

# УПРАВЛЕНИЕ ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ НА ДВУХ СКЛАДАХ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ЦЕНЕ ТОВАРА В УСЛОВИЯХ ДЕФИЦИТА

В. А. Талызин, О. А. Кедун

## Постановка задачи

В работах [1, 2] сформулированы и решены задачи управления однономенклатурными товарными запасами на нескольких складах при неизменной цене товара независимо от объема завозимой на склады партии товара. Для практики представляет интерес случай, когда при закупке товара у поставщиков больше определенного количества вводятся скидки, т.е. стоимость единицы товара зависит от приобретенного объема товара. В таких условиях иногда выгоднее превысить оптимальный размер партии, определяемый в классических моделях, чтобы воспользоваться преимуществами предоставляемой скидки.

Рассмотрим постановку такой задачи на примере двух складов в условиях, когда допускается дефицит товара.

В течение некоторого периода  $T$  на склады должен быть поставлен товар в объеме  $Q$  единиц, исходя из прогнозируемого спроса на товар, который в этот период предполагается стабильным. Завоз товара от поставщиков на любой склад осуществляется мгновенно партиями объема  $s$  единиц с постоянным интервалом поставок  $\tau < T$  (рис. 1).

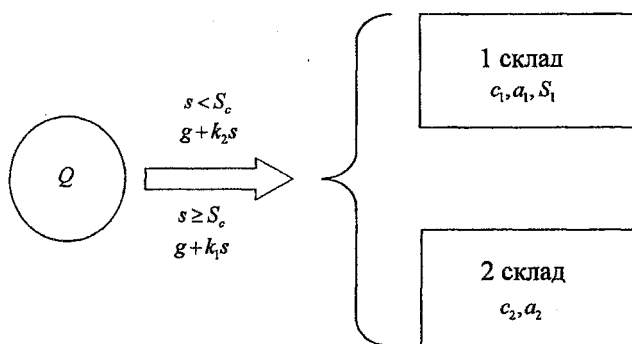


Рис. 1

Издержки хранения одной единицы товара в единицу времени (удельные издержки) равны  $c_1$  денежных единиц на первом складе и  $c_2$  -

на втором складе. Считается, что выполняется условие:  $c_1 < c_2$ . Имеются также фиксированные расходы на хранение товара, не зависящие от объема хранимого товара (например, плата за аренду помещений). Они составляют  $a_1$  и  $a_2$  денежных единиц для первого и второго склада соответственно.

Емкость первого склада ограничена  $S_1$  единицами товара, а суммарный объем двух складов считается достаточным для решения задачи. При реализации товара склады могут освобождаться от него только поочередно.

Расходы, связанные с заказом и доставкой товара на склады, зависят от объема  $s$  завозимой партии:

$$f(s) = \begin{cases} g + k_1 s, & \text{при } 0 < s < S_c, \\ g + k_2 s, & \text{если } s \geq S_c. \end{cases}$$

Здесь  $g$  - фиксированные затраты на поставку товара, не зависящие от объема  $s$  партии,  $k_1, k_2$  ( $k_1 > k_2$ ) - различные стоимости единицы товара,  $S_c$  - пороговое значение объема партии, при котором изменяется цена единицы товара.

Удельные потери из-за отсутствия товара на складах составляют  $c_0$  денежных единиц. Считается, что накопленный дефицит товара "погашается" мгновенно после поставки очередной партии товара.

Требуется найти объем  $s$  завозимой партии товара так, чтобы суммарные издержки, связанные с заказом, доставкой, хранением и потерями из-за дефицита за весь период  $T$ , были минимальны.

### Математическая модель

Сформулированные допущения задачи позволяют найти издержки, связанные с хранением товара объема  $s$  на двух складах при условии, что вначале освобождается от товара первый склад, а затем - второй (рис. 2):

$$I_1 = \left( c_1(2S_1z - S_1^2) + c_2(z - S_1)^2 \right) \frac{T}{2s},$$

где  $z$  - максимальный объем товара на двух складах.

При другом порядке освобождения складов указанные издержки определяются по формуле:

$$I_2 = \left( c_1S_1^2 + c_2(z^2 - S_1^2) \right) \frac{T}{2s}.$$

После несложных преобразований можно получить

$$I_1 - I_2 = 2S_1(z - S_1)(c_1 - c_2).$$

Поскольку по условию  $c_1 - c_2 < 0$  и верно неравенство  $z - S_1 > 0$ , то доказано следующее утверждение: при условии  $c_1 < c_2$  минимальные издержки хранения за время  $T$  будут в том случае, когда вначале освобождается от товара второй склад, а затем – первый.

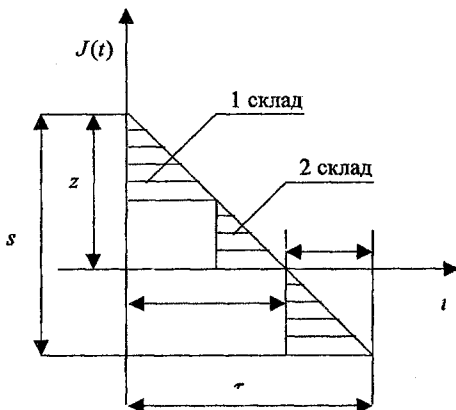


Рис. 2

После формализации содержательной постановки задачи при указанном порядке освобождения складов суммарные затраты за время  $T$  будут выражаться разрывной функцией двух переменных  $s, z$ , вид которой зависит от соотношения величин  $S_1$  и  $S_c$ .

Если выполняется неравенство  $S_1 < S_c$ , то данная функция имеет две точки разрыва по переменной  $s$ :

$$C(s, z) = \begin{cases} C_1(s, z) & \text{для } s \leq S_1, \\ C_2(s, z) & \text{для } S_1 < s < S_c, \\ C_3(s, z) & \text{для } s \geq S_c, \end{cases}$$

где

$$C_1(s, z) = g \frac{Q}{s} + k_1 Q + a_1 + c_1 \frac{z^2 T}{2s} + c_0 \frac{(s-z)^2 T}{2s},$$

$$C_2(s, z) = g \frac{Q}{s} + k_1 Q + a_1 + c_1 \frac{(2z - S_1) S_1 T}{2s} + c_2 \frac{(z - S_1)^2 T}{2s} + a_2 + c_0 \frac{(s-z)^2 T}{2s},$$

$$C_3(s, z) = g \frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1 \frac{(2z - S_1) S_1 T}{2s} + a_2 + c_2 \frac{(z - S_1)^2 T}{2s} + c_0 \frac{(s-z)^2 T}{2s}.$$

При условии  $S_1 = S_c$  целевая функция имеет одну точку разрыва первого рода:

$$C(s, z) = \begin{cases} C_1(s, z) & \text{для } s < S_1 = S_c, \\ C_2(s, z) & \text{для } s = S_c, \\ C_3(s, z) & \text{для } s > S_c, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} C_1(s, z) &= g \frac{Q}{s} + k_1 Q + a_1 + c_1 \frac{z^2 T}{2s} + c_0 \frac{(s-z)^2 T}{2s}, \\ C_2(s, z) &= g \frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1 \frac{z^2 T}{2s} + c_0 \frac{(s-z)^2 T}{2s}, \\ C_3(s, z) &= g \frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1 \frac{(2z - S_1) S_1 T}{2s} + a_2 + c_2 \frac{(z - S_1)^2 T}{2s} + c_0 \frac{(s-z)^2 T}{2s}. \end{aligned}$$

Наконец, для случая, когда выполняется условие  $S_1 > S_c$ , целевая функция вновь имеет две точки разрыва:

$$C(s, z) = \begin{cases} C_1(s, z) & \text{для } s < S_1, \\ C_2(s, z) & \text{для } S_1 \leq s \leq S_c, \\ C_3(s, z) & \text{для } s > S_c, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} C_1(s, z) &= g \frac{Q}{s} + k_1 Q + a_1 + c_1 \frac{z^2 T}{2s} + c_0 \frac{(s-z)^2 T}{2s}, \\ C_2(s, z) &= g \frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1 \frac{z^2 T}{2s} + c_0 \frac{(s-z)^2 T}{2s}, \\ C_3(s, z) &= g \frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1 \frac{(2z - S_1) S_1 T}{2s} + a_2 + c_2 \frac{(z - S_1)^2 T}{2s} + c_0 \frac{(s-z)^2 T}{2s}. \end{aligned}$$

Наименьшие значения данных функций достигаются либо в точках разрыва  $S_1, S_c$ , либо в двух стационарных точках отдельных ветвей функций  $(s^o, z^o)$ ,  $(s^*, z^*)$ , координаты которых определяются из следующих выражений:

$$s^o = \sqrt{\frac{2gQ}{c_1 \rho_1 T}}, \quad z^o = \rho_1 s^o,$$

$$s^* = \sqrt{\frac{2gQ}{c_2\rho_2T} + c_\delta S_1^2}, \quad z^* = \rho_2(c_\delta S_1 + s^*).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\rho_1 = \frac{c_\delta}{c_\delta + c_1}, \quad \rho_2 = \frac{c_\delta}{c_\delta + c_2}, \quad c_\delta = \frac{c_2 - c_1}{c_\delta} > 0.$$

В зависимости от сочетания числовых значений исходных данных возможны различные варианты решения задачи.

Для геометрической интерпретации выразим целевую функцию как функцию одной переменной  $s$  путем подстановки зависимости  $z = \rho_1 s$  в ветвь  $C_1(s, z)$ , а  $z = \rho_2(c_\delta S_1 + s)$  - в ветви  $C_2(s, z)$  и  $C_3(s, z)$ . Тогда полученную разрывную функцию  $C(s)$  можно будет изобразить графически в двух плоскостях  $\pi_1$  и  $\pi_2$  (рис. 3), задаваемых уравнениями  $z = \rho_1 s$  и  $z = \rho_2(c_\delta S_1 + s)$  соответственно. Например, один из возможных вариантов, когда  $S_1 < S_c$ , представлен на рис. 4.

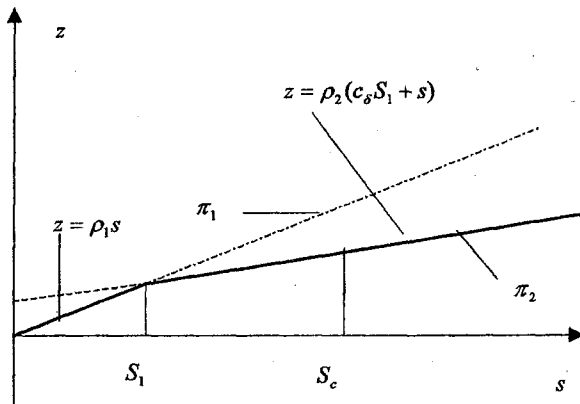


Рис. 3

В данном случае наилучший объем партии  $s_{opt} = s^0$ , т.е. для хранения товара используется только часть первого склада и товар закупается по цене  $k_1$ .

### Алгоритм решения задачи

Рассмотрим вначале случай, когда выполняется условие  $S_1 < S_c$ . По известным исходным данным  $g, Q, T, c_1, c_2, c_\delta, a_1, a_2, k_1, k_2, S_1, S_c$  оптимальное решение задачи находится в следующей последовательности.

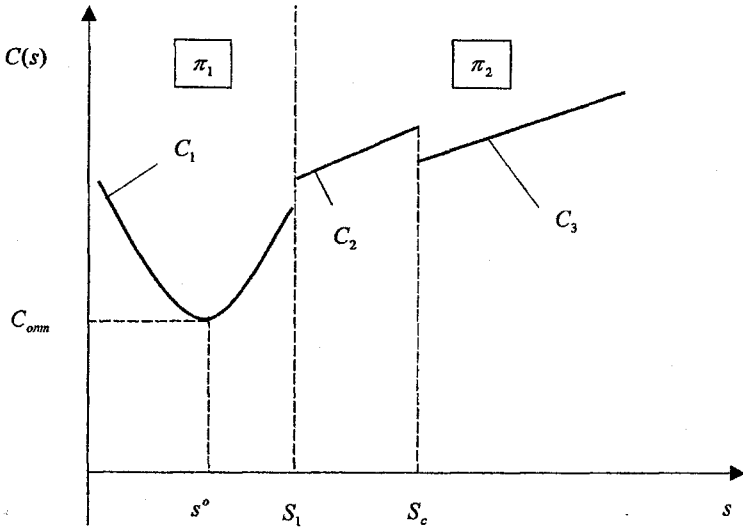


Рис. 4

1. Вычисляются величины:

$$f_1 = s^0 = \sqrt{\frac{2gQ}{c_1\rho_1T}}, \quad f_2 = s^* = \sqrt{\frac{2gQ}{c_2\rho_2T} + c_\delta S_1^2}, \quad f_3 = C_1(s^0, z^0),$$

$$f_4 = C_2(s^*, z^*), \quad f_5 = C_3(s^*, z^*), \quad f_6 = C_1(S_1, z_1), \quad f_7 = C_3(S_c, z_c),$$

где  $z_1 = \rho_1 S_1$ ,  $z_c = \rho_2 (c_\delta S_1 + S_c)$ , а значения функций  $C_1(s, z)$ ,  $C_2(s, z)$ ,  $C_3(s, z)$  определяются по формулам для случая  $S_1 < S_c$ .

2. Если  $f_1 \leq S_1$ , то при выполнении неравенства  $f_3 \leq f_7$  оптимальным решением является:  $s_{omm} = s^0$ ,  $z_{omm} = z^0$ . Минимальные суммарные затраты  $C_{omm} = f_3$  будут при частичной загрузке первого склада, а товар приобретается по цене  $k_1$  за единицу товара.

При выполнении неравенства  $f_3 > f_7$  решением будет  $s_{omm} = S_c$ ,  $z_{omm} = z_c$ . В этом случае первый склад загружается полностью, часть товара для хранения размещается во втором складе и товар приобретается по цене  $k_2$ . Минимальные суммарные затраты равны  $C_{omm} = f_7$ .

3. Если  $f_1 > S_1$  и  $f_2 \leq S_1$ , то при справедливости неравенства  $f_6 \leq f_7$  наилучшим решением будет  $s_{omm} = S_1$ ,  $z_{omm} = z_1$ ,  $C_{omm} = f_6$ . Первый склад загружается полностью, второй склад не используется и товар

закупается по цене  $k_1$ . В противном случае, когда  $f_6 > f_7$ , оптимальным решением является  $s_{onm} = S_c, z_{onm} = z_c, C_{onm} = f_7$ .

4. В случае, когда  $f_1 > S_1$  и  $S_1 \leq f_2 < S_c$ , проверяется условие  $f_6 \leq f_4$ . Если оно верно и справедливо неравенство  $f_4 \leq f_7$ , то наилучшим решением будет  $s_{onm} = S_1, z_{onm} = z_1, C_{onm} = f_6$ . В противном случае, когда верно неравенство  $f_4 > f_7$  при справедливости условия  $f_6 \leq f_7$ , решением является  $s_{onm} = S_1, z_{onm} = z_1, C_{onm} = f_6$ , а при  $f_6 > f_7$  оптимальным решением будет  $s_{onm} = S_c, z_{onm} = z_c, C_{onm} = f_7$ .

5. Если  $f_1 > S_1, S_1 \leq f_2 < S_c$  и верно условие  $f_6 > f_4$ , то проверяется неравенство  $f_4 \leq f_7$ . При его выполнении наилучшим решением является  $s_{onm} = s^*, z_{onm} = z^*$  с суммарными затратами  $C_{onm} = f_4$ . Если же  $f_4 > f_7$ , то в качестве решения берется  $s_{onm} = S_c, z_{onm} = z_c, C_{onm} = f_7$ .

6. Наконец, если  $f_1 > S_1$  и  $f_2 > S_c$ , то следует проверить условие  $f_6 \leq f_5$ . При его выполнении решением задачи является  $s_{onm} = S_1, z_{onm} = z_1, C_{onm} = f_6$ , а в противном случае  $s_{onm} = s^*, z_{onm} = z^*, C_{onm} = f_5$ . В последнем случае первый склад загружается полностью, второй – частично, и товар закупается по цене  $k_2$ .

Рассмотрим второй случай, когда  $S_1 = S_c$  и целевая функция имеет только одну точку разрыва. По-прежнему будем использовать ранее вычисленные постоянные величины  $f_i, i = \overline{1,7}$ .

1. При выполнении неравенства  $f_1 \leq S_1$  проверяется условие  $f_3 \leq f_7$ . Если оно выполняется, то в качестве решения берется  $s_{onm} = s^o, z_{onm} = z^o, C_{onm} = f_3$ . В противном случае решением является  $s_{onm} = S_c, z_{onm} = z_c, C_{onm} = f_7$ .

2. Если  $f_1 > S_1$  и  $f_2 \geq S_1$ , то проверяется выполнение неравенства  $f_6 \leq f_5$ . Когда оно верно, решением задачи будет  $s_{onm} = S_1, z_{onm} = z_1, C_{onm} = f_6$ , а когда не выполняется –  $s_{onm} = s^*, z_{onm} = z^*, C_{onm} = f_5$ .

3. При справедливости неравенств  $f_1 > S_1, f_2 < S_1$  оптимальным решением всегда будет  $s_{onm} = S_1, z_{onm} = z_1$ . Остается проверить условие  $f_6 \leq f_7$  для определения минимальных суммарных затрат. Если последнее неравенство выполняется, то  $C_{onm} = f_6$ , а в противном случае  $C_{onm} = f_7$ .

Наконец, рассмотрим третий случай, когда выполняется условие  $S_1 > S_c$ . Заметим, что в этом случае функции  $C_1, C_2$  имеют общую точку

минимума  $(s^o, z^o)$ . Дополнительно к ранее вычисленным постоянным определяем величины:

$$f_8 = C_2(S_c, z_c), \quad f_9 = C_2(s^o, z^o), \quad f_{10} = C_3(s^*, z^*), \quad f_{11} = C_2(S_1, z_1).$$

1. Если выполняется условие  $f_1 \leq S_c$ , то осуществляется проверка неравенства  $f_2 \leq S_c$ .

2. В случае, когда оно верно, тестируется условие  $f_3 \leq f_8$ . При справедливости этого неравенства в качестве решения принимается  $s_{onm} = s^o, z_{onm} = z^o, C_{onm} = f_3$ , а в противном случае  $s_{onm} = S_c, z_{onm} = z_c, C_{onm} = f_8$ .

3. В том случае, когда  $f_2 > S_c$ , проверяется неравенство  $f_2 \leq S_1$ . Если оно выполняется, то тестируется условие  $f_3 \leq f_8$ . При его справедливости в качестве решения принимается  $s_{onm} = s^o, z_{onm} = z^o, C_{onm} = f_3$ , а иначе  $s_{onm} = S_c, z_{onm} = z_c, C_{onm} = f_8$ .

4. Если выполняется условие  $f_2 > S_1$ , то проверяется условие  $f_3 \leq f_{10}$ . При его справедливости оптимальным решением является  $s_{onm} = s^o, z_{onm} = z^o, C_{onm} = f_3$ , а в противном случае  $s_{onm} = s^o, z_{onm} = z^o, C_{onm} = f_{10}$ .

5. Если  $f_1 > S_c$  и  $f_1 \leq S_1$ , то проверяется условие  $f_2 \leq S_1$  и при его выполнении решением будет  $s_{onm} = s^o, z_{onm} = z^o, C_{onm} = f_9$ . В противном случае тестируется неравенство  $f_9 \leq f_{10}$ . Если оно верно, то решением является  $s_{onm} = s^o, z_{onm} = z^o, C_{onm} = f_9$ , а если оно не выполняется, то за решение задачи берется  $s_{onm} = s^*, z_{onm} = z^*, C_{onm} = f_{10}$ .

6. Если при  $f_1 > S_c$  справедливо  $f_1 > S_1$ , то выполняется проверка неравенства  $f_2 \leq S_1$ . В случае его справедливости оптимальным решением задачи будет  $s_{onm} = S_1, z_{onm} = z_1, C_{onm} = f_{11}$ . В противном случае, т.е. при  $f_2 > S_1$ , проверяется условие  $f_{11} \leq f_{10}$ . Если оно выполняется, то решение  $s_{onm} = S_1, z_{onm} = z_1, C_{onm} = f_{11}$ , а иначе  $s_{onm} = s^*, z_{onm} = z^*, C_{onm} = f_{10}$ .

### Численные примеры

**Задача 1.** Имеются следующие исходные данные по управлению запасами на двух складах:  $T = 2$  года,  $Q = 480$  тонн,  $g = 1000$  руб,  $k_1 = 10$  руб,  $k_2 = 9$  руб,  $c_1 = 20$  руб,  $c_2 = 30$  руб,  $c_0 = 25$  руб,  $a_1 = 1000$  руб,  $a_2 = 1500$  руб,  $S_1 = 6000$  кг,  $S_c = 10000$  кг.

В данном случае  $S_1 < S_c$  и реализуется первая схема описанного алгоритма. С этой целью вычисляются следующие величины:  $\rho_1 = 0,555$ ,  $\rho_2 = 0,454$ ,  $c_\delta = 0,400$ ,  $f_1 = s^o = 6572,67$  (кг),  $z^o = 3651,45$  (кг),  $z_c = 5636,36$  (кг),  $f_2 = s^* = 7042,73$  (кг),  $z^* = 4292,15$  (кг),  $f_3 = 4947059$  (руб),  $f_4 = 4939057$  (руб),  $f_6 = 4947666$  (руб),  $f_7 = 4433772$  (руб).

Поскольку выполняются неравенства  $f_1 = 6572,67 > S_1 = 6000$ ,  $S_1 < f_2 < S_c = 10000$  и  $f_6 > f_4$ , то в соответствии с п. 5 алгоритма проверяется неравенство  $f_4 \leq f_7$ . Так как оно не выполняется, то в качестве оптимального решения берется  $s_{opt} = S_c = 10000$  (кг),  $z_{opt} = z_c = 5636,36$  (кг),  $C_{opt} = f_7 = 4433772$  (руб). Здесь нужно воспользоваться преимуществами предоставляемой скидки и партию товара приобрести в объеме порогового значения  $S_c = 10000$  (кг).

**Задача 2.** Рассмотрим задачу управления товарными запасами на двух складах для следующих исходных данных:  $T = 3$  года,  $Q = 360$  тонн,  $g = 2000$  руб,  $k_1 = 1$  руб,  $k_2 = 0,9$  руб,  $c_1 = 80$  руб,  $c_2 = 90$  руб,  $c_\delta = 70$  руб,  $a_1 = 2500$  руб,  $a_2 = 3000$  руб,  $S_1 = S_c = 3000$  кг.

Выполняется условие  $S_1 = S_c$  и используется вторая схема описанного алгоритма. Для этого вычисляются следующие величины:  $\rho_1 = 0,467$ ,  $\rho_2 = 0,437$ ,  $c_\delta = 0,1428$ ,  $f_1 = s^o = 3585,69$  (кг),  $z^o = 1673,32$  (кг),  $z_c = 1500,00$  (кг),  $f_2 = s^* = 3670,99$  (кг),  $z^* = 1793,56$  (кг),  $f_3 = 764096$  (руб),  $f_5 = 737551$  (руб),  $f_6 = 771250$  (руб).

В данном случае верны неравенства  $f_1 > S_1 = 3000$  и  $f_2 > S_1$ . Поэтому по п. 2 второй схемы алгоритма проверяется неравенство  $f_6 \leq f_5$ . Оно не выполняется, отсюда наилучшим решением является  $s_{opt} = s^* = 3670,99$  (кг),  $z_{opt} = z^* = 1793,56$  (кг),  $C_{opt} = f_5 = 737551$  (руб). Для хранения товара используются оба склада и товар приобретается по цене 0,9 руб за единицу товара.

**Задача 3.** Имеются следующие исходные данные в задаче управлении запасами на двух складах:  $T = 2$  года,  $Q = 200$  тонн,  $g = 2000$  руб,  $k_1 = 2$  руб,  $k_2 = 1,9$  руб,  $c_1 = 100$  руб,  $c_2 = 120$  руб,  $c_\delta = 130$  руб,  $a_1 = 2500$  руб,  $a_2 = 3000$  руб,  $S_1 = 2800$  кг,  $S_c = 2500$  кг.

В этом случае требуется воспользоваться третьей схемой алгоритма, поскольку выполняется условие  $S_1 > S_c$ .

Вычисляются следующие величины:  $\rho_1 = 0,565$ ,  $\rho_2 = 0,520$ ,  $c_\delta = 0,1428$ ,  $f_1 = s^o = 2660,25$  (кг),  $z^o = 1508,62$  (кг),  $z_c = 1524,00$  (кг),  $f_2 = s^* = 2759,78$  (кг),  $z^* = 1659,09$  (кг),  $f_3 = 703223,8$  (руб),

$f_4 = 684246,9$  (руб),  $f_5 = 696680,2$  (руб),  $f_6 = 704397,1$  (руб),  
 $f_7 = 667237,1$  (руб),  $f_9 = 592094,9$  (руб),  $f_{10} = 683223,8$  (руб),  
 $f_{11} = 696680,2$  (руб),  $f_{12} = 684397,1$  (руб).

Из приведенных данных видно, что выполняются неравенства:

$$f_1 > S_c, f_1 < S_1, f_2 < S_1.$$

В соответствие с п. 5 третьей схемы алгоритма оптимальным решением является  $s_{opt} = s^o = 2660,25$  (кг),  $z_{opt} = z^o = 1508,62$  (кг),  
 $C_{opt} = f_9 = 592094$  (руб).

В данном случае для хранения товара используется только часть первого склада, и товар приобретается по цене 1,9 руб.

### Литература

1. Талызин В.А. Модель управления товарными запасами с центральным складом // Материалы межвуз. научно-практ. конф. «Современная торговля: теория и практика», ч. 2. - Казань: КИ РГТЭУ, 2005. - С. 227-229.
2. Талызин В.А., Кедун О.А. Управление товарными запасами на нескольких складах при переменной цене товара // Материалы межвуз. научно-практ. конф. «Современная торговля: теория и практика». - Казань: КИ РГТЭУ, 2006. - С. 265-267