,j} : L_2(0,1)^2 \to L_2(O_1)^4 \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ j = 1, \dots, j(k))$$

формулой

$$(W_{k,j}Y)(r\omega) = \begin{pmatrix} r^{-1}y_1(r)Z_{k,j}(\omega) \\ r^{-1}y_2(r)Z_{k,j}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{-1}y_1(r)z_{k,j,1}(\omega) \\ r^{-1}y_1(r)z_{k,j,2}(\omega) \\ r^{-1}y_2(r)z_{k,j,1}(\omega) \\ r^{-1}y_2(r)z_{k,j,2}(\omega) \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Тогда

$$L_2(O_1)^4 = \bigoplus_{k,j} H_{k,j}, \quad \text{где } H_{k,j} = W_{k,j}L_2(0,1)^2. \tag{5.8}$$

В итоге получается (ср. с теоремой 1.А.4 из [33]), что $\mathcal{D} + V$ — ортогональная сумма операторов

$$T_{k,j} = T_k = W^*_{k,j}U^*\mathcal{D}UW_{k,j} \tag{5.9}$$

в $L_2(0,1)^2$ с

$$T_kY(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'(r) \\ y_2'(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V(r)+1 & -kr^{-1} \\ -kr^{-1} & V(r)-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

5.2. Вернемся к нашей граничной задаче. Сделаем подстановку

$$w(x) = U(W_{k,j}Y)(r\omega) = r^{-1}UY(r)Z_{k,j}(\omega) \tag{5.11}$$

(см. (5.7)). Ясно, что на единичной сфере $\sigma(x) = \sigma_r$. Благодаря структуре нашего граничного условия (см. (7), $g = 0$) и матрицы U *переменные разделяются*, и мы приходим к задаче на интервале $(0,1)$

$$T_kY(r) = \lambda Y(r) \ (0 < r < 1), \quad y_2(1) = \mu y_1(1). \tag{5.12}$$

Чтобы построить самосопряженное расширение оператора, отвечающего исходной задаче в шаре, надо при каждом k построить самосопряженное расширение оператора, отвечающего задаче (5.12).

5.3. Пусть теперь $V(r) = \theta/r$. Построение самосопряженного оператора в $L_2(O_1)$, отвечающего задаче (5.12), определяется следущими обстоятельствами. В точке $r = 1$ имеет место случай предельного круга. Это означает, что при $0 < c < 1$ все решения уравнения

$$(T_k - \lambda)Y(r) = 0 \tag{5.13}$$

на $(c,1)$ принадлежат $L_2(c,1)^2$ при любом λ. В точке 0 имеет место или случай предельного круга, или случай предельной точки. Последнее означает, что при $0 < c < 1$ на $(0,c)$ имеется решение уравнения (5.13), не принадлежащее $L_2(0,c)^2$. Область определения соответствующего самосопряженного оператора состоит из таких принадлежащих $L_2(0,1)^2$ (абсолютно непрерывных) функций $Y(r)$, что $T_kY(r)$ принадлежит $L_2(0,1)^2$ и при этом в первом случае удовлетворяются одно граничное условие в точке 0 и одно в точке 1, а во втором случае — только одно граничное условие в точке 1. Условие в точке 1 нам уже продиктовано разделением переменных, это граничное условие в (5.12).

Вычисления показывают, что случай предельного круга в точке 0 имеет место тогда и только тогда, когда

$$k^2 < \theta^2 + \tfrac{1}{4}. \tag{5.14}$$

Так как k — целое ненулевое число, то при $|\theta| \leqslant \sqrt{3}/2$ условие (5.14) не выполняется ни при каком k. Значит, хватает граничного условия в точке 1. Это иллюстрация к построениям в §1. При $\sqrt{3}/2 < |\theta| < 1$ требуется одно дополнительное условие в точке 0 только при $k = \pm 1$. Это иллюстрация к построениям в §2. При этом видна существенность „рубежей“ $\sqrt{3}/2$ и 1 для $|\theta|$.

Если дальше увеличивать $|\theta|$, то один за другим появляются новые значения k, при которых нужно накладывать дополнительные условия в точке 0. Как это делается, можно посмотреть в работе [34]. Мы не будем на этом останавливаться, хотя могли бы исследовать спектральные свойства каждого из самосопряженных расширений, которые можно построить при фиксированном θ с большим $|\theta|$.

§6. Заключительные замечания

Результаты §1–4 обобщаются на случай многополюсного потенциала. Нам лишь надо предположить, что неравенство для θ выполнено в каждой особой точке, и использовать разбиение единицы, состоящее из нескольких функций. Относительно оператора Дирака в $\mathbb{R}^3$ в этом случае см., например, [35] и [36].

Оператор $(\mathcal{D} + V)_\Omega$, введенный в §2, допускает еще одно определение — как предел операторов со „срезанными“ потенциалами $V^{(t)}$ вместо V. Эту идею можно реализовать, используя результаты работ [20–22] и [23–24] для оператора Дирака с кулоновским потенциалом в $\mathbb{R}^3$ по крайней мере в случае скалярного потенциала. См. конец п. 2.1.

Граничное условие (7) в результатах параграфов 1–3 можно обобщить. Например, μ можно заменить диагональной вещественной матрицей, гладко зависящей от точки на Γ, со всюду ненулевым следом. Как нетрудно проверить, этого достаточно для эллиптичности и формальной самосопряженности задачи.

Мы не анализируем минимальную гладкость границы и потенциала вне особенности достаточные для того, чтобы проходили наши рассмотрения. Безусловно не нужна большая гладкость границы. Но негладкие поверхности не очень интересны в атомной физике, так как там поверхность Γ в отличие от электродинамики можно выбирать.

Глава II. ЗАДАЧА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

§7. Переход от системы Дирака к системе 2-го порядка и неравенство типа Харди

В этой главе мы не будем выделять параметр λ в системе Дирака и запишем ее в виде

$$\begin{aligned} (V(x)+1)u(x) + \sigma(D)v(x) &= 0, \\ \sigma(D)u(x) + (V(x)-1)v(x) &= 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь $V(x)$ — пока скалярная функция вида

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x), \quad \text{где } V_0(x) = \frac{\theta}{|x|},\ 0 < |\theta| < 1, \tag{7.2}$$

и $V_1(x)$ — гладкая функция, обе с вещественными значениями. В этой главе под гладкостью $V_1(x)$ и границы будем для простоты подразумевать бесконечную гладкость. *Примем, что функции* $V(x) \pm 1$ *не обращаются в нуль в* $\overline{\Omega}$ и, значит, сохраняют знак, для определенности пусть это плюс, так что $\theta > 0$. Напомним, что граничное условие в спектральной задаче II имеет вид (7) с $g = 0$.

Из рассматриваемой системы (2.1) получаем

$$L_1 u := \sigma(D)(V-1)^{-1}\sigma(D)u - (V+1)u = 0. \tag{7.3}$$

Это однородная 2×2-система 2-го порядка типа Шрёдингера в дивергентной форме с *вырождением* главной части в одной точке 0 и кулоновской *особенностью* в свободном члене в той же точке.[5]

Основой для рассмотрения спектральной задачи II с сингулярным потенциалом в системе Дирака являются результаты о задаче Дирихле

$$L_1 u = f \text{ в } \Omega, \quad u^+ = 0 \text{ на } \Gamma \tag{7.4}$$

в обобщенной (вариационной) постановке. Они будут получены в следующем пункте. В [4] тоже использовалась эта задача, но там все коэффициенты были гладкими, в системе (7.3) не было ни вырождения, ни особенности.

Предполагая функцию u гладкой и равной нулю на границе, умножим левую часть в (7.3) скалярно на $\overline{u}$ и проинтегрируем по Ω. После интегрирования по частям с учетом эрмитовости оператора $\sigma(D)$ получим квадратичную форму

$$\Phi_0(u,u) = \int_\Omega (V-1)^{-1}\sigma(D)u \cdot \overline{\sigma(D)u}\,dx - \int_\Omega (V+1)u \cdot \overline{u}\,dx. \tag{7.5}$$

Здесь следует обратить внимание на разницу в знаках: $(V-1)^{-1} \sim |x|/\theta$, а $-(V+1) \sim -\theta/|x|$ при $x \to 0$. Мы хотим вывести для этой формы неравенство типа Гординга. Для этого нам понадобится следующее неравенство типа Харди.

Предложение 7.1. *Для функций* $u(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^2$

$$\int \frac{1}{|x|}|u|^2\,dx \leqslant \int |x||\sigma(\partial)u|^2\,dx. \tag{7.6}$$

Это неравенство сразу получается из неравенства (2.1) в [13] для четырехмерной вектор-функции и оператора $\sum_1^3 \alpha_j\partial_j$, если положить две нижние компоненты этой вектор-функции равными нулю.

Следствие 7.2. *Для функций* $u(x) \in C_0^1(\Omega)^2$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)^2} \leqslant C\int_\Omega |x||\sigma(\partial)u|^2 dx. \tag{7.7}$$

[5] Попытки иначе перейти к системе 2-го порядка не привели к положительным результатам.

§8. Задача Дирихле (7.4)

Введем *пространство* $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$ как пополнение линеала $C_0^\infty(\Omega)^2$ по норме, определяемой равенством

$$\langle|u|\rangle_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega |x||\sigma(D)u|^2 dx. \tag{8.1}$$

(Если $\langle|u|\rangle = 0$, то $u = 0$ в силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.) В силу (7.7) это пространство непрерывно вложено в $L_2(\Omega)^2$.

Предложение 8.1. *Пространство* $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$ *компактно вложено в* $L_2(\Omega)^2$.

Доказательство. Зафиксируем любое $q \in (6/5, 3/2)$. Достаточно проверить непрерывность вложения пространства $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$ в пространство $W_q^1(\Omega)^2$, так как неравенство $q > 6/5$ обеспечивает непрерывность вложения пространства $W_q^1(\Omega)$ в $H^\varepsilon(\Omega)$ с положительным ε (см., например, [27, п. 4.6.1]), а последнее пространство вложено в $L_2(\Omega)$ компактно. Здесь пространство $W_q^1(\Omega)$ определяется как пополнение линеала бесконечно гладких в $\overline{\Omega}$ функций по норме (она понадобится только в этом доказательстве), определяемой равенством (мы пишем его для скалярных функций h)

$$\|h\|_{1,q,\Omega}^q = \sum \|\partial_j h\|_{L_q(\Omega)}^q + \|h\|_{L_q(\Omega)}^q. \tag{8.2}$$

При помощи неравенства Гёльдера получаем

$$\int_\Omega |\sigma(\partial)u|^q dx = \int_\Omega [|x||\sigma(\partial)u|^2]^{q/2}|x|^{-q/2}dx$$
$$\leqslant \left(\int_\Omega |x||\sigma(\partial)u|^2 dx\right)^{q/2}\left(\int_\Omega |x|^{-q/(2-q)}dx\right)^{(2-q)/2}.$$

Последний интеграл сходится в силу неравенства $q < 3/2$. Таким образом,

$$\|\sigma(\partial)u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C_1\langle|u|\rangle_{1,\Omega}. \tag{8.3}$$

Кроме того, в силу неравенства Гёльдера

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C_2\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Остается воспользоваться априорной оценкой Агмона–Ниренберга для решений эллиптической системы $\sigma(\partial)u = f$ на гладких финитных функциях в $\mathbb{R}^3$ с носителями в фиксированном компакте ($\overline{\Omega}$)

$$\|u\|_{1,q,\Omega} \leqslant C_3\big[\|\sigma(\partial)u\|_{L_q(\Omega)} + \|u\|_{L_q(\Omega)}\big].$$

Получаем с учетом (7.7)

$$\|u\|_{1,q,\Omega} \leqslant C_4\langle|u|\rangle_{1,\Omega}, \tag{8.4}$$

что и требовалось. •

Предложение 8.2. *Для функций* $u \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$ *справедливо неравенство типа Гординга*

$$\varepsilon\langle|u|\rangle_{1,\Omega}^2 \leqslant \left[\Phi_0(u,u) + C\|u\|_{0,\Omega}^2\right] \tag{8.5}$$

с некоторыми $\varepsilon > 0$ *и* $C \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть φ — функция из $C_0^\infty(\Omega)$ с носителем в O_δ, где δ — малое число, равная 1 в меньшей окрестности начала, и $\psi = (1-\varphi^2)^{1/2}$. Пусть u — любая функция из $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$. Из наших предположений о потенциале следует, что если δ достаточно мало, то для функции φu справедлива оценка вида (8.5) с некоторыми ε_1 и C_5 вместо ε и C в силу предложения 7.1. Из этой оценки получаем, используя (7.7) для оценки слагаемых с производными от φ, что

$$\varepsilon_1 \langle|\varphi u|\rangle_{1,\Omega}^2 \leqslant \left[\Phi_0(u,u) + C_6\|\varphi u\|_{0,\Omega}^2\right]. \tag{8.6}$$

Далее, для функции ψu справедлива оценка

$$\varepsilon_2\|\psi u\|_{1,\Omega}^2 \leqslant \left[\Phi_0(\psi u, \psi u) + C_7\|\psi u\|_{0,\Omega}^2\right]$$

ввиду сильной эллиптичности системы $L_1 u = f$ вне особенности. Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\varepsilon_3\langle|\psi u|\rangle_{1,\Omega}^2 \leqslant \left[\Phi_0(u,u) + C_8\|u\|_{0,\Omega}^2\right]. \tag{8.7}$$

Положительные постоянные ε_j и C_j не зависят от u. Ясно, что из (8.6) и (8.7) получается требуемый результат. •

Теперь рассмотрим задачу Дирихле

$$(L_1 - \lambda)u = f \text{ в } \Omega, \quad u^+ = 0 \tag{8.8}$$

в обобщенной постановке

$$\Phi_\lambda(u,v) =: \Phi_0(u,v) - \lambda(u,v)_{0,\Omega} = (f,v)_{0,\Omega} \quad \text{при } v \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)^2, \tag{8.9}$$

где форма $\Phi_0(u,v)$ определяется очевидным образом. Стандартно доказывается, что эта задача в силу (8.5) имеет единственное решение в $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$ при достаточно большом по модулю отрицательном λ для любого f, в частности, из $H^0(\Omega)^2$. А именно $\Phi_\lambda(u,v)$ принимается за скалярное произведение в $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$, и непрерывный антилинейный функционал $v \mapsto (f,v)$ над этим пространством однозначно реализуется в виде $\Phi_\lambda(u,v)$.

Априорную оценку можно написать по крайней мере в виде

$$\langle|u|\rangle_{1,\Omega} \leqslant C_9\|f\|_{0,\Omega}. \tag{8.10}$$

Замечание 8.3. Аналогичный результат получается, например, для скалярного уравнения

$$\nabla(|x|\nabla u) + \theta^2|x|^{-1}u = 0, \quad 0 < \theta < 1,$$

и систем близкой (и более общей) структуры, с вырождением в главной части и особенностью в младшем члене. Задача Дирихле для эллиптических систем с вырождением на границе рассматривалась во многих работах; однако рассматривались и другие виды вырождения. Ср. уже упоминавшиеся работы [6] и [10] по спектральным асимптотикам.

Следуя [1, гл. VI, §2], мы можем теперь сопоставить задаче (7.1) самосопряженный полуограниченный снизу оператор $\mathcal{L}_1$ в $L_2(\Omega)^2$ с областью определения $D(\mathcal{L}_1)$, содержащейся в $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$, такой, что

$$(\mathcal{L}_1 u, v)_{0,\Omega} = \Phi_0(u,v) \quad \text{при } u \in D(\mathcal{L}_1),\ v \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)^2. \tag{8.11}$$

Этот оператор определяется только что указанными условиями однозначно. В силу предложения 8.1 спектр этого оператора дискретен, и разумно следующее предположение, которое мы теперь сделаем: *пусть задача Дирихле для системы $L_1 u = f$ в обобщенной постановке однозначно разрешима.*

На случай неоднородного граничного условия $u|_\Gamma = u^+ \in H^{1/2}(\Gamma)^2$ однозначная разрешимость распространяется обычным образом — вычитанием из решения функции u_0 из $H^1(\Omega)^2$ с этим граничным значением, равной нулю вблизи особенности. При этом решение однородного уравнения $L_1 u = 0$ в Ω_0 с неоднородным граничным условием $u|_\Gamma = u^+$ попадает в *пространство* $\widetilde{H}^1(\Omega)^2$ — пополнение линеала $C^\infty(\overline{\Omega})^2$ по норме, определяемой равенством

$$\langle\langle|u|\rangle\rangle_{1,\Omega}^2 = \langle|u|\rangle_{1,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Omega}^2, \tag{8.12}$$

и получается следующая априорная оценка:

$$\langle\langle|u|\rangle\rangle_{1,\Omega} \leqslant C_{10}\|u^+\|_{1/2,\Gamma}. \tag{8.13}$$

Действительно, можно считать, что $\|u_0\|_{1,\Omega} \leqslant C_{11}\|u^+\|_{1/2,\Gamma}$, тогда функция $L_1 u_0 = f$ принадлежит $H^{-1}(\Omega)^2$; кроме того, она равна 0 вблизи особенности. Она определяет непрерывный антилинейный функционал над $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$, так что уравнение $L_1 u_1 = -f$ с однородным условием Дирихле $u_1^+ = 0$ имеет решение в $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$, причем для него

$$\langle|u_1|\rangle_{1,\Omega} \leqslant C_{12}\|f\|_{-1,\Omega} \leqslant C_{13}\|u_0\|_{1,\Omega}.$$

Полагаем $u = u_0 + u_1$.

Замечание 8.4. Если $\mathcal{L}_1 - \lambda I$ — неотрицательный оператор (это так, если $\lambda < 0$ достаточно велико по модулю), то область определения неотрицательного квадратного корня из него — пространство $\widetilde{H}_0^1(\Omega)^2$, см. [1] (там же).

Применяя вне особенности локальную теорему о гладкости решений эллиптических задач, нетрудно проверить

Предложение 8.5. *При сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и $s \geqslant 1/2$ решение однородной системы $L_1 u = 0$ принадлежит $H^{s+1/2}(\Omega_\varepsilon)^2$, если $u^+ \in H^s(\Gamma)^2$. В частности, решение принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{0\})^2$, если $u^+ \in C^\infty(\Gamma)^2$.*

Далее, определен оператор Пуассона $\mathcal{P}_1$, переводящий u^+ в решение однородной системы $L_1 u = 0$ в Ω_0.

Предложение 8.6. *Оператор Пуассона $\mathcal{P}_1$ действует ограниченным образом из $H^s(\Gamma)^2$ в $H^{s+1/2}(\Omega_\varepsilon)^2$ при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и $s \geqslant 1/2$:*

$$\|u\|_{s+1/2,\Omega_\varepsilon} \leqslant C_{14}(\varepsilon)\|u^+\|_{s,\Gamma}. \tag{8.14}$$

В этом предложении ничего не предполагается о гладкости решения на внутренней части границы области Ω_ε — сфере радиуса ε с центром в начале. Однако фактически, предполагая, что $u^+ \in H^s(\Gamma)^2$, мы автоматически имеем ту же гладкость на этой сфере. Здесь существенны наши результаты для задачи Дирихле (7.4).

Доказательство предложения 8.6. Пусть ψ — функция из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равная 0 в $O_{\varepsilon/2}$ и 1 вне O_ε. Мы можем написать априорные оценки в соболевских нормах для функции ψu через соболевские нормы граничного значения. Пусть $u^+ \in H^s(\Gamma)^2$, тогда

$\psi u \in H^{s+1/2}(\Omega_{\varepsilon/4})^2$. Получаем

$$\|\psi u\|_{s+1/2,\Omega_{\varepsilon/4}} \leqslant C_{15}\big[\|L_1(\psi u)\|_{s-3/2,\Omega_\varepsilon} + \|u^+\|_{s,\Gamma}\big],$$

следовательно,

$$\|u\|_{s+1/2,\Omega_\varepsilon} \leqslant C_{16}\big[\|u\|_{s-1/2,\Omega_\varepsilon} + \|u^+\|_{s,\Gamma}\big]$$

и как следствие

$$\|u\|_{s+1/2,\Omega_\varepsilon} \leqslant C_{17}\big[\|u\|_{0,\Omega} + \|u^+\|_{s,\Gamma}\big].$$

Но нулевая норма решения оценивается через $\|u^+\|_{1/2,\Gamma}$ в силу (8.13) и (8.12), так что в итоге получается (8.14). •

§9. Оператор на Γ, отвечающий спектральной задаче

Систему (7.1) теперь естественно рассматривать при следующих предположениях: $u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)^2$, т. е.

$$|x|^{1/2}\sigma(\partial)u,\ |x|^{1/2}\sigma(\partial)v \in L_2(\Omega)^2. \tag{9.1}$$

Отсюда в силу (7.6) следует, что

$$|x|^{-1/2}u,\ |x|^{-1/2}v \in L_2(\Omega)^2. \tag{9.2}$$

Это согласуется с системой (7.1), если переписать ее в виде

$$\begin{aligned} &(V+1)^{1/2}u + (V+1)^{-1/2}\sigma(D)v = 0,\\ &(V-1)^{-1/2}\sigma(D)u + (V-1)^{1/2}v = 0, \end{aligned} \tag{9.3}$$

в том смысле, что в этих уравнениях все слагаемые принадлежат $L_2(\Omega)^2$. При этом $u, v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}\setminus\{0\})^2$.

Формально система (7.1) эквивалентна системе, составленной из (7.3) и второго уравнения в (7.1). Действительно, из них следует первое уравнение в (7.1).

Из второго уравнения в (7.1) с учетом скалярности V видно, что

$$i\sigma(\nu)v^+ = \mathcal{Q}u^+, \quad \text{где } \mathcal{Q} := -\big[(V-1)^{-1}\sigma(\nu)\sigma(\partial)\mathcal{P}_1\,\cdot\,\big]^+. \tag{9.4}$$

Для этого оператора получается следующий результат. В его формулировке имеется в виду та же система локальных координат, что и в [4], т. е. начало координат перенесено в точку на Γ и ось x_3 направлена по внешней нормали в этой точке. В конце параграфа мы поясним, почему выбором такой системы координат общность не ограничивается.

Предложение 9.1. *Оператор $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1$ является псевдодифференциальным оператором 1-го порядка с главным символом*

$$a_1(\xi') = -(V-1)^{-1}\Big[|\xi'| + i\sum_{k\neq 3}\xi_k\sigma_3\sigma_k\Big]. \tag{9.5}$$

Доказательство. Прежде всего поясним, почему $\mathcal{Q}$ — псевдодифференциальный оператор. Пусть $\widetilde{L}_1$ — сильно эллиптический матричный оператор 2-го порядка с коэффициентами, бесконечно гладкими в $\overline{\Omega}$ и совпадающими с коэффициентами в L_1 в граничной полоске. Сравним соответствующие операторы Пуассона $\mathcal{P}_1$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_1$. Достаточно показать, что их разность — бесконечно сглаживающий оператор в этой граничной полоске. Рассмотрим разность $u = \mathcal{P}_1 g - \widetilde{\mathcal{P}}_1 g$, где, скажем, $g \in H^{1/2}(\Gamma)^2$. Применим к ней оператор $\widetilde{L}_1$. В нашей граничной полоске $\widetilde{L}_1 u = L_1 \mathcal{P}_1 g = 0$. Кроме того, $u^+ = 0$. В силу локальной теоремы о гладкости решений эллиптических граничных задач u — бесконечно гладкая функция в граничной полоске.

Подсчитывая теперь главный символ оператора $\mathcal{Q}$, мы можем заморозить коэффициенты и считать, что имеем дело с оператором $\beta\sigma(\partial)\sigma(\partial) = \beta\Delta I_2$ вместо L_1, где ненулевая постоянная β не играет роли, так как оператор Пуассона переводит данные Дирихле в решение однородного уравнения, так что пусть $\beta = 1$. Это случай, рассмотренный в [4, п. 4]. В обозначениях из этой работы нам нужен оператор

$$-(V-1)^{-1}\big[-\tfrac{1}{2}A^{-1} + c(\partial)\big]$$

с точностью до членов нулевого порядка. Оператор $-\frac{1}{2}A^{-1}$ имеет главный символ $|\xi'|I_2$ и оператор $c(\partial)$ — главный символ $i\sum_{k\neq 3}\sigma_3\sigma_k\xi_k$. ●

Теперь заметим, что вместо системы (7.3) мы могли бы отправляться от аналогичной системы второго порядка для v

$$L_2 v := \sigma(D)(V+1)^{-1}\sigma(D)v - (V-1)v = 0. \tag{9.6}$$

Предположим, что задача Дирихле для нее в Ω в обобщенной постановке тоже однозначно разрешима, и обозначим соответствующий оператор Пуассона через $\mathcal{P}_2$. Используя его, мы можем построить сначала, как выше, оператор, выражающий $i\sigma(\nu)u^+$ через v^+:

$$i\sigma(\nu)u^+ = -\big[(V+1)^{-1}\sigma(\nu)\sigma(\partial)\mathcal{P}_2 v^+\big]^+.$$

Отсюда

$$u^+ = i\mathcal{Q}_2\sigma(\nu)v^+, \quad \text{где} \quad \mathcal{Q}_2 = \sigma(\nu)\big[(V+1)^{-1}\sigma(\nu)\sigma(\partial)\mathcal{P}_2\sigma(\nu)\big]^+. \tag{9.7}$$

Для этого оператора получается аналог предложения 9.1 с той только разницей, что вместо формулы (9.5) для главного символа получается формула

$$a_2(\xi') = (V+1)^{-1}\Big[|\xi'| + i\sum_{k\neq 3}\xi_k\sigma_k\sigma_3\Big]. \tag{9.8}$$

Как и в [4], операторы $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ являются взаимно обратными на бесконечно гладких функциях. Они неэллиптичны.

Приведем еще одно пояснение к этому обстоятельству. Если из граничного условия (7) исключить v^+, то получится задача

$$L_1 u = 0 \text{ в } \Omega, \quad -\sigma(\nu)(V-1)^{-1}\sigma(\nu)u^+ - \mu u^+ = g. \tag{9.9}$$

Можно считать, что мы *ее* сводили к уравнению в (9.4). Эта задача напоминает классическую задачу Стеклова

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \partial_\nu u^+ - \mu u^+ = g, \tag{9.10}$$

но в отличие от последней, как легко проверить, неэллиптична.

Напомним, что у нас $V \pm 1$ — положительные функции.

Теорема 9.2. *При любых ненулевых вещественных α и β псевдодифференциальный оператор $S_{\alpha\beta} = \alpha\mathcal{Q}_1 + \beta\mathcal{Q}_2$ эллиптичен. Его главный символ имеет только положительные собственные значения при $\beta > 0 > \alpha$, положительные и отрицательные собственные значения при $\alpha\beta > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим фиксированную граничную точку и в ней ту же, что и выше, систему координат. Положим в этой точке

$$\begin{aligned}(V-1)^{-1}\alpha &= \alpha_1,\\ (V+1)^{-1}\beta &= \beta_1.\end{aligned} \tag{9.11}$$

Как нетрудно подсчитать, главный символ оператора $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ — эрмитова матрица

$$\begin{pmatrix} (-\alpha_1+\beta_1)|\xi'| & (-\alpha_1-\beta_1)(i\xi_1+\xi_2) \\ (-\alpha_1-\beta_1)(-i\xi_1+\xi_2) & (-\alpha_1+\beta_1)|\xi'| \end{pmatrix}. \tag{9.12}$$

Определитель этой матрицы равен $-4\alpha_1\beta_1|\xi'|^2$, так что оператор $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ эллиптичен. Ее собственными значениями являются числа $2\beta_1|\xi'|$ и $-2\alpha_1|\xi'|$. Отсюда следуют остальные утверждения теоремы. •

Вернемся к выбору системы координат. Как легко проверить, при повороте системы координат в $\mathbb{R}^3$ три матрицы σ_1, σ_2, σ_3 переходят в три матрицы, которые остаются эрмитовыми, связанными соотношениями (4) и имеющими собственные значения ± 1. Известно, что унитарным преобразованием переменных u_1, u_2 (и домножением системы слева на матрицу обратного преобразования) можно вернуть эти три матрицы к исходному виду σ_1, σ_2, σ_3 (см., например, [37, Part II, Appendix C]; ср. [38, ч. I, §9]). Отсюда и видно, что, используя указанную выше систему координат, мы не потеряли общность.

§10. Спектральные свойства оператора $\mathcal{Q}$

Дальнейшие рассуждения — уточнение рассуждений из [4] на основе теоремы 9.2, которой там нет, там рассматривался только один оператор $\mathcal{S}$, чего достаточно, например, в случае свободного оператора Дирака.

Оператор $\mathcal{Q}$ является формально самосопряженным в $L_2(\Gamma)^2$, это проверяется, как в [4], интегрированием по частям в Ω. Следовательно, любой оператор $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ тоже является формально самосопряженным, но это эллиптический псевдодифференциальный оператор первого порядка, поэтому его можно рассматривать как самосопряженный оператор в $L_2(\Gamma)^2$ с областью определения $H^1(\Omega)^2$. В $L_2(\Gamma)^2$ он имеет ортонормированный базис из собственных функций, который остается безусловным базисом во всех соболевских пространствах $H^s(\Gamma)^2$.

Возьмем 1) $\alpha=\beta=1$ и 2) $\alpha=-1, \beta=1$, т. е. рассмотрим операторы $\mathcal{Q}^{-1}+\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^{-1}-\mathcal{Q}$. Переобозначим их через $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$.

У оператора $\mathcal{S}_1$ имеются собственные значения разных знаков, стремящиеся к $\pm\infty$. Занумерованные в монотонные последовательности с учетом кратностей, они имеют соответственно асимптотику

$$\tau_n^{(1)} = \pm c_1^{\pm}|n|^{1/2} + O(1) \ (n\to\pm\infty). \tag{10.1}$$

У оператора $\mathcal{S}_2$ собственные значения стремятся к $+\infty$; занумерованные в порядке неубывания, они имеют асимптотику

$$\tau_n^{(2)} = c_2 n^{1/2} + O(1) \quad (n\to+\infty). \tag{10.2}$$

Здесь $c_1^{\pm}$ и c_2 — положительные постоянные. См. [39], где можно найти и способ подсчета этих постоянных, на котором мы останавливаться не будем.

Каждое собственное подпространство оператора $\mathcal{S}_1$, отвечающее любому его собственному значению τ, конечномерно, состоит из бесконечно гладких функций и инвариантно относительно оператора $\mathcal{Q}$, который перестановочен с $\mathcal{S}_1$ и удовлетворяет соотношению $\mathcal{Q}^{-1} + \mathcal{Q} = \mathcal{S}_1$. Поэтому $\mathcal{Q}$ имеет там ортонормированный базис из собственных функций, а собственные значения являются корнями квадратного уравнения

$$\mu^{-1} + \mu = \tau. \tag{10.3}$$

Аналогично обстоит дело с собственными подпространствами оператора $\mathcal{S}_2$, соответствующее квадратное уравнение имеет вид

$$\mu^{-1} - \mu = \tau. \tag{10.4}$$

Рассмотрим последовательность корней $\tau_n^{(1)}$ из (10.1) с положительными n, стремящуюся к $+\infty$. Из формулы для корней уравнения (10.3)

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4}\right) \tag{10.5}$$

видно, что хотя бы одна из точек $+\infty$ и $+0$ является точкой накопления соответствующих собственных значений μ оператора Q, но пока неясно, являются ли они обе точками накопления. Здесь $+0$ означает, что накопление к 0 возможно только справа. Других точек накопления быть не может. Если предположить, что некоторая последовательность собственных значений (10.5) стремится к $+\infty$, то из (10.4) получится, что соответствующие собственные значения τ оператора $\mathcal{S}_2$ стремятся к $-\infty$, а это невозможно. Значит, для всех положительных n, кроме, быть может, конечного их числа, в формуле (10.5) следует брать знак минус, и соответствующие собственные значения оператора $\mathcal{Q}$ стремятся к $+0$, с пересчетом асимптотического поведения согласно (10.1) и (10.5).

Теперь рассмотрим последовательность собственных значений $\tau_n^{(1)}$ оператора $\mathcal{S}_1$ с отрицательными n, она стремится к $-\infty$. Соответствующие собственные значения оператора $\mathcal{Q}$, как видно из (10.5), могут иметь точки накопления $-\infty$ и/или -0. Вторая возможность опять противоречит тому, что в (10.4) правая часть может стремиться только к $+\infty$. Значит, для всех отрицательных n, за исключением, может быть, конечного числа, собственные значения (10.5) оператора $\mathcal{Q}$ отвечают знаку плюс в (10.5) с пересчетом асимптотического поведения снова согласно (10.1) и (10.5).

Таким образом, собственные значения оператора $\mathcal{Q}$ имеют две точки накопления, $+0$ и $-\infty$. Коэффициенты в главных членах асимптотики легко выражаются через $c_1^{\pm}$ (см. формулировку теоремы ниже). Оценка остатка видна из оценок остатка в (10.1) и асимптотики корней уравнения (10.5). Мы приходим к следующему основному результату.

Теорема 10.1. *Оператор $\mathcal{Q}$ имеет ортонормированный базис из бесконечно гладких собственных функций в $L_2(\Gamma)^2$, который остается безусловным базисом во всех соболевских пространствах $H^s(\Gamma)^2$. Соответствующие собственные значения образуют две серии, в одной они стремятся к $+0$, в другой — к $-\infty$.*

Более точно, эти серии собственных значений $\{\mu_n^{\pm}\}$ имеют асимптотики

$$\begin{aligned} \mu_n^+ &= (c_1^+)^{-1} n^{-1/2} + O(n^{-1}) \ \ (n \to \infty), \\ \mu_n^- &= -c_1^- |n|^{1/2} + O(1) \ \ (n \to -\infty). \end{aligned} \tag{10.6}$$

Оператор $\mathcal{Q}$ по существу является ортогональной суммой оператора с дискретным спектром (т. е. с компактной резольвентой) в одном подпространстве пространства $L_2(\Gamma)^2$ и компактного оператора в другом; эти ортогональные одно к другому подпространства в сумме образуют $L_2(\Gamma)^2$. Однозначности нет: любое конечное множество собственных подпространств может быть произвольно отнесено к любому из этих двух подпространств.

Если u^+ — собственная функция оператора $\mathcal{Q}$, то v^+ восстанавливается по формуле $v^+ = -i\sigma(\nu)\mathcal{Q}u^+$, после чего u и v в Ω восстанавливаются по формулам $u = \mathcal{P}_1 u^+$, $v = \mathcal{P}_2 v^+$. Эти функции обладают свойствами (9.1) и принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{0\})^2$.

§11. Вторая формула для R-матрицы

Эта формула состоит просто в том, что искомый оператор $g \mapsto u^+$ строится разложением функций g и u^+ по собственным функциям оператора $\mathcal{Q}$. Если $\{\varphi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ — ортонормированный базис из этих собственных функций в $L_2(\Gamma)^2$, то

$$g = \sum_{-\infty}^{\infty} (g, \varphi_n)_\Gamma \varphi_n, \tag{11.1}$$

и тогда при μ, отличном от собственных значений μ_n,

$$u^+ = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(g, \varphi_n)_\Gamma}{\mu_n - \mu} \varphi_n. \tag{11.2}$$

Сходимость здесь улучшается с ростом гладкости u^+, которая растет вместе с ростом гладкости g. Уже при небольшой гладкости g сходимость становится равномерной: достаточно предположить, что $g \in H^{1+\varepsilon}(\Gamma)^2$, $\varepsilon > 0$, так как сходимость в $H^{1+\varepsilon}(\Gamma)^2$ на двумерной поверхности влечет равномерную сходимость.

Аппроксимациям функции u^+ отвечают аппроксимации решения u в Ω_ε (со сколь угодно малым ε) в соболевских нормах сколь угодно высокого порядка в силу оценки (8.13).

§12. Заключительные замечания

Результаты этой главы тоже обобщаются на случай многополюсного потенциала. Допустимы и некоторые матричные V; на уточнении этого утверждения останавливаться здесь не будем.

В случае задачи в шаре для чисто кулоновского потенциала собственные функции можно указать явно (ср. §5). Они выражаются через сферические функции.

Если не предполагать однозначную разрешимость задач Дирихле для систем 2-го порядка, то эти задачи фредгольмовы и остается возможность строить базис из собственных функций с конечномерным дефектом.

Заведомо в построениях этой главы можно ослаблять предположения о гладкости потенциала вне особенности и границы.

Список литературы

[1] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[2] Szmytkowski R., *Metoda R-macierzy dla równań Schrödingera i Diraca*, Politechnika Gdańska, Gdańsk, 1999.

[3] Курант Р., Гильберт Д., *Методы математической физики*. Т. I, ГТТИ, М.-Л., 1933.

[4] Агранович М. С., *Спектральные задачи для системы Дирака со спектральным параметром в локальных граничных условиях*, Функц. анал. и его прил. **35** (2001), №3, 1–18.

[5] Ivrii V., *Precise spectral asymptotics for elliptic operators acting in fiberings over manifolds with boundary*, Lecture Notes in Math., vol. 1100, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[6] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов*. I, II, Тр. Моск. мат. о-ва **27** (1972), 3–52; **28** (1973), 3–34.

[7] Thaller B., *The Dirac equation*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[8] Kalf H., Schmincke U.-W., Walter J., Wüst R., *On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials*, Spectral Theory and Differential Equations (Proc. Sympos., Dundee, 1974), Lecture Notes in Math., vol. 448, Springer-Verlag, Berlin, 1975, pp. 182–226.

[9] Nenciu G., *Self-adjointness and invariance of the essential spectrum for Dirac operators defined as quadratic forms*, Comm. Math. Phys. **48** (1976), 235–247.

[10] Розенблюм Г. В., *Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов*, Изв. вузов. Мат. **1976**, №1 (164), 75–86.

[11] Nakamura G., Tsuchida T., *Uniqueness for an inverse boundary value problem for Dirac operators*, Comm. Partial Diffferential Equations **25** (2000), no. 7-8, 1327–1369.

[12] Dolbeault J., Esteban M. J., Séré E., *On the eigenvalues of operators with gaps. Application to Dirac operators*, J. Funct. Anal. **174** (2000), 208–226.

[13] Vogelsang V., *Remark on essential selfadjointness of Dirac operators with Coulomb potentials*, Math. Z. **196** (1987), 517–521.

[14] Narcowich F. J., *Mathematical theory of R-matrix*. I. *The eigenvalue problem;* II. *The R-matrix and its properties*, J. Math. Phys. **15** (1974), no. 10, 1626–1634; 1635–1642.

[15] Агранович М. С., *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей*, Успехи мат. наук **57** (2002), №5, 3–78.

[16] Hamacher P., Hinze J., *Finite-volume variational method for the Dirac equation*, Phys. Rev. A (3) **44** (1991), no. 9, 1705–1711.

[17] Schmincke U.-W., *Essential selfadjointness of Dirac operators with a strongly singular potential*, Math. Z. **126** (1972), 71–81.

[18] Boutet de Monvel A. M., Purice R., *A distinguished self-adjoint extension for the Dirac operator with strong local singularities and arbitrary behaviour at infinity*, Rep. Math. Phys. **34** (1994), 351–360.

[19] Agranovich M. S., *Elliptic boundary problems*, Partial Differential Equations, IX, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 79, Springer-Verlag, Berlin, 1997, pp. 1–144.

[20] Wüst R., *A convergence theorem for selfadjoint operators applicable to Dirac operators with cutoff potentials*, Math. Z. **131** (1973), 339–349.

[21] Wüst R., *Distinguished self-adjoint extensions of Dirac operators constructed by means of cut-off potentials*, Math. Z. **141** (1975), 93–98.

[22] Wüst R., *Dirac operations with strongly singular potentials*, Math. Z. **152** (1977), 259-271.

[23] Klaus M., Wüst R., *Characterization and uniqueness of distinguished selfadjoint extensions of Dirac operators*, Comm. Math. Phys. **64** (1979), 171–176.

[24] Klaus M., Wüst R., *Spectral properties of Dirac operators with singular potentials*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 206–214.

[25] Schmincke U.-W., *Distinguished selfadjoint extensions of Dirac operators*, Math. Z. **129** (1972), 335–349.

[26] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е., *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.

[27] Трибель Х., *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.

[28] Grisvard P., *Caractérisation de quelques espaces d'interpolation*, Arch. Rational Mech. Anal. **25** (1967), 40–63.

[29] Seeley R. T., *Interpolation in L_p with boundary conditions*, Studia Math. **44** (1972), 47–60.

[30] Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г., *Обобщенные функции и уравнения в свертках*, Наука, М., 1994.

[31] Бирман М. Ш., *Задачи рассеяния для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами*, Функц. анал. и его прил. **3** (1969), №3, 1–16.

[32] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

[33] Weidmann J., *Spectral theory of ordinary differential operators*, Lecture Notes in Math., vol. 1258, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
[34] Vogelsang V., *Selfadjoint extensions of Dirac operators for nonspherically symmetric potentials in Coulomb scattering*, Integral Equations Operator Theory **10** (1987), 841–858.
[35] Nenciu G., *Distinguished self-adjoint extension for Dirac operator with potential dominated by multicenter Coulomb potentials*, Helv. Phys. Acta **50** (1977), 1–3.
[36] Klaus M., *Dirac operators with several Coulomb singularities*, Helv. Phys. Acta **53** (1980), 463–482 (1981).
[37] Ivrii V., *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[38] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., *Представления группы вращений и группы Лоренца*, Физматгиз, М., 1958.
[39] Иврий В. Я., *О точных спектральных асимптотиках для эллиптических операторов, действующих в расслоениях*, Функц. анал. и его прил. **16** (1982), №2, 30–38.

Поступило 20 сентября 2003 г.

Московский институт
электроники и математики
109028 Москва
Россия
E-mail address: msa.funcan@mtu-net.ru

Department of Mathematics
Chalmers University of Technology
41296, Gothenburg
Sweden
E-mail address: grigori@math.chalmers.se