А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
СЕМИНАР

Том 6
Выпуск 3 РУКОВОДИТЕЛЬ А.И.МАЛЬЦЕВ 1967 г.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ МОСТОВСКОГО-ЭРЕНФОЙХТА

А.Д.ТАЙМАНОВ

В [1] А.Мостовский и А.Эренфойхт доказали следующую теорему. Если аксиоматизируемый класс K алгебраических систем содержит бесконечную модель, то для любого упорядоченного множества I существует в классе K модель $\mathfrak{M}_E$ такая, что основное множество M системы $\mathfrak{M}_E$ содержит I и группа $aut(I)$ автоморфизмов множества I содержится в группе $aut(\mathfrak{M}_E)$ автоморфизмов системы $\mathfrak{M}_E$.

Простое доказательство этой теоремы дано в [2] . Представляет интерес замена условия аксиоматизируемости класса K более слабым условием. Цель заметки - дать один из вариантов ослабления этого условия. Основные понятия взяты из обзорной работы А.И.Мальцева [4] .

Пусть дан абстрактный класс K алгебраических систем (замкнутый относительно изоморфизма), содержащий бесконечную модель $\mathfrak{M}$.

Пусть $[\mathfrak{M}]$ - класс всех моделей элементарно эквивалентных системе $\mathfrak{M}$. Класс $[\mathfrak{M}]$ аксиоматизируем и по теореме Мостовского-Эренфойхта содержит модель $\mathfrak{M}_E$ такую, что $aut(I)\subset aut(\mathfrak{M}_E)$.

По теореме Кислера [3] существуют множество $\mathcal{J}$ и ультрафильтр E над $\mathcal{J}$ такие, что $\mathfrak{M}^{<\mathcal{J},E>}$ изоморфно $\mathfrak{M}_E^{<\mathcal{J},E>}$.

Тогда

$$aut(I)\subset aut(\mathfrak{M}_E)\subset aut(\mathfrak{M}_E^{<\mathcal{J},E>})$$

и

$$aut(\mathfrak{M}^{\langle \mathcal{I},E\rangle}) \text{ изоморфно } aut(\mathfrak{M}_E^{\langle \mathcal{I},E\rangle}),$$

$$aut(I) \subset aut(\mathfrak{M}^{\langle \mathcal{I},E\rangle}).$$

Если $\mathfrak{M}^{[\mathcal{I},E]} \in K$, то в K найдется модель с достаточно богатой группой автоморфизмов. Отсюда видно, что теорему Мостовского - Эренфойхта можно сформулировать так:

Если верна обобщенная континуум-гипотеза и класс K содержит бесконечную модель $\mathfrak{M}$ и все её ультрастепени, то для любого упорядоченного множества I найдется в K модель $\mathfrak{M}_E = \langle M, \sigma \rangle$ такая, что $I \subseteq M$

$$aut(I) \subset aut(\mathfrak{M}_E).$$

Это простое замечание расширяет область применимости теоремы.

Например, теорема применима, если K удовлетворяет одному из следующих условий:

1) замкнут относительно ультрастепени,
2) замкнут относительно ультрапроизведений,
3) проективный класс,
4) дополнение аксиоматизируемого класса,
5) редукционный класс,
6) проективно редукционный класс.

Другой вариант ослабления условия теоремы дан А.И.Омаровым.

Поступила в редакцию
24. У. 1967 г.

Литература

1. A.Ehrenfeucht, A.Mostowski. Models of axiomatic theories admitting automorphisms. Fund.,Math.,(1956) 43, N1,50 - 68.

2. Б.И.Плоткин. Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966.

3. J.Keisler. Ultraproducts and Saturated models.Proc.,Koninkl. Nederl,Akad.,Wetensch.,1964,67,N2,178-186.

4. А.И.Мальцев. Некоторые вопросы теории классов моделей. - Труды четвертого Всесоюзного математического съезда, 1963, т. 1, стр. 69-198.

REMARKS TO MOSTOVSKI-EHRENFEUCHT THEOREM

A.D.Taimanov (Novosibirsk)

(Summary)

It is given the strengthening of Mostovski-Ehrenfeucht 's theorem on the models which admit a non-trivial automorphisms.