А. С. Маркус, В. И. Мацаев, Базисность подсистемы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 1, 82–83

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 82—83

УДК 513.83

БАЗИСНОСТЬ ПОДСИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

А. С. Маркус, В. И. Мацаев

1. В различных задачах математической физики возникает необходимость рассмотрения разложений по некоторой подсистеме собственных и присоединенных векторов (с.п.в.) квадратичного операторного пучка

$$L(\lambda) = A + \lambda I + \lambda^2 B \qquad (A^* = A,\ B^* = B) \tag{1}$$

или голоморфной оператор-функции

$$L(\lambda) = A + \lambda I + \lambda^2 B(\lambda) \qquad (A^* = A,\ (B(\lambda))^* = B(\bar\lambda)). \tag{2}$$

Этим вопросам посвящено большое число работ, из которых мы укажем [1—14]. В предположении, что оператор A компактен и выполнено некоторое дополнительное ограничение (например, $4\|A\|\,\|B\| < 1$ для пучка (1)), можно утверждать, что собственные векторы (с.в.) $L(\lambda)$, отвечающие собственным значениям (с.з.), расположенным на определенном интервале $(-r, r)$, образуют безусловный базис рассматриваемого гильбертова пространства. В настоящей работе устанавливается, что при отказе от дополнительных ограничений система с.в. оператор-функции (2), отвечающих с.з., расположенным на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, образует безусловный базис в некотором подпространстве с конечным дефектом. Для пучка (1) получены более полные результаты. В частности, с помощью методов работы [15] указывается, какие с.п.в. пучка надо добавить к указанной выше системе, чтобы получить базис всего пространства.

Авторы благодарны Н. Д. Копачевскому, привлекшему их внимание к рассмотренным здесь задачам.

2. Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство и $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ — множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$. Будем писать $H \gg 0$, если $H \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и $H \geqslant \delta I$ при некотором $\delta > 0$. Для оператора $H = H^* \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ положим $|H| = (H^2)^{1/2}$, $H_\pm = (|H| \pm H)/2$.

Если $M(\lambda)$ — оператор-функция со значениями в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, голоморфная в некоторой области U, то *кратностью* ее с.з. $\lambda_0 \in U$ называется количество векторов в *канонической системе* с.п.в., отвечающей λ_0 [16]. Предположим, что область U симметрична относительно вещественной оси, а оператор-функция $M(\lambda)$ является *самосопряженной*, т. е. $(M(\lambda))^* = M(\bar\lambda)$ $(\lambda \in U)$. Пусть существует отрезок $[a, b] \subset U \cap \mathbf{R}$ такой, что $M'(\lambda) \gg 0$ при $a \leqslant \lambda \leqslant b$, и для некоторого $c \in (a, b)$ оператор $M(c)$ компактен. Нетрудно показать, что при этих условиях $M(\lambda)$ имеет в некоторой меньшей окрестности U_0 отрезка $[a, b]$ только вещественный спектр, который либо конечен (если $\dim M(c) < \infty$), либо представляет из себя последовательность, сходящуюся к c (если $\dim M(c) = \infty$). Каждая точка спектра $\lambda \in U_0$ $(\lambda \neq c)$ является с.з. конечной кратности, причем с.з. из U_0 не отвечают присоединенные векторы.

Теорема 1. *Система с.в. $M(\lambda)$, отвечающих с.з., расположенным на отрезке $[a, b]$, образует безусловный базис в некотором подпространстве $\mathfrak{N}$ с конечным дефектом. Если операторы $M(a)$ и $M(b)$ обратимы, то* $\dim(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}) = \dim M(a)_+ + \dim M(b)_-$.

Поясним, что указанная в теореме 1 система получается объединением ортонормированных базисов всех собственных подпространств $\operatorname{Ker} M(\lambda_k)$ $(\lambda_k \in [a, b])$.

Для случая $M(a)_+ = M(b)_- = 0$ (т. е. $M(a) < 0$, $M(b) > 0$) теорема 1 содержится в [9; 11].

Следствие 1. *Пусть $M(\lambda)$ — голоморфная в окрестности нуля самосопряженная оператор-функция. Если $M'(0) \gg 0$ и оператор $M(0)$ компактен, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ система с.в. $M(\lambda)$, отвечающих с.з., расположенным на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, образует безусловный базис в некотором подпространстве с конечным дефектом.*

Очевидно, условия следствия 1 выполнены для оператор-функции (2) с компактным оператором A.

3. Далее приводятся дополнения к результатам п. 2, которые можно получить для пучка (1) с компактными операторами A и B. С.в. h пучка $L(\lambda)$, отвечающий вещественному с.з. λ_0, назовем *позитивным* (*негативным*), если $(L'(\lambda_0)h, h) > 0$ (< 0). Вещественное с.з. называется *позитивным* (*негативным*), если таковыми являются все с.в., ему отвечающие. Если с.з. $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ не является ни позитивным, ни негативным, то оно называется *нейтральным*. (Эта терминология несколько отличается от принятой в [4; 17].)

Как известно (см., например, [5]), при указанных условиях спектр $L(\lambda)$ не более чем счетен и может иметь лишь две предельные точки 0 и ∞. Точка 0 (∞) является предельной тогда и только тогда, когда $\dim A = \infty$ ($\dim B = \infty$). Все точки спектра $\neq 0$ являются с.з. конечной кратности. Пучок $L(\lambda)$ может иметь лишь конечное число невещественных и нейтральных с.з., и все они лежат в кольце $(2\|B\|)^{-1} \leqslant |\lambda| \leqslant 2\|A\|$. Все с.з., удовлетворяющие условию $|\lambda| < (2\|B\|)^{-1}$ ($|\lambda| > 2\|A\|$), являются позитивными (негативными). Присоединенные векторы могут отвечать лишь невещественным и нейтральным с.з.

Теорема 2. *Пусть пучок $L(\lambda)$ не имеет нейтральных с.з. Если невещественный спектр $L(\lambda)$ произвольным образом разбит на две симметричные относительно вещественной оси части Λ и Λ^*, то пучок $L(\lambda)$ допускает факторизацию $L(\lambda) = (\lambda B + I + BZ)(\lambda I - Z)$, где спектр оператора Z ($\in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$) состоит из 0, позитивных с.з. $L(\lambda)$ и множества Λ, а спектр пучка $\lambda B + I + BZ$ — из негативных с.з. $L(\lambda)$ и множества Λ^*.*

4. Рассмотрим теперь общий случай, когда у пучка $L(\lambda)$ имеются и нейтральные с.з. Каждому такому с.з. отвечает *нормальная каноническая система* с.п.в. в смысле Костюченко — Шкаликова [15] $y_j^0, y_j^1, \ldots, y_j^{p_j}$ ($j = 1, \ldots, N$). Следуя [15, с. 52], составим из нее две подсистемы:

$$y_j^0,\ y_j^1,\ \ldots,\ y_j^{\varkappa_j^+} \qquad (j = 1, \ldots, N), \tag{3}$$

$$y_j^0,\ y_j^1,\ \ldots,\ y_j^{\varkappa_j^-} \qquad (j = 1, \ldots, N). \tag{4}$$

Разобьем как-либо невещественный спектр $L(\lambda)$ на две симметричные относительно вещественной оси части Λ и Λ^*. Назовем *первой* (*второй*) *подсистемой* с.п.в. пучка $L(\lambda)$ последовательность, полученную объединением позитивных (негативных) с.в., канонических систем с.п.в., отвечающих числам из Λ (Λ^*), и систем (3) (4)), отвечающих нейтральным с.з. Поясним, что в число негативных с.в. мы включаем ортонормированный базис $\operatorname{Ker} B$.

Теорема 3. *Первая* (*вторая*) *подсистема с.п.в. пучка $L(\lambda)$ является безусловным базисом пространства $\mathfrak{H}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shinbrot M.* // Proc. Amer. Math. Soc.— 1963.— V. 14.— P. 552—559. 2. *Аскеров Н. Г., Крейн С. Г., Лаптев Г. И.*// ДАН СССР.—1964. Т. 155, № 3.— С. 499—502. 3. *Крейн С. Г.*// ДАН СССР.—1964. Т. 159, № 2.— С. 262—265. 4. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* // Труды межд. симп. по прил. теории функций в механике сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1965. С. 283—322. 5. *Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лаптев Г. И.*// Функцион. анализ и его прил.— 1968. Т. 2, вып. 2.— С. 21—31. 6. *Turner R. E. L.*// J. Funct. Anal.— 1968. V. 2.— P. 297—322. 7. *Маркус А. С.* // Функцион. анализ и его прил.— 1971.— Т. 5, вып. 4.— С. 78—79. 8. *Маркус А. С., Мацаев В. И., Руссу Г. И.*// Acta sci. math.—1973. V. 34.— P. 245—271. 9. *Langer H.* // Acta sci. math.—1973. V. 35.— P. 73 — 86. 10. *Радзиевский Г. В.* // Мат. сб.—1973. Т. 91, № 3.— С. 310—335. 11. *Вирозуб А. И., Мацаев В. И.* // Функцион. анализ и его прил.—1974. Т. 8, вып. 1.— С. 1—10. 12. *Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей. Препринт ФТИНТ АН УССР 33—77. Харьков: ФТИНТ, 1978. 13. *Копачевский Н. Д.* Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости. Препринт ФТИНТ АН УССР 38—77. Харьков: ФТИНТ, 1978. 14. *Копачевский Н. Д.* // Функцион. анализ и его прил.—1981, Т. 15, вып. 2.— С. 77—78. 15. *Костюченко. А. Г., Шкаликов А. А.* // Функцион. анализ и его прил.—1983, Т. 17, вып. 2.— С. 38—61. 16. *Келдыш М. В.* // УМН.—1971. Т. 26, вып. 4.— С. 15—41. 17. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* // Функцион. анализ и его прил.— 1975. Т. 9, вып. 4.— С. 28—40.

Институт математики с ВЦ АН МССР
Отделение института химической физики АН СССР

Поступило в редакцию
3 июня 1985 г.