



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. E. Shemarulin, Higher symmetries and laws of conservation of an equation of one-dimensional planar isentropic flows of a polytropic gas,
Mat. Zametki, 1990, Volume 47, Issue 3, 138–140

<https://www.mathnet.ru/eng/mzm3208>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.84

April 24, 2025, 19:52:26



ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ПЛОСКИХ ИЗЭНТРОПИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА

В. Е. Шемарулин

Рассматривается квазилинейное уравнение для потенциала скоростей, к которому сводится система уравнений, описывающая одномерные плоские изэнтропические течения политропного газа с показателем адиабаты $k > 1$ [1]

$$\varphi_{tt} + 2\varphi_x \cdot \varphi_{xt} + \left[(k-1)\varphi_t + \frac{k+1}{2}\varphi_x^2 \right] \cdot \varphi_{xx} = 0, \quad (1)$$

где $\varphi(x, t)$ — потенциал скоростей, φ_x — скорость газа, $k = \text{const}$. Область существования физически осмысленных решений

$$\varphi_t + \varphi_x^2/2 < 0 \quad (2)$$

совпадает с областью гиперболичности уравнения (1). Применяя к (1) преобразование Лежандра

$$\tilde{u} = \varphi_x, \quad \tilde{v} = \varphi_t, \quad U = -\varphi + x \cdot \varphi_x + t \varphi_t, \quad x = U_{\tilde{u}}, \quad t = U_{\tilde{v}},$$

получим линейное уравнение для потенциала Лежандра U на плоскости переменных годографа (\tilde{u}, \tilde{v})

$$U_{\tilde{u}\tilde{u}} - 2\tilde{u} \cdot U_{\tilde{u}\tilde{v}} + \left[(k-1)\tilde{v} + \frac{k+1}{2}\tilde{u}^2 \right] \cdot U_{\tilde{v}\tilde{v}} = 0. \quad (3)$$

Область (2) переходит в область гиперболичности $d \equiv \tilde{v} + \tilde{u}^2/2 < 0$ уравнения (3). В гиперболической области в характеристических переменных

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{k-1} \cdot \tilde{u} + \sqrt{-d}, \quad \eta = -\frac{1}{2} \sqrt{k-1} \cdot \tilde{u} + \sqrt{-d}$$

уравнение (3) принимает удобный для исследования вид

$$F \equiv u_{\xi\eta} - \frac{n}{\xi + \eta} \cdot (u_{\xi} + u_{\eta}) = 0, \quad n = (k-3)/2(k-1). \quad (4)$$

Физическое требование $k > 1$ эквивалентно неравенству $n < 1/2$. Здесь высшие симметрии и законы сохранения уравнения (4) вычисляются для любого вещественного значения параметра $n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения и терминология, используемые ниже, соответствуют принятым в [2—3].

Пусть $J^\infty(2,1)$ — многообразие бесконечных джетов гладких функций переменных ξ и η . $\mathcal{Y} = \{F=0\}$ — уравнение (4), \mathcal{Y}_∞ — его бесконечное продолжение. $\mathcal{Y}_\infty \subset J^\infty(2,1)$. В качестве внутренних координат на \mathcal{Y}_∞ выберем функции

$$\begin{aligned} &\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, \dots, u_{m\xi}, u_{m\eta}, \dots; \\ &u_{m\xi} \equiv \frac{\partial^m u}{\partial \xi^m}, \quad u_{m\eta} \equiv \frac{\partial^m u}{\partial \eta^m}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Симметрии уравнения (4) отождествляются с функциями φ переменных (5), являющимися решениями следующего уравнения [2]:

$$l_F(\varphi) = 0, \quad l_F = D_\xi \cdot D_\eta - \frac{n}{\xi + \eta} \cdot (D_\xi + D_\eta),$$

где I_F — ограничение оператора универсальной линеаризации I_F на \mathcal{Y}_∞ ; D_ξ, D_η — операторы полного дифференцирования по ξ и η .

ТЕОРЕМА 1. Контактные симметрии $\varphi = \varphi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \equiv \equiv C^\infty(J^1(2,1))$ уравнения (4) при $n \neq 0, -1$ ($k \neq 3, 5/3$) имеют вид

$$\varphi = A(\xi, \eta) + [n \cdot a \cdot (\xi - \eta) + d] \cdot u + + (a\eta^2 + b\eta + c) \cdot u_\eta + (-a\xi^2 + b\xi - c) \cdot u_\xi,$$

где $a, b, c, d = \text{const}$, $A(\xi, \eta)$ — произвольное решение уравнения (4).

В частности, симметриями являются

$$\varphi_0 = u_\xi - u_\eta, \varphi_1 = -\xi^2 \cdot u_\xi + \eta^2 \cdot u_\eta + n \cdot (\xi - \eta) \cdot u. \quad (6)$$

В дальнейшем нам потребуется также симметрия φ_2

$$\varphi_2 = \xi \cdot u_{2\xi} - \eta \cdot u_{2\eta} + \frac{2n}{\xi \mp \eta} \cdot (-\xi \cdot u_\xi + \eta \cdot u_\eta). \quad (7)$$

Следствие. $L_{-1} = D_\xi - D_\eta$; $L_0 = \xi \cdot D_\xi + \eta \cdot D_\eta$; $L_{+1} = \xi^2 D_\xi - - \eta^2 D_\eta + n \cdot (\eta - \xi) \cdot I$ являются операторами рекурсии для уравнения (4).

По индукции доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \equiv \varphi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, \dots, u_{l\xi}, u_{l\eta}) \equiv \equiv C^\infty(J^l(2,1))$ — симметрия уравнения (4); $n \neq 0, \pm 1, \dots, \pm l$. Тогда φ — линейна по переменным $u, u_\xi, u_\eta, \dots, u_{l\xi}, u_{l\eta}$;

$$\varphi \equiv A(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, \dots, u_{(l-1)\xi}, u_{(l-1)\eta}) + C(\eta) \cdot u_{l\eta} + B(\xi) \cdot u_{l\xi};$$

$B(\xi), C(\eta)$ — полиномы степени $\leq 2l$, $C(\xi) \equiv (-1)^l \cdot B(-\xi)$.

Пусть $\{\varphi, \psi\}$ — скобка Якоби функций φ и ψ [2]. Коммутируя φ_0 $l-1$ раз с φ_2 и m раз с φ_1 (см. (6)–(7)), получим функцию

$$\varphi_l^m \equiv \{ \dots \{ \dots \{ \varphi_0, \varphi_2 \} \dots \varphi_2 \} \varphi_1 \} \dots \varphi_1 \}.$$

Символом L_1^∞ обозначим пространство решений (4). Из теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 3. Алгебра высших симметрий $\text{Sym } \mathcal{Y}$ уравнения (4) при $n \notin \mathbf{Z}$ является прямой суммой идеала L_1^∞ и подалгебры L_2^∞ : $\text{Sym } \mathcal{Y} = L_1^\infty \oplus \oplus L_2^\infty$. L_2^∞ как векторное пространство порождена элементами $u, \varphi_l^m, 0 \leq m \leq m \leq 2l, l = 1, 2, 3, \dots$; a как алгебра Ли — элементами $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, u$.

Из существования лагранжиана для уравнения (4) следует

ЛЕММА 1. $I_F^* \circ b^{-1} = b^{-1} \circ I_F$, где $b \equiv (\xi + \eta)^{2n}$.

Производящими функциями g законов сохранения \mathcal{Y} являются те и только те решения уравнения $I_F^*(g) = 0$, для которых выполнено операторное равенство

$$\tilde{I}_g + \bar{\Delta}^* = \bar{B} \circ I_F, \quad (8)$$

где $\Delta(F) \equiv I_F^*(g)$, $B^* = B$ [3]. В силу леммы 1 $b \cdot g \equiv \text{Sym } \mathcal{Y}$. Проверка условия (8) приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4. Линейное пространство G производящих функций законов сохранения уравнения (4) при $n \notin \mathbf{Z}$ является прямой суммой

$G = b^{-1} L_1^\infty \oplus b^{-1} \tilde{L}_2^\infty$; где $b = (\xi + \eta)^{2n}$, $b^{-1} L_1^\infty = \left\{ b^{-1} \cdot f(\xi, \eta) \left| f_{\xi\eta} - \frac{n}{\xi \mp \eta} (f_\xi + + f_\eta) = 0 \right. \right\}$, $b^{-1} \tilde{L}_2^\infty$ — векторное пространство, порожденное функциями $b^{-1} \cdot \tilde{\varphi}_{2r+1}^m, 0 \leq m \leq 2 \cdot (2r+1), r=0, 1, 2, \dots, \tilde{\varphi}_{2r+1}^m = \{ \dots \{ \square^{2r+1}(u), \varphi_1 \} \dots \dots, \varphi_1 \}$ (φ_1 повторяется m раз), $\square = D_\xi - D_\eta$.

Закон сохранения для уравнения (4) с производящей функцией g получается из тождества Грина

$$D_{\xi} \left\{ -\frac{n}{\xi + \eta} u \cdot g + \frac{1}{2} D_{\eta}(u) \cdot g - \frac{1}{2} D_{\eta}(g) \cdot u \right\} + \\ + D_{\eta} \left\{ -\frac{n}{\xi + \eta} u \cdot g + \frac{1}{2} D_{\xi}(u) \cdot g - \frac{1}{2} D_{\xi}(g) \cdot u \right\} = 0.$$

Рассмотрим теперь случай целочисленного $n = 0, \pm 1, +2, \dots$. Пусть $u(\xi, \eta)$ — решение уравнения (4) и $v = (\xi + \eta)^{-(2n+1)} \cdot u(\xi, \eta)$. Тогда $v_{\xi\eta} + \frac{n+1}{\xi + \eta} (v_{\xi} + v_{\eta}) = 0$. Следовательно, уравнение (4) с параметром n переходит в аналогичное уравнение с параметром $n' = -(n+1)$ и достаточно рассмотреть случай $n \geq 0$. Если $n > 0$, то n -кратным η -преобразованием Лапласа с последующим преобразованием эквивалентности по функции [4] уравнение (4) приводится к виду

$$[w_{\xi} \cdot (\xi + \eta)^{-2n}]_{\eta} = 0. \quad (9)$$

Кроме того, из сказанного выше следует, что при $n = -1$ уравнение (4) эквивалентно волновому $w_{\xi\eta} = 0$. В итоге доказана

ТЕОРЕМА 5. При $n \in \mathbf{Z}$; $n \neq 0, -1$ уравнение (4) эквивалентно уравнению (9), а при $n = -1$ — волновому уравнению $w_{\xi\eta} = 0$.

Поскольку высшие симметрии волнового уравнения хорошо известны [5], то, в силу теоремы 5, вычисление высших симметрий и законов сохранения уравнения (4) сводится к более простой аналогичной задаче для уравнения (9) и вычислению производящих функций высших законов сохранения волнового уравнения. Подробнее это будет изложено в другом месте.

В заключение автор выражает благодарность А. М. Виноградову за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступило
18.05.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
2. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
3. Vinogradov A. M. // Acta Appl. Math. 1984. V. 2, N 1. P. 21—78.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.