

УДК 517.928

## АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ БЛОХА ДЛЯ МОДЕЛИ ЯДЕРНОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ<sup>1</sup>

Л. А. Калякин

Рассмотрена система трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, известная в теории ядерного магнетизма под названием уравнения Блоха. Система содержит четыре безразмерных параметра в качестве коэффициентов. Исследованы положения равновесия и их устойчивость в зависимости от этих параметров. Обнаружена возможность появления двух устойчивых положений равновесия. При отсутствии диссипации уравнения интегрируются. Для задачи с малой диссипацией вдали от равновесия построены приближенные решения методом усреднения.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, равновесие, диссипация, устойчивость, асимптотика, усреднение.

L. A. Kalyakin. Analysis of the Bloch equations for the nuclear magnetization model.

We consider a system of three ordinary first-order differential equations known in the theory of nuclear magnetism as the Bloch equations. The system contains four dimensionless parameters as coefficients. Equilibrium states and the dependence of their stability on these parameters is investigated. The possibility of the appearance of two stable equilibrium states is discovered. The equations are integrable in the absence of dissipation. For the problem with small dissipation far from equilibrium, approximate solutions are constructed by the method of averaging.

Keywords: nonlinear equations, equilibrium, dissipation, stability, asymptotics, averaging.

### 1. Введение

**Постановка задачи.** Цель данной статьи — асимптотический анализ уравнений Блоха для модели ядерной намагниченности. Основным объектом исследования является система трех уравнений, описывающая динамику вектора намагниченности [1–3]. Эти уравнения, записанные в цилиндрических координатах, имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -h z \sin \psi - b_2 \rho, & \frac{dz}{dt} &= h \rho \sin \psi - (z - 1)b_1, \\ \rho \left[ \frac{d\psi}{dt} - \Omega + z \right] &= -h z \cos \psi; & \rho > 0, & \quad z \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Коэффициенты диссипации  $b_1, b_2 \geq 0$  считаются неотрицательными по их физическому смыслу. Коэффициент  $h \geq 0$  характеризует амплитуду внешнего поля; в случае постоянного значения его можно считать неотрицательным ввиду инвариантности уравнений при замене  $h \Rightarrow -h$ ,  $\psi \Rightarrow \psi + \pi$ . Величина  $\Omega$  (произвольного знака) соответствует частоте внешнего поля.

Формально уравнения (1.1) не пригодны при  $\rho = 0$  из-за вырождения и должны быть дополнены условиями скачка для угла  $\psi$  при переходе через граничное значение  $\rho = 0$ . Особенность, однако, является фиктивной и обязана использованию цилиндрических координат. В декартовых координатах  $x, y, z$  при  $x = \rho \cos \psi$ ,  $y = \rho \sin \psi$  уравнения не содержат никаких особенностей:

$$\frac{dx}{dt} = -y(\Omega - z) - b_2 x, \quad \frac{dy}{dt} = -h z + x(\Omega - z) - b_2 y, \quad \frac{dz}{dt} = h y - (z - 1)b_1. \tag{1.2}$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00186, 11-02-97003).

Поэтому условие скачка, соответствующее гладкости траектории, имеет вид

$$|\psi(t+0) - \psi(t-0)| = \pi \quad \text{при} \quad r(t) = 0.$$

Обсуждаемые ниже результаты и форма изложения ориентированы на физиков и вычислителей, имеющих дело с математическими моделями магнитодинамики.

**Происхождение уравнений.** Основой теории магнитодинамики на уровне макроскопической модели является представление магнитного момента как аналога момента количества движения для классического волчка [5, с. 17]. Такое представление приводит к уравнениям движения для вектора намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{t})$  в виде

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -[\mathbf{M}, \mathbf{H}]. \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{H}$  — эффективное магнитное поле, задание которого определяет модель рассматриваемого явления. Поскольку это поле зависит от намагниченности, то уравнения оказываются нелинейными. Для моделей ферромагнетиков считается приемлемым использование поля Вейсса с линейной зависимостью от  $\mathbf{M}$ ; обычно берется  $\mathbf{H} = \Lambda \mathbf{M} + \mathbf{h}$ , где  $\Lambda = \text{const}$ ,  $\mathbf{h}$  — внешнее поле. Независимо от вида  $\mathbf{H}$  уравнения (1.3) имеют первый интеграл — закон сохранения модуля вектора намагниченности  $|\mathbf{M}(t)| = \text{const}$ . Это позволяет свести систему к паре уравнений первого порядка, например для двух углов в сферических координатах. В итоге математическая модель оказывается нелинейным осциллятором, и почти все движения представляют собой периодические колебания на сфере радиуса  $|\mathbf{M}|$  (см. рис. 1, 2).

Современные исследования задач магитодинамики имеют дело с более сложными уравнениями, в которых учитывается диссипация. Учет диссипативных эффектов в феноменологических моделях производится разными способами, в зависимости от представлений о физике явления (см. [5, с. 26; 6]). Одна из наиболее известных диссипативных моделей описывается уравнениями Ландау — Лифшица. В случае изотропного ферромагнетика они имеют вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -[\mathbf{M}, \mathbf{H}] - \frac{\beta}{\mathbf{M}^2}[\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}]], \quad \beta = \text{const} > 0.$$

В такой системе остается первый интеграл  $|\mathbf{M}(t)| = \text{const}$ . Диссипация ведет к затуханию колебаний вектора  $\mathbf{M}(t)$  при сохранении его длины. Асимптотика решений для этой модели анализировалась в [7].

В теории ядерной намагниченности используется другая модель диссипации, предложенная Блохом [1]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -[\mathbf{M}, \mathbf{H}] - (B \mathbf{M} - \chi \mathbf{h}), \quad (B, \chi = \text{const}). \quad (1.4)$$

В этом случае, как правило, уравнения не имеют первого интеграла. Если, например,  $B$  — положительная диагональная матрица, то модуль вектора намагниченности  $|\mathbf{M}(t)|$  не сохраняется. При выборе диссипации в такой форме происходит не только затухание колебаний, но и стабилизация величины намагниченности к значению, которое определяется внешним полем. Такая система анализируется в данной работе.

Структура исходных уравнений зависит от выбора вектора  $\mathbf{H}$ . Мы рассматриваем модель, принятую для ферромагнетика [2; 3] во внешнем поле, которое определяется вектором  $\mathbf{h} = (h_0(\cos \Phi, \sin \Phi), h_3)$ . Величины  $h_0, h_3$  задают поперечную и продольную амплитуды поля, а фаза  $\Phi = \Phi(t)$  соответствует вращению поперечной компоненты с частотой  $\Omega = \Phi'(t)$ . Рассматривается случай, когда продольная компонента направлена вдоль оси легкого намагничивания. После подходящей нормировки переменных уравнения (1.4) приводятся к виду (1.1) в цилиндрической системе координат, вращающейся с частотой  $\Omega$  [4].

**Результаты.** При отсутствии диссипации и внешнего поля, когда  $b_1 = b_2 = 0$  и  $h = 0$ , система (1.1) становится тривиальной:  $\dot{\rho} = 0$ ,  $\dot{z} = 0$ ,  $\dot{\psi} = -z$ . Решения этих уравнений

описывают вращение вектора намагниченности вокруг оси  $0z$  с частотой  $-z = \text{const}$ . Слагаемое  $-z$  в фазовом уравнении принято называть динамическим сдвигом частоты. Оно описывает зависимость периода собственных колебаний от траектории движения. В теории динамических систем такое свойство (неизохронность) отражает существенную нелинейность системы.

Направление вдоль оси  $0z$  при  $\rho=0$ ,  $z=1$  соответствует положению равновесия (основному состоянию)  $x = y = 0$ ,  $z = 1$ . Это будет устойчивое равновесие в диссипативной системе при отсутствии накачки, когда  $h = 0$ .

Как уже было указано, при отсутствии диссипации, когда  $b_1 = b_2 = 0$ , имеется первый интеграл — модуль вектора намагниченности:  $\mathcal{M} = \sqrt{\rho^2(t) + z^2(t)} = \text{const}$ . В автономном случае (при  $h, \Omega = \text{const}$ ) выписывается дополнительный интеграл (энергии). Таким образом, бездиссипативная автономная система полностью интегрируется.

При наличии диссипации уравнения (1.1) не интегрируются. В автономном случае они содержат четыре безразмерных параметра  $h, \Omega, b_1, b_2 = \text{const}$ . В первой части работы исследуется структура решения в зависимости от этих параметров. В частности, выявляются положения равновесия и анализируется их устойчивость.

Если система не автономная, то коэффициенты содержат дополнительный параметр  $\varepsilon$ , характеризующий скорость их изменения:  $h = h(\varepsilon t)$ ,  $\Omega = \Omega(\varepsilon t)$ . Рассматривается обычная для приложений ситуация, когда эта скорость мала по сравнению с собственной (ЯМР) частотой вблизи равновесия:  $0 < \varepsilon \ll 1$  и, кроме того, мала диссипация:  $b_1 \approx b_2 = \varepsilon$ . Для решения строится асимптотика по малому параметру  $\varepsilon \rightarrow 0$ , пригодная до времен  $t \approx \varepsilon^{-1}$ . Подобная задача для уравнений Ландау — Лифшица была исследована методом усреднения в [7]. Такой способ годится для уравнений Блоха (1.1) и реализуется во второй части работы. При этом анализируются колебания большой амплитуды вдали от равновесия.

## 2. Теорема существования

Чтобы обсуждаемые в данной статье результаты могли претендовать на математическую строгость, следует установить глобальное существование для любого решения. В рассматриваемой системе доказательство такого свойства опирается на наличие диссипации. Для уравнений в форме (1.2) рассматривается решение, фиксированное начальной точкой  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ .

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты  $b_1, b_2, h, \Omega(t)$  уравнений (1.2) являются непрерывными функциями на всей оси  $t \in \mathbb{R}$ . Если коэффициенты диссипации строго положительны:  $b_1, b_2(t) \geq m > 0 \forall t$ , то любое решение существует глобально на полуоси  $t_0 \leq t < \infty$ .

**Доказательство.** Свойство ограниченности амплитуды  $\mathcal{M}(t) = \sqrt{\rho^2(t) + z^2(t)}$  на любом конечном отрезке  $t \in [t_0, T]$  вдоль рассматриваемой траектории лежит в основе продолжения решения на неограниченный промежуток.

Предположим от противного, что существует возрастающая ограниченная последовательность моментов времени  $t_n \uparrow T < \infty$ , вдоль которой квадрат амплитуды неограниченно растет:  $\mathcal{M}^2(t_n) = \rho^2(t_n) + z^2(t_n) \rightarrow \infty$ . Из соображений гладкости траектории без ограничения общности можно считать, что производная в этих точках не отрицательна  $d\mathcal{M}^2(t_n)/dt \geq 0$ . Если это не так, то момент  $t_n$  можно сместить влево, не уменьшая значение  $\mathcal{M}^2(t_n)$ , так чтобы производная стала неотрицательной.

С другой стороны, в силу дифференциальных уравнений (1.1) имеем тождество  $d\mathcal{M}^2/dt = -2b_2\rho^2 - 2b_1z(z-1)$ . В частности, в рассматриваемых точках  $t_n$  получаем

$$\frac{d\mathcal{M}^2}{dt}(t_n) = -2b_2\rho^2(t_n) - 2b_1z(t_n)[z(t_n) - 1].$$

Если последовательность  $z(t_n)$  ограничена, то не ограничена  $\rho(t_n)$ , и в таком случае

$$\frac{d\mathcal{M}^2(t_n)}{dt} \rightarrow -\infty.$$

Если последовательность  $z(t_n)$  не ограничена, то можно считать  $|z(t_n)| < z^2(t_n)$ , и тогда  $dM^2(t_n)/dt \rightarrow -\infty$ . Следовательно, в любом случае получается противоречие со свойством  $dM^2(t_n)/dt \geq 0$ . Это противоречие показывает, что предположение о неограниченности амплитуды не верно. После этого существование глобального решения вытекает из известных результатов [8, с. 13]. Теорема доказана.

### 3. Интегрирование бездиссипативной системы

При отсутствии диссипации, когда  $b_1, b_2 = 0$ , система (1.1) имеет первый интеграл  $M^2 \equiv \rho^2(t) + z^2(t) = \text{const}$ . Поэтому фазовое пространство  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  расслаивается на сферы радиуса  $M$ . Если, кроме того, коэффициенты оказываются постоянными  $h, \Omega = \text{const}$ , то имеется еще один первый интеграл:  $E \equiv z^2/2 - \Omega z - h\rho \cos \psi = \text{const}$ , который условно можно назвать энергией. В этом случае почти все траектории представляют собой замкнутые кривые, лежащие на различных сферах. Помимо таких траекторий имеются неподвижные точки, которых на каждой сфере может быть от двух до четырех, и, возможно, пара сепаратрисных петель (незамкнутых траекторий), которые выходят из седловой точки (см. рис. 1, 2).

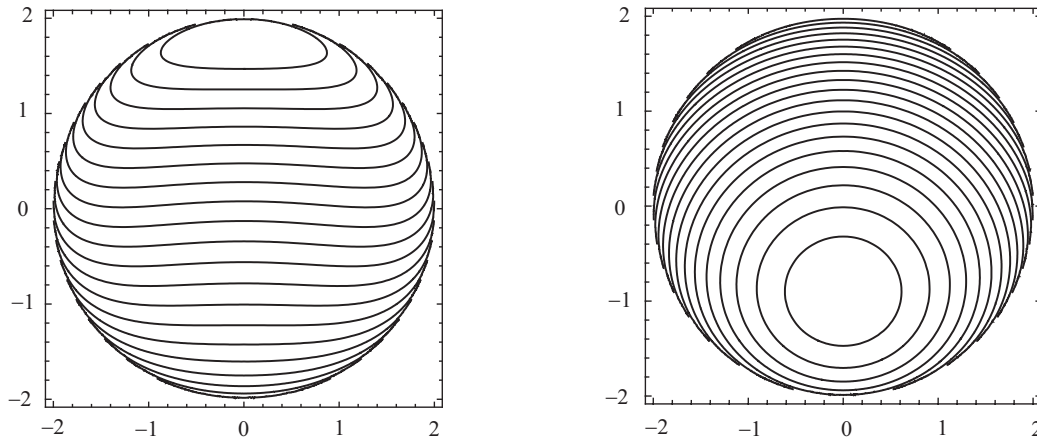


Рис. 1. Проекция фазового портрета бездиссипативной автономной системы на плоскость  $x, y$  с верхней и нижней полусферы. При  $h = 3.44$ ,  $\Omega = 1.53$ ,  $M = 2$  имеется две неподвижные точки.

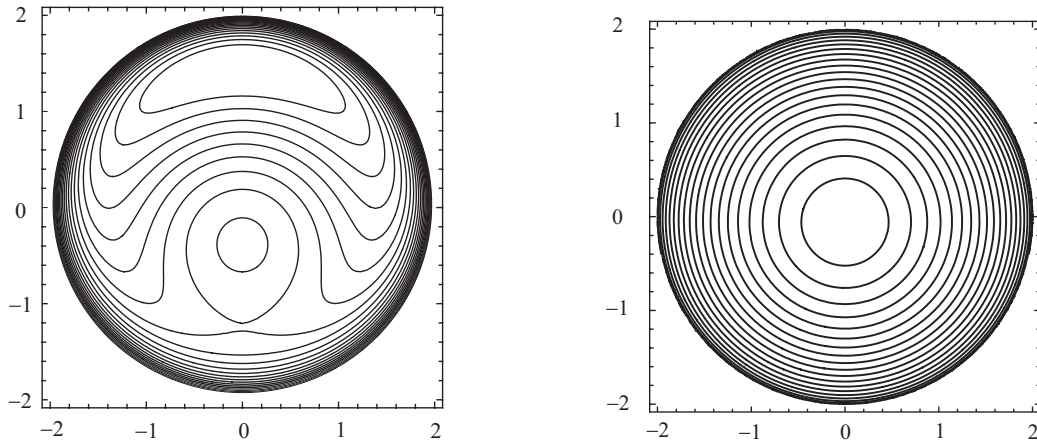


Рис. 2. Проекция фазового портрета бездиссипативной автономной системы на плоскость  $x, y$  с верхней и нижней полусферы. При  $h = 0.2$ ,  $\Omega = 1.44$ ,  $M = 2$  имеются четыре неподвижные точки и две сепаратрисные петли.

Замкнутые траектории соответствуют трехпараметрическому семейству периодических решений, которые обозначим

$$\rho = \rho_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2), \quad z = z_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2), \quad \psi = \psi_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2), \quad (t_0, E, \mathcal{M}^2 = \text{const}).$$

Ввиду наличия двух интегралов для одной из функций выписывается скалярное уравнение; например,

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{h^2(\mathcal{M}^2 - z^2) - (E + \Omega z - z^2/2)^2}. \quad (3.1)$$

Интегрируя его, получаем соотношение

$$\int_{\zeta_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{h^2(\mathcal{M}^2 - \zeta^2) - (E + \Omega\zeta - \zeta^2/2)^2}} = \pm(t + t_0), \quad \zeta_0, t_0 = \text{const}, \quad (3.2)$$

которое представляет решение  $z = z_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2)$  через обратную функцию. Остальные компоненты  $\rho, \psi$  вектора намагниченности выражаются через  $z$  из первых интегралов.

При наличии неавтономности либо диссипации никаких представлений для точного решения, хотя бы в виде интегралов, не известно. Ниже обсуждается возможность построения приближенного решения при условии малой диссипации и медленного изменения коэффициентов. Методика получения таких приближений с использованием выписанных невозмущенных периодических решений известна и обычно ассоциируется с термином “усреднение” [9]. В случае гамильтоновых систем такие приближения иногда называют адиабатическими [10].

#### 4. Неподвижные точки

Чтобы отчетливо представлять себе роль диссипативных слагаемых в модели Блоха, полезно проанализировать неподвижные точки полной системы (1.1) и сравнить их с неподвижными точками бездиссипативной системы.

##### 4.1. Неподвижные точки для системы Блоха

Исходные уравнение для неподвижных точек в цилиндрических координатах имеют вид

$$h z \sin \psi + b_2 \rho = 0, \quad h \rho \sin \psi + b_1(1 - z) = 0, \quad (z - \Omega)\rho + h z \cos \psi = 0. \quad (4.1)$$

Здесь коэффициенты считаются постоянными параметрами:  $h, \Omega, b_1, b_2 = \text{const}$ .

При отсутствии внешнего поля, когда  $h = 0$ , существует единственное решение  $\rho = 0, z = 1$ , которое соответствует основному состоянию с компонентами  $x = y = 0, z = 1$ .

При наличии внешнего поля, когда  $h \neq 0$ , можно отделить два уравнения для амплитуд:

$$z^2 h^2 = \rho^2 [b_2^2 + (z - \Omega)^2], \quad b_2 \rho^2 = b_1 z(1 - z). \quad (4.2)$$

Здесь при  $\rho = 0$  появляется лишний корень с  $z = 0$ , который не соответствует никакому решению уравнений (4.1). Поэтому система (4.1) рассматривается при  $\rho \neq 0$ . Посредством (4.2) она приводится к алгебраическому уравнению третьего порядка для координаты  $z$ :

$$P(z) \equiv (z - 1)[\varepsilon^2 + \eta + (z - \Omega)^2] + \eta = 0 \quad (4.3)$$

с коэффициентами  $\varepsilon = b_2 > 0, \eta = h^2/b > 0$  и  $b = b_1/b_2 > 0$ . Поскольку полином  $P(z) < 0$  при  $z \leq 0$  и  $P(z) > 0$  при  $z \geq 1$ , то корни могут быть лишь на промежутке  $0 < z < 1$ .

Число действительных корней, как известно, определяется знаком дискриминанта  $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$ , где  $q = -2(2\Omega + 1)^3/27 + (\varepsilon^2 + \eta + \Omega^2 + 2\Omega)(2\Omega + 1)/3 - \varepsilon^2 - \Omega^2, p = \varepsilon^2 + \eta - (\Omega^2 + \Omega + 1)/3$ . Обозначим через  $z_-$  и  $z_+$  корни, расположенные левее и правее точки перегиба  $z_i = (2\Omega + 1)/3$ , в которой  $P''(z_i) = 0$ . При наличии третьего корня  $z_0$  очевидно имеет место неравенство между корнями  $0 < z_- \leq z_0 \leq z_+ < 1$ .

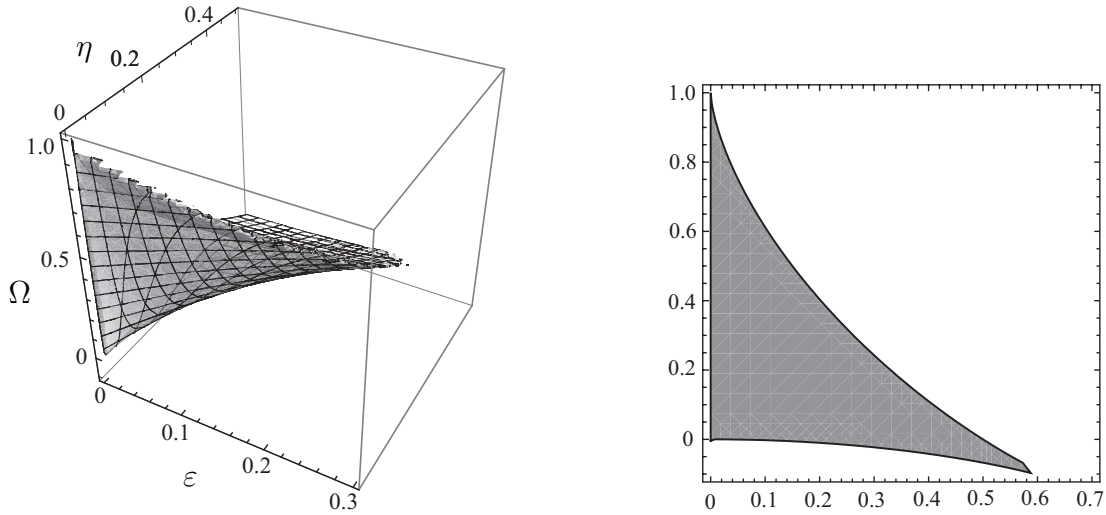


Рис. 3. Слева область в пространстве параметров  $\varepsilon, \eta, \Omega$ , при которых существуют три неподвижных точки. Справа граница этой области при  $\varepsilon = 0$ .

**Теорема 2.** В системе уравнений (1.1) существуют неподвижные точки: либо одна при  $D > 0$ , либо две при  $D = 0$ , либо три при  $D < 0$ . Для любой неподвижной точки координата  $z \in (0, 1)$ .

**Доказательство.** Для каждого из корней уравнения (4.3) однозначно вычисляется значение  $\rho > 0$  из (4.2) и  $\psi \in [0, 2\pi)$  из (4.1).

**Следствие 1.** В случае  $D \neq 0$  все три корня будут простыми и обладают свойствами  $P'(z_{\pm}) > 0$ ,  $P'(z_0) < 0$ .

Отметим, что в системе (1.1) равновесие может оказаться в точке с любыми значениями координат  $z \in (0, 1)$ ,  $\rho > 0$  при подходящем выборе параметров  $h, \Omega, b_1, b_2$ .

Условия на число корней в терминах дискриминанта  $D$  могут показаться сложными и труднообозримыми (см. рис. 3). Приведем более простые достаточные условия.

**Лемма 1.** Если для параметров  $\varepsilon, \eta, \Omega$  нарушается хотя бы одно из четырех неравенств

$$-\frac{1}{2} < \Omega < 1, \quad -(\Omega^2 + 2\Omega) < \varepsilon^2 + \eta < \frac{(1 - \Omega)^2}{3}, \quad (4.4)$$

то в системе уравнений (1.1) существует лишь одна неподвижная точка с координатой  $z = z_-$ , либо  $z = z_+$ .

**Доказательство.** Соотношения (4.4) выделяются как необходимые условия существования трех корней. Очевидно, одним из таких условий является наличие на промежутке  $0 < z < 1$  точки перегиба, в которой  $P''(z_i) = 0$ . Поскольку  $z_i = (2\Omega + 1)/3$ , то такое требование приобретает вид  $-1/2 < \Omega < 1$ .

Помимо того, необходимо существование экстремумов у полинома  $P(z)$ . Это обуславливает требования

$$P'(0) = \varepsilon^2 + \eta + \Omega^2 + 2\Omega > 0, \quad P'(z_i) = \varepsilon^2 + \eta - \frac{(1 - \Omega)^2}{3} < 0.$$

Еще одно условие выполняется автоматически:  $P'(1) = \varepsilon^2 + \eta + (1 - \Omega)^2 > 0$ . Нарушение любого из этих неравенств гарантирует единственность корня. Лемма доказана.

Наличие трех корней в уравнении (4.3) эквивалентно свойству, что полином  $P(z)$ , по крайней мере, дважды меняет знак; например:  $P(1/3) > 0$ ,  $P(2/3) < 0$ . Требование подобных

неравенств накладывает условия на коэффициенты полинома, и на этой основе можно сформулировать много сравнительно простых достаточных условий существования трех неподвижных точек. Приведем пример такого типа утверждения с указанием области параметров, при которых наименьший корень находится вблизи нуля, а наибольший — вблизи единицы.

**Лемма 2.** Для  $\forall \delta \in (0, 1/2) \exists \Omega_0 > 0$ , что для  $\forall \Omega \in (0, \Omega_0) \exists \varepsilon_0 > 0$ , что при  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists \eta_{\pm} > 0$ , что при  $\forall \eta \in (\eta_-, \eta_+)$  в системе уравнений (1.1) с указанными ограничениями на параметры  $\Omega, \varepsilon, \eta$  существуют три неподвижных точки с координатами  $0 < z_- < z_0 < z_+ < 1$ , которые обладают свойством:  $z_- \in (0, \delta), z_+ \in (1 - \delta, 1)$ .

Доказательство сводится к выявлению параметров  $\eta, \varepsilon, \Omega$ , при которых выполняются неравенства  $P(\delta) > 0, P(1 - \delta) < 0$ . С учетом вида полинома  $P(z)$  эти неравенства эквивалентны требованию

$$\frac{1 - \delta}{\delta}[\varepsilon^2 + (\delta - \Omega)^2] < \eta < \frac{\delta}{1 - \delta}[\varepsilon^2 + (1 - \delta - \Omega)^2].$$

Указанный здесь промежуток для параметра  $\eta$  не пуст, если

$$[(1 - \delta)^2 - \delta^2]\varepsilon^2 < \delta^2(1 - \delta - \Omega)^2 - (1 - \delta)^2(\delta - \Omega)^2.$$

Отсюда следует, что промежуток для параметра  $\varepsilon$  не пуст, если

$$\delta^2(1 - \delta - \Omega)^2 - (1 - \delta)^2(\delta - \Omega)^2 > 0.$$

Последнее условие эквивалентно требованию  $\Omega \in (0, \Omega_0)$  при  $\Omega_0 = 2\delta(1 - \delta)(1 - 2\delta)$ . Значения  $\varepsilon_0, \eta_{\pm}$  вычисляются последовательно через граничные значения в приведенных выше неравенствах. Лемма доказана.

## 4.2. Неподвижные точки бездиссипативной системы

При отсутствии диссипации, когда  $b_1 = b_2 = 0$ , уравнения для неподвижных точек принимают форму

$$zh \sin \psi = 0, \quad \rho h \sin \psi = 0, \quad (z - \Omega)\rho - zh \cos \psi = 0. \quad (4.5)$$

Помимо тривиального решения  $\rho = 0, z = 0$ , которое соответствует  $x = y = z = 0$ , других решений с  $\rho = 0$  не бывает. При  $\rho \neq 0$  система (4.5) эквивалентна двум уравнениям

$$\sin \psi = 0, \quad (z - \Omega)\rho - zh \cos \psi = 0. \quad (4.6)$$

В фазовом пространстве  $(x, y, z)$  они описывают гиперболу  $(z - \Omega)y = hz$ , лежащую в плоскости  $x = 0$ . Таким образом, неподвижные точки заполняют две ветви этой гиперболы.

Надо учесть, что бездиссипативная система имеет первый интеграл  $\mathcal{M}^2 = \rho^2 + z^2 = \text{const}$ , так что фазовое пространство расслаивается на сферы. Поэтому неподвижные точки можно параметризовать величиной  $\mathcal{M}^2 > 0$ , отождествляя их с равновесием бездиссипативной системы при фиксированном первом интеграле. В таком подходе для координат неподвижных точек  $\rho, z$  получается система

$$\rho^2(z - \Omega)^2 + z^2 h^2 = 0, \quad \rho^2 + z^2 = \mathcal{M}^2, \quad (4.7)$$

эквивалентная уравнению четвертого порядка

$$P_4(z) \equiv (z^2 - \mathcal{M}^2)(z - \Omega)^2 + z^2 h^2 = 0, \quad |z| \leq \mathcal{M}.$$

Характерной величиной здесь является комбинация параметров  $D_{\mathcal{M}} = (\Omega/\mathcal{M})^{2/3} + (h/\mathcal{M})^{2/3}$ .

В пересечении линии (4.6) со сферой  $\rho^2 + z^2 = \mathcal{M}^2, 0 \leq \psi < 2\pi$  существует от двух до четырех точек в зависимости от величины  $D_{\mathcal{M}}$  (см. рис. 4).

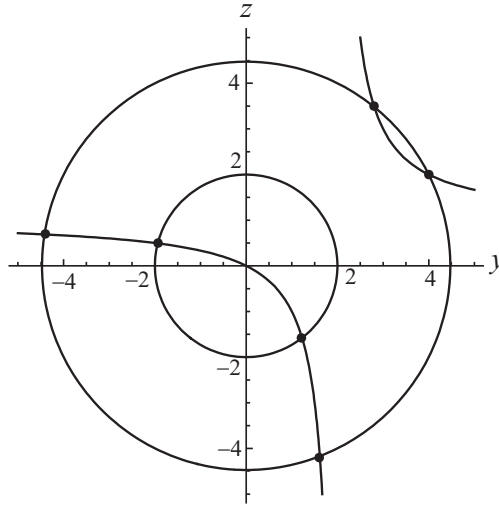


Рис. 4. Неподвижные точки бездиссипативной системы заполняют две ветви гиперболы в плоскости  $x = 0$ ; в примере  $h = 2, \Omega = 1$ . В пересечении со сферой радиуса  $\mathcal{M}$  существует от двух до четырех точек.

**Лемма 3.** *Бездиссипативная система на любой сфере радиуса  $\mathcal{M}$  имеет неподвижные точки — либо две при  $D_{\mathcal{M}} > 1$ , либо три при  $D_{\mathcal{M}} = 1$ , либо четыре при  $D_{\mathcal{M}} < 1$ . В общем случае две точки имеют координаты  $z$  противоположного знака.*

**Доказательство.** Заметим, что  $P_4(0) = -r^2\Omega^2 \leq 0$  и  $P_4(\pm r) = h^2 > 0$ . Поэтому при  $\Omega \neq 0$  существуют два корня противоположного знака  $-\mathcal{M} < z_1 < 0 < z_2 < \mathcal{M}$ . По ним восстанавливаются координаты  $\rho_{1,2} = \sqrt{\mathcal{M}^2 - z_{1,2}^2}$ , а также  $\psi_{1,2}$  из уравнений неподвижной точки (4.5). Если  $D_{\mathcal{M}} \leq 1$ , то имеется дополнительная пара корней  $z_3, z_4 \in (-\mathcal{M}, \mathcal{M})$ , по которым восстанавливаются координаты еще двух неподвижных точек. В случае  $\Omega = 0$  помимо кратного корня  $z_{1,2} = 0$  существуют ненулевые корни  $z_{3,4} = \pm\sqrt{\mathcal{M}^2 - h^2}$  при  $\mathcal{M}^2 > h^2$ .

### 4.3. Предел по малой диссипации

Рассмотрим поведение неподвижных точек для системы Блоха (1.1) в пределе малой диссипации, когда  $b_1, b_2 \rightarrow 0$ .

Напомним, что подобная задача для модели Ландау — Лифшица решается довольно просто. Если уравнения Ландау — Лифшица рассматривать как возмущение бездиссипативной системы, то получаемые ответы соответствуют теории регулярных возмущений. При таком возмущении модуль вектора намагниченности  $\mathcal{M} = |\mathbf{M}(t)|$  остается первым интегралом. Следовательно, сохраняется расслоение фазового пространства на сферы и любая возмущенная (диссипацией) траектория остается на сфере. Неподвижные точки на каждой сфере при возмущении немного смещаются и меняют свою структуру: вместо центров появляются фокусы либо узлы (устойчивые и неустойчивые). В пределе, когда диссипация стремится к нулю, неподвижные точки на каждой сфере стремятся к предельным положениям, которые соответствуют бездиссипативной системе [7]. В ситуации общего положения таких точек имеется либо две, либо четыре.

Иная ситуация складывается при учете диссипации в форме уравнений Блоха (1.1). Эта система не имеет первых интегралов, модуль вектора намагниченности не сохраняется, и траектория не находится на сфере. Число неподвижных точек может быть от одной до трех. Их координаты  $\rho, z$  связаны соотношением (4.2):  $\rho^2 = bz(1 - z)$ , ( $b = b_1/b_2 > 0$ ), которое вовсе не гарантирует принадлежность трех неподвижных точек одной сфере.

Более того, пределы неподвижных точек по малой диссипации (при  $b_1, b_2 \rightarrow 0$ ) также оказываются на разных сферах. В самом деле, рассмотрим предел уравнений (4.2) при  $b_1, b_2 \rightarrow 0$

в случае  $\lim(b_1/b_2) = b = \text{const} > 0$ :

$$\rho^2(z - \Omega)^2 = z^2 h^2, \quad \rho^2 = bz(1 - z). \quad (4.8)$$

Поскольку первые соотношения в (4.7) и в (4.8) совпадают, то любой корень  $\hat{z}, \hat{\rho}$  уравнений (4.8) будет корнем уравнений (4.7) при подходящем выборе радиуса сферы:  $\mathcal{M} = \sqrt{(b-1)\hat{z}^2 - b\hat{z}}$ . Легко понять, что разные корни  $\hat{z}$ , зависящие от двух параметров  $\Omega$  и  $\eta = h^2/b$ , в ситуации общего положения дают разные значения  $\mathcal{M}$ . Следовательно, пределы неподвижных точек оказываются на разных сферах.

Необходимо иметь в виду, что в пространстве параметров  $\eta, \Omega, \varepsilon$  есть область (см. рис. 3), для каждой точки которой уравнения (4.3) имеет три разных корня  $z_- < z_0 < z_+$ . Пределы этих корней при  $\varepsilon \rightarrow 0$  не совпадают, если значения  $\eta, \Omega$  лежат на грани, которая представлена на рис. 3 справа. Почти для всех  $\eta, \Omega$  из этой области пределы неподвижных точек диссипативной системы оказываются на трех разных сферах. Более того, две предельные точки могут оказаться пределами точек, устойчивых в диссипативной системе, как это выясняется в следующем разделе.

## 5. Устойчивость неподвижных точек в системе Блоха

При наличии диссипации устойчивость положения равновесия можно определить, используя первый метод Ляпунова. Для этого следует выписать матрицу системы дифференциальных уравнений, линеаризованных вблизи неподвижной точки. С учетом уравнений равновесия (4.1) такую матрицу можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & -b\varepsilon(z-1)/\rho & -(\Omega-z)\rho \\ -b\varepsilon(z-1)/\rho & -b\varepsilon & b(\Omega-z)(z-1) \\ (\Omega-z)/\rho & -\Omega/z & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\rho, z$  — координаты неподвижной точки,  $\varepsilon = b_2$ ,  $b = b_1/b_2$ . Уравнение, которое получается для собственных значений  $\lambda$ , с учетом соотношения  $\rho^2 = bz(1-z)$  приводится к виду

$$Q(\lambda; z) \equiv (\lambda + b\varepsilon)[(\lambda + \varepsilon)^2 + (\Omega - z)^2] + b(\lambda + \varepsilon)\frac{1-z}{z}[\varepsilon^2 + \Omega(\Omega - z)] + b\varepsilon(1-z)(\Omega - z) = 0. \quad (5.1)$$

Выписанный здесь характеристический полином по  $\lambda$  третьей степени  $Q(\lambda; z)$  зависит от четырех параметров  $z, \varepsilon, b, \Omega$ . Для краткости указывается явная зависимость лишь от координаты неподвижной точки  $z \in (0, 1)$ . Имея в виду, что  $z$  — один из корней уравнения (4.3), можно заключить, что, в конечном счете, собственные значения  $\lambda$  зависят от четырех параметров  $\eta, \Omega, \varepsilon, b$ , или, что то же самое, от исходных  $h, \Omega, b_1, b_2$ .

В бездиссипативном пределе, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ , уравнение (5.1) упрощается:

$$\lambda^3 + \lambda(\Omega - z)\left(\Omega - z + b\Omega\frac{1-z}{z}\right) = 0.$$

Одно из собственных значений оказывается нулевым  $\lambda = 0$ , а два других легко вычисляются. Однако отсюда никаких утверждений об устойчивости равновесия диссипативной системы сделать невозможно, даже при малой диссипации<sup>2</sup>, когда  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Дальнейший анализ устойчивости проводится при произвольных значениях параметров  $\varepsilon, \eta > 0$ ,  $z \in (0, 1)$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}$ ; в частности, выясняется зависимость от координаты неподвижной точки  $z$ . Решение вопроса устойчивости сводится к выяснению знака действительной части собственных значений  $\lambda$  исходя из уравнения (5.1).

<sup>2</sup>Достаточные условия неустойчивости при малой диссипации можно получить из требования действительности ненулевых корней предельного уравнения.

**Теорема 3.** При наличии в уравнении (4.3) трех разных действительных корней  $z_- < z_0 < z_+$  неподвижная точка со средней координатой  $z = z_0$  неустойчива.

**Доказательство.** Вычисляя значение полинома  $Q(\lambda; z)$  в точке  $\lambda = 0$ , обнаруживаем, что оно пропорционально производной функции, которая определяет  $z$ -координату неподвижной точки:

$$\frac{1}{b\varepsilon}Q(0; z) = \varepsilon^2 + \eta + (\Omega - z)^2 + 2(1 - z)(\Omega - z) = P'(z). \quad (5.2)$$

Поскольку согласно следствию леммы 2  $P'(z_0) < 0$ , то  $Q(0; z_0) < 0$ . Учитывая свойство  $Q(\lambda; z_0) \rightarrow \infty$   $\lambda \rightarrow \infty$ , заключаем, что кубический полином  $Q(\lambda; z_0)$  имеет нуль  $\lambda = \lambda_0 > 0$  на положительной полуоси. Этот нуль является положительным собственным значением матрицы для системы, линеаризованной в неподвижной точке с координатой  $z = z_0$ . Следовательно, эта точка неустойчива.

**Лемма 4.** Если значение  $z_{\pm}$  соответствует единственному корню либо простым крайним корням  $z_- < z_0 < z_+$  уравнения (4.3), то для неподвижной точки с соответствующей координатой  $z = z_{\pm}$  матрица линеаризованной системы имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение  $\lambda = \lambda_0^{\pm} < 0$ .

**Доказательство** аналогично предыдущей лемме опирается на соотношение (5.2). Поскольку согласно следствию леммы 2  $P'_3(z_{\pm}) > 0$ , то  $Q(0; z_{\pm}) > 0$ . Отсюда вытекает, что кубический полином  $Q(\lambda; z_{\pm})$  имеет нуль  $\lambda = \lambda_0^{\pm} < 0$  на отрицательной полуоси.

Отсюда, конечно, не следует устойчивость неподвижной точки с координатой  $z = z_{\pm}$ , поскольку неизвестны знаки для действительных частей двух оставшихся собственных значений.

Введем комбинацию параметров  $\lambda_* = -\varepsilon(2 + b) < 0$ .

**Теорема 4.** Неподвижная точка с координатой  $z = z_{\pm}$  асимптотически устойчива, если  $Q(\lambda_*; z_{\pm}) < 0$ , и неустойчива, если  $Q(\lambda_*; z_{\pm}) > 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\lambda_0^{\pm} < 0$  — наименьший отрицательный корень уравнения (5.1) при  $z = z_{\pm}$ . Характеристический полином из (5.1) представим в виде

$$Q(\lambda; z_{\pm}) = (\lambda - \lambda_0^{\pm})(\lambda^2 + 2a\lambda + c).$$

Коэффициенты  $a, c$  выражаются по формулам

$$2a = \varepsilon(b + 2) + \lambda_0^{\pm} = \lambda_0^{\pm} - \lambda_*, \quad c = -\frac{b\varepsilon}{\lambda_0^{\pm}}[\varepsilon^2 + \eta + (\Omega - z)^2 + 2(1 - z_{\pm})(\Omega - z_{\pm})] = -\frac{b\varepsilon}{\lambda_0^{\pm}}P'_3(z_{\pm}).$$

Дополнительная пара собственных значений как нулей полинома  $Q(\lambda; z_{\pm})$  выписывается в виде

$$\lambda_1^{\pm} = -a + \sqrt{a^2 - c}, \quad \lambda_2^{\pm} = -a - \sqrt{a^2 - c}. \quad (5.3)$$

Поскольку  $\lambda_0^{\pm} < 0$  и  $P'_3(z_{\pm}) > 0$ , то  $c > 0$ . Поэтому знак действительной части выражений  $\text{sign}(\text{Re}\lambda_{1,2}^{\pm}) = -\text{sign}(a)$  определяется знаком коэффициента  $-a$ . Следовательно, свойство устойчивости определяется расположением величины  $\lambda_*$  относительно  $\lambda_0^{\pm}$ : если  $\lambda_* < \lambda_0^{\pm}$ , то равновесие устойчиво, если  $\lambda_* > \lambda_0^{\pm}$ , то неустойчиво.

В случае, когда  $\lambda_0^{\pm}$  — единственный действительный нуль полинома  $Q(\lambda; z_{\pm})$ , расположение величины  $\lambda_*$  относительно  $\lambda_0^{\pm}$  соответствует знаку выражения  $Q(\lambda_*; z_{\pm})$ . Таким образом, теорема доказана для случая комплексных корней  $\lambda_{1,2}^{\pm}$ .

Рассмотрим случай трех различных действительных корней  $\lambda_0^{\pm}, \lambda_{1,2}^{\pm}$ . Поскольку  $\lambda_0^{\pm} < 0$  и  $Q(0; z_{\pm}) > 0$ , то оба дополнительных корня  $\lambda_{1,2}^{\pm}$  имеют один знак. Если они положительны, то из представления (5.3) следует, что  $-a > 0$  и тем самым  $\lambda_0^{\pm} < \lambda_*$ . Поскольку  $\lambda_* < 0$ , то

$Q(\lambda_*; z_{\pm}) > 0$ . Если оба корня отрицательны  $\lambda_{1,2}^{\pm} < 0$ , то из представления (5.3) следует, что  $-a < 0$  и, тем самым,  $\lambda_* < \lambda_0^{\pm}$ . Поскольку  $\lambda_0^{\pm}$  — наименьший корень, то  $Q(\lambda_*; z_{\pm}) < 0$ .

Полученные таким образом соотношения между знаком корней  $\lambda_{1,2}^{\pm} < 0$  и знаком величины  $Q(\lambda_*; z_{\pm})$  взаимно однозначны. Например, если  $Q(\lambda_*; z_{\pm}) < 0$  и от противного предположить  $\lambda_{1,2}^{\pm} > 0$ , то в силу доказанного утверждения получаем  $Q(\lambda_*; z_{\pm}) > 0$ . Следовательно, предположение не верно и  $\lambda_{1,2}^{\pm} \leq 0$ . Однако нулевых корней не бывает, и поэтому  $\lambda_{1,2}^{\pm} < 0$ . То есть все три корня отрицательны. Теорема доказана.

Доказанное утверждение дает исчерпывающий результат об устойчивости неподвижных точек в системе Блоха, который можно извлечь первым методом Ляпунова. Условия устойчивости в виде условий на знак величины  $Q(\lambda_*; z_{\pm})$  даются в терминах корня  $z = z_{\pm}(\varepsilon, \Omega, \eta)$  кубического уравнения (4.3). В конечном счете, они представляют собой условия на четыре параметра исходной системы. Используя выражения для  $z_{\pm}(\varepsilon, \Omega, \eta)$ , можно записать условия устойчивости для каждой из точек с координатой  $z = z_{\pm}$ . Однако в общем случае они представляются формулами, которые плохо обозримы.

Можно дать более простые достаточные условия устойчивости.

**Лемма 5.** *Если выполнено хотя бы одно из соотношений: либо  $\Omega \notin (0, 1)$ , либо  $2\varepsilon^2(b+1)^2 + b(b+1)\eta > b^2(b+2)/2(b+1)$ , либо  $b \leq 2$ , то неподвижная с любой из координат  $z = z_{\pm}$  асимптотически устойчива.*

Доказательство состоит в анализе знака выражения для  $Q(\lambda_*; z)$ , которое зависит от четырех параметров:

$$Q(\lambda_*; z) = -2\varepsilon[\varepsilon^2(b+1)^2 + (\Omega - z)^2] - \varepsilon b(b+1) \frac{1-z}{z} [\varepsilon^2 + \Omega(\Omega - z)] + b\varepsilon(1-z)(\Omega - z).$$

Здесь три параметра  $\varepsilon, b > 0, \Omega \in \mathbb{R}$  соответствуют исходным. Значение  $z \in (0, 1)$  соответствует корню  $z = z_{\pm}(\varepsilon, \Omega, \eta)$  уравнения (4.3). Его можно считать четвертым независимым параметром вместо  $\eta$ . Если  $\Omega \leq 0$ , то легко видеть, что выражение  $Q(\lambda_*; z) < 0$  будет отрицательным независимо от значений остальных параметров. Далее анализируются случаи с  $\Omega > 0$ .

В силу уравнения (4.3) имеет место тождество

$$(1-z)[\varepsilon^2 + (z-\Omega)^2] = z\eta. \tag{5.4}$$

Поэтому выражение для  $Q(\lambda_*; z)$  можно привести к виду

$$Q(\lambda_*; z) = -2\varepsilon[\varepsilon^2(b+1)^2 + (\Omega - z)^2] - \varepsilon b(b+1)\eta - \varepsilon b^2(1-z)(\Omega - z). \tag{5.5}$$

Если  $\Omega - z \geq 0$ , то легко видеть, что это выражение будет отрицательным независимо от значений остальных параметров, в частности при  $\Omega \geq 1$ . Таким образом, если  $\Omega \notin (0, 1)$ , то  $Q(\lambda_*; z) < 0$ . Тем самым с учетом теоремы 4 доказано первое утверждение леммы. Остается проанализировать выражение  $Q(\lambda_*; z)$  при  $0 < \Omega < z$ .

Поскольку в рассматриваемых точках  $z = z_{\pm}$  производная положительна  $P'(z) > 0$ , то с учетом (5.4) получаем неравенство

$$(1-z)P'(z) = (1-z)[\varepsilon^2 + \eta + (z-\Omega)^2 + 2(z-1)(z-\Omega)] = \eta - 2(1-z)^2(z-\Omega) > 0.$$

Выводимая отсюда оценка  $-\eta < 2(1-z)^2(\Omega - z)$  позволяет оценить выражение (5.5) следующим образом:  $Q(\lambda_*; z)/\varepsilon b < -(b+1)\eta - b(1-z)(\Omega - z) < (1-z)(\Omega - z)[2(b+1)(1-z) - b]$ . Поскольку в рассматриваемом случае  $\Omega - z < 0$ , то при  $0 < z \leq (b+2)/2(b+1)$  оказывается  $Q(\lambda_*; z) < 0$ . Следовательно, неустойчивость в точках с координатами  $z = z_{\pm}$  может случаться лишь при  $z_{\pm} > (b+2)/2(b+1)$ . В таком случае в области параметров  $0 < \Omega < z, (b+2)/2(b+1) < z < 1$  для выражения из (5.5) получается неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon b} Q(\lambda_*; z) < -2\varepsilon^2(b+1)^2 - b(b+1)\eta + b^2(b+2)/2(b+1),$$

из которого следует доказательство второго утверждения леммы.

Из свойства  $P'(z) > 0$  вытекает  $-2[\eta + (1 - z)(\Omega - z)] < \varepsilon^2 - \eta + (z - \Omega)^2 < \varepsilon^2 + (z - \Omega)^2$ . С учетом этого неравенства для выражения (5.5) можно получить следующую оценку:

$$\frac{1}{\varepsilon}Q(\lambda_*; z) < -2[\varepsilon^2(b + 1)^2 + (\Omega - z)^2] + b^2 \frac{1 - z}{2}[\varepsilon^2 + (z - \Omega)^2].$$

Легко видеть, что при  $z > 1/2$  это выражение отрицательно, если  $0 < b^2 \leq 4$ . Тем самым доказано третье, последнее, утверждение леммы.

Отметим, что в физически реализуемых ситуациях выполняется условие  $0 < b = b_1/b_2 < 1$  и поэтому положение равновесия с любой из координат  $z = z_{\pm}$  устойчиво независимо от остальных параметров. Напомним, что таких точек может быть либо одна, либо две.

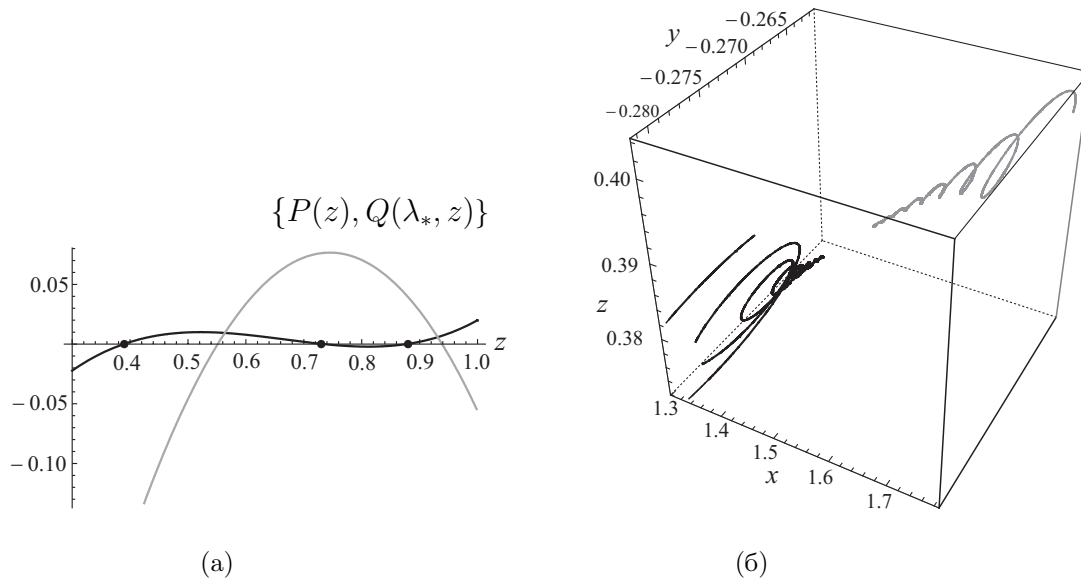


Рис. 5. Наличие двух неустойчивых точек равновесия с координатами  $z = z_0 \approx 0.73$ ,  $z = z_+ \approx 0.88$  при  $\varepsilon = 0.02$ ,  $\eta = 0.02$ ,  $\Omega = 0.5$ ,  $b = 10$ . Почти все траектории притягиваются к единственной устойчивой точке с координатой  $z = z_- \approx 0.39$ .

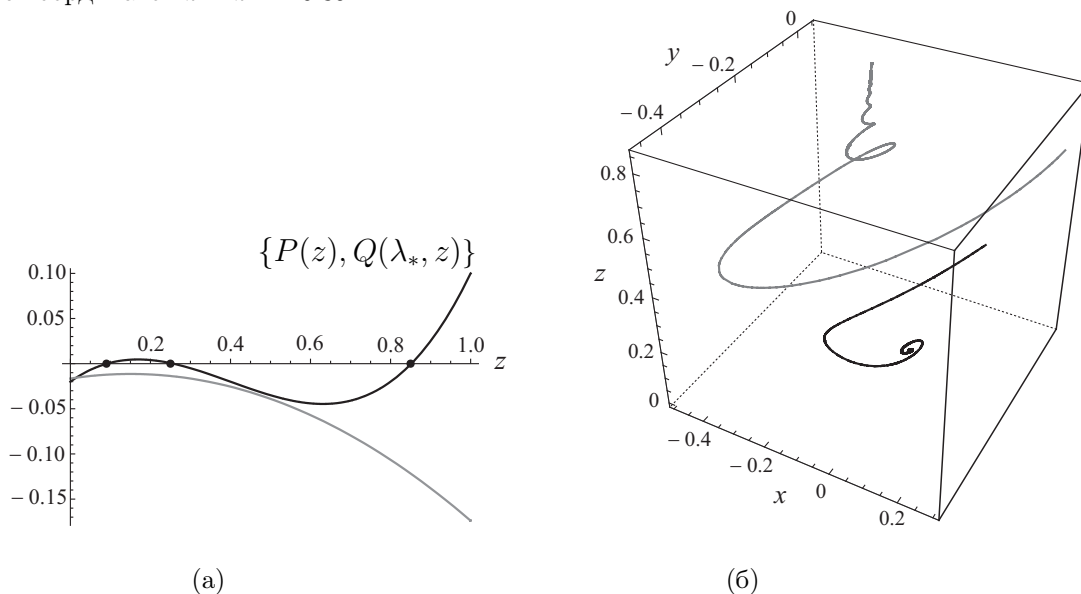


Рис. 6. Наличие одной неустойчивой точки равновесия с координатой  $z = z_0 \approx 0.23$  при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $\Omega = 0.1$ ,  $b = 0.5$ . Две точки равновесия с координатами  $z_- \approx 0.09$  и  $z_+ \approx 0.85$  устойчивы, поскольку  $Q(\lambda_*, z) < 0$ . Разные траектории притягиваются к разным устойчивым точкам.

Если параметр  $b$  большой, а  $\varepsilon, \eta$  — малы, то в случае трех точек равновесия неустойчивыми могут оказаться две из них<sup>3</sup>, в том числе (помимо  $z_0$ ) точка с координатой  $z = z_+$ . Такой результат можно усмотреть из сравнения графиков полиномов  $P(z)$  и  $Q(\lambda_*; z)$  как функций от  $z$ . Пример такой ситуации приведен на рис. 5 (а). Здесь видно, что в правом нуле  $z = z_+$  кубического полинома  $P(z)$  значение квадратичного по  $z$  полинома  $Q(\lambda_*; z)$  положительно, а поэтому соответствующая точка равновесия неустойчива. В этом случае устойчивой будет лишь одна из трех точек равновесия. Примеры фазовых траекторий приведены на рис. 5 (б).

Впрочем, для большей части параметров функция  $Q(\lambda_*, z)$  отрицательна на всем отрезке  $0 < z < 1$ , а поэтому точка равновесия с любой из координат  $z = z_{\pm}$  оказывается устойчивой, как это видно на рис. 6 (а). Наличие двух устойчивых точек ведет к разделению фазовых траекторий на два класса; примеры приведены на рис. 6 (б).

## 6. Усреднение уравнений Блоха

Анализ решений, отличных от неподвижных точек, проводится с использованием малого параметра  $\varepsilon$ . Принято, что этот параметр содержится множителем в коэффициентах диссипации, так что  $b_2 = \varepsilon \ll 1$ ,  $b_1 = b\varepsilon$  при  $b = \text{const} > 0$ . Кроме того, этот параметр допускается в медленно меняющихся коэффициентах  $h(\varepsilon t), \Omega(\varepsilon t)$ . Функции  $h(\tau), \Omega(\tau)$  считаются гладкими по медленному времени  $\tau = \varepsilon t$ ; в частности, они ограничены на конечном промежутке и  $h(\tau) \geq \text{const} > 0$ . Задача состоит в построении асимптотики по малому параметру (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) для общего трехпараметрического решения  $\rho, z, \psi(t; \varepsilon)$  равномерно на большом промежутке времени  $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ .

В качестве основы для асимптотических конструкций используется трехпараметрическое решение бездиссипативной системы уравнений с “замороженными” (постоянными) коэффициентами. Ввиду наличия у такой системы двух первых интегралов

$$\mathcal{M}^2 = \rho^2(t) + z^2(t) = \text{const}, \quad E = \frac{1}{2}z^2(t) - \Omega z(t) - h\rho(t) \cos \psi(t) = \text{const}$$

ее интегрирование сводится к решению скалярного уравнения (3.1). Решение зависит от трех констант интегрирования  $t_0, E, \mathcal{M}^2$  и двух параметров  $h, \Omega$  и выражается из (3.2) через обратную функцию:  $z = z_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$ . Поскольку почти все фазовые траектории замкнуты, то общее решение представляет собой периодическую функцию с периодом  $T = T(E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$ , зависящим от четырех параметров<sup>4</sup>. Остальные компоненты вектора намагниченности:  $\rho = \rho_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$ ,  $\psi = \psi_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$  — вычисляются из первых интегралов. Компонента  $\psi = \psi_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$  не обязана быть периодической, однако функция  $\cos \psi_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$  будет периодической в силу первого интеграла.

Полученные таким образом (в неявной форме) функции  $\rho_0, z_0, \psi_0$  дают главный член асимптотики по малому параметру  $\varepsilon \rightarrow 0$  для решения полной (возмущенной) системы Блоха (1.1) равномерно на конечном промежутке времени  $0 < t < \mathcal{O}(1)$ . Однако, чтобы асимптотика была пригодна на большом промежутке времени  $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ , надо подходящим образом деформировать параметры  $E \approx E_0(\varepsilon t)$ ,  $\mathcal{M}^2 \approx \mathcal{M}_0^2(\varepsilon t)$  и быструю фазу  $(t + t_0)$ . Такие деформации в масштабе медленного времени  $\tau = \varepsilon t$  определяются из усредненных уравнений.

Процедура усреднения как реализация одного из вариантов метода двухмасштабных разложений наиболее просто выглядит в переменных типа “действие-угол”. В простейших примерах такими переменными являются полярные координаты, и переход к ним от декартовых координат связан с решением линейного осциллятора:  $x = r \cos s$ ,  $y = r \sin s$ .

В рассматриваемой задаче переход основан на решениях бездиссипативной “замороженной” системы. При этом удобно использовать  $2\pi$ -периодические функции, определяемые по

<sup>3</sup>Значения  $b > 1$  не соответствуют известным физически реализуемым ситуациям [5]. Такие системы с двумя неустойчивыми положениями равновесия можно рассматривать как математический казус.

<sup>4</sup>Зависимость от параметра  $b = b_1/b_2$  здесь не анализируется.

формулам

$$R, Z, \Psi(S, E, \mathcal{M}^2; h, \Omega) = \rho_0, z_0, \psi_0(S/\omega; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega).$$

Здесь  $\omega = \omega(E, \mathcal{M}^2; \tau) = 2\pi/T$  — частота невозмущенного решения, зависящая как от параметров траектории  $E, \mathcal{M}^2$ , так и от параметра  $\tau$  посредством  $h(\tau), \Omega(\tau)$ . Введенные таким образом функции зависят от пяти переменных и удовлетворяют тождествам, которые вытекают из исходных уравнений и первых интегралов

$$\omega \partial_S R = -h Z \sin \Psi, \quad \omega \partial_S Z = h R \sin \Psi, \quad R[\omega \partial_S \Psi - \Omega + Z] = -h Z \cos \Psi,$$

$$R^2 + Z^2 = \mathcal{M}^2, \quad \frac{1}{2} Z^2 - \Omega Z - h R \cos \Psi = E.$$

Дифференцирование двух последних тождеств приводит к соотношениям

$$\partial_E(R^2 + Z^2) = 0, \quad \partial_{\mathcal{M}^2}(R^2 + Z^2) = 1,$$

$$\partial_E\left(\frac{1}{2} Z^2 - \Omega Z - h R \cos \Psi\right) = 1, \quad \partial_{\mathcal{M}^2}\left(\frac{1}{2} Z^2 - \Omega Z - h R \cos \Psi\right) = 0.$$

Кроме того, тождества первых интегралов можно дифференцировать по параметрам  $h, \Omega$ . В усредненных уравнениях фигурирует комбинация таких производных в виде оператора  $\hat{\partial}_\tau = h'(\tau)\partial_h + \Omega'(\tau)\partial_\Omega$ . Применение этого оператора к тождествам первых интегралов дает соотношения

$$\hat{\partial}_\tau(R^2 + Z^2) = 0, \quad (Z - \Omega)\hat{\partial}_\tau Z - h\hat{\partial}_\tau(R \cos \Psi) = h'(\tau)R \cos \Psi + \Omega'(\tau)Z.$$

Итак, в системе уравнений Блоха (1.1) выполняется замена переменных  $(\rho, z, \psi) \Rightarrow (S, E, \mathcal{M}^2)$  по формулам

$$\rho(t) = R(S; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega), \quad z(t) = Z(S; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega), \quad \psi(t) = \Psi(S; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega);$$

здесь  $h(\varepsilon t), \Omega(\varepsilon t)$  — заданные функции. Якобиан замены вычисляется с учетом полученных выше тождеств

$$\det \frac{\partial(R, Z, \Psi)}{\partial(S, E, \mathcal{M}^2)} = \begin{vmatrix} R_S & R_E & R_{\mathcal{M}^2} \\ Z_S & Z_E & Z_{\mathcal{M}^2} \\ \Psi_S & \Psi_E & \Psi_{\mathcal{M}^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2R\omega}.$$

Уравнения для вектора новых искомым функций  $(S, E, \mathcal{M}^2)(t)$  выписываются через матрицу Якоби в виде

$$\frac{\partial(R, Z, \Psi)}{\partial(S, E, \mathcal{M}^2)} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S \\ E \\ \mathcal{M}^2 \end{pmatrix} = \omega \partial_S \begin{pmatrix} R \\ Z \\ \Psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ (Z-1)b \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon \hat{\partial}_\tau \begin{pmatrix} R \\ Z \\ \Psi \end{pmatrix}.$$

После приведения системы к нормальной форме уравнения приобретают вид, характерный для задач о возмущении нелинейных колебаний:

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon f(S, E, \mathcal{M}^2; \tau), \quad \frac{d\mathcal{M}^2}{dt} = \varepsilon g(S, E, \mathcal{M}^2; \tau), \quad \frac{dS}{dt} = \omega(E, \mathcal{M}^2; \tau) + \varepsilon \Phi(S, E, \mathcal{M}^2; \tau), \quad (\tau = \varepsilon t).$$

Правые части выражаются через решения невозмущенных уравнений  $R, Z, \Psi(S, E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$  и поэтому представляют собой  $2\pi$ -периодические функции по быстрой переменной  $S$ ; в частности,

$$f = h(\tau)R \cos \Psi + b(Z-1)(\Omega - Z) - h'(\tau)R \cos \Psi - \Omega'(\tau)Z, \quad g = -2[R^2 + bZ(Z-1)].$$

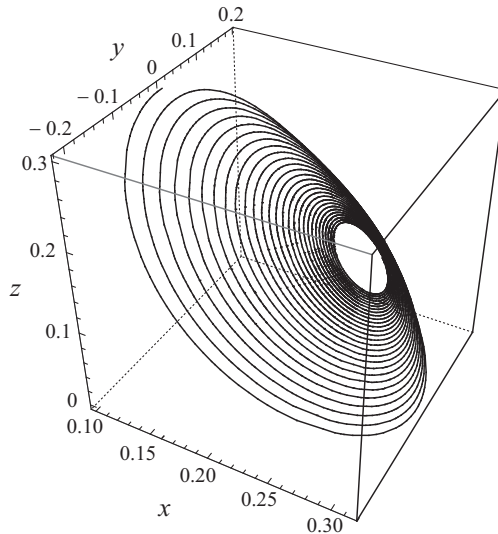


Рис. 7. Траектория решения системы (1.1) при  $b_2 = \varepsilon = 0.01$ ,  $b_1 = 0.5\varepsilon$ ,  $h = 0.5$ ,  $\Omega = 0.5$ . Асимптотика описывается периодическими функциями с медленно меняющимися параметрами  $\mathcal{M}(\varepsilon t)$ ,  $E(\varepsilon t)$ .

Таким образом, исходная задача о построении асимптотики по малому параметру для решений уравнений Блоха сводится к классической задаче о возмущении одночастотных колебаний [9], которая решается методом двухмасштабных разложений. В одном из вариантов этого метода можно разделить задачи по построению асимптотики быстрой компоненты  $S(t; \varepsilon)$  и медленных компонент  $E(t; \varepsilon)$ ,  $\mathcal{M}^2(t; \varepsilon)$ , используя анзац

$$E(t; \varepsilon) = E_0(\tau) + \varepsilon E_1(S, \tau) + \dots, \quad \mathcal{M}^2(t; \varepsilon) = \mathcal{M}_0^2(\tau) + \varepsilon \mathcal{M}_1^2(S, \tau) + \dots;$$

$$S(t; \varepsilon) = \varepsilon^{-1} S_{-1}(\tau) + S_0(\tau) + \varepsilon S_1(\hat{S}, \tau) + \dots, \quad \hat{S} = \varepsilon^{-1} S_{-1}(\tau) + S_0(\tau); \quad (\tau = \varepsilon t).$$

Главные члены асимптотики медленных “амплитуд”  $E_0(\tau)$ ,  $\mathcal{M}_0^2(\tau)$  находятся из системы усредненных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dE_0}{d\tau} &= h(\tau) \langle R \cos \Psi \rangle + b \langle (Z - 1)(\Omega - Z) \rangle - h'(\tau) \langle R \cos \Psi \rangle - \Omega'(\tau) \langle Z \rangle, \\ \frac{d\mathcal{M}_0^2}{d\tau} &= -2 \langle R^2 + b(Z - 1) \rangle. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается усреднение по быстрой переменной  $S$  известных функций, которые выражаются через  $R, Z, \Psi(S, E_0, \mathcal{M}_0^2; h, \Omega)$ ; например,

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2(S, E_0, \mathcal{M}_0^2; h, \Omega) dS.$$

Вычисление асимптотики для быстрой фазы  $\hat{S} = \varepsilon^{-1} S_{-1}(\tau) + S_0(\tau)$  в членах порядка единицы  $S_0(\tau) = \mathcal{O}(1)$ , как обычно, требует предварительного вычисления первых поправок амплитуд  $R_1, Z_1(S, \tau)$  [12; 13]. Впрочем, если ограничиться грубым ответом — траекторией возмущенной системы в фазовом пространстве  $(x, y, z)$ , не интересуясь движением вдоль траектории, то информация о быстрой фазе вовсе не нужна (см. рис. 7).

**Вывод.** Решения усредненных уравнений  $\mathcal{M}_0(\varepsilon t)$ ,  $E_0(\varepsilon t)$  определяют медленную деформацию радиуса сферы и траектории на сфере. Такая деформация используется для приближенного описания траектории системы Блоха (1.1) в главном члене асимптотики

$$\rho, z, \psi(t; \varepsilon) = \rho_0, z_0, \psi_0(\sigma; E_0(\tau), \mathcal{M}_0^2(\tau); h(\tau), \Omega(\tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \sigma = \hat{S}/\omega(E_0(\tau), \mathcal{M}_0^2(\tau); \tau), \quad \tau = \varepsilon t$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно на большом промежутке времени  $0 < t < \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ .

## 7. Анализ усредненной системы

Исследование усредненной системы (6.1) представляет собой отдельную задачу. Отсутствие простых формул для решений “замороженной” бездиссипативной системы не дает возможности выписать усредненные уравнения в явной форме через элементарные функции. По той же причине затруднены численные эксперименты с этими уравнениями. Тем не менее анализ системы (6.1) возможен. В качестве примера приведем два результата.

### 7.1. Глобальное существование

**Теорема 5.** *Если функции  $h(\tau), \Omega(\tau) \in C^1(\mathbb{R})$  непрерывно дифференцируемые, то любое решение усредненных уравнений (6.1) продолжается на всю ось  $\tau \in \mathbb{R}$ .*

**Доказательство.** Из тождества первого интеграла  $R^2 + Z^2 = \mathcal{M}^2$  вытекают оценки для квадратов:  $R^2 \leq \mathcal{M}^2$ ,  $Z^2 \leq \mathcal{M}^2$ , из которых выводятся оценки и для первых степеней:

$$-\frac{\mathcal{M}^2 + 1}{2} \leq R \leq \frac{\mathcal{M}^2 + 1}{2}, \quad -\frac{\mathcal{M}^2 + 1}{2} \leq Z \leq \frac{\mathcal{M}^2 + 1}{2}.$$

Эти неравенства сохраняются для средних значений. Поэтому правые части уравнений (6.1), которые выражаются через  $R, Z, \Psi(S, E_0, \mathcal{M}_0^2; h, \Omega)$ , мажорируются сверху и снизу линейными функциями  $\pm M(1 + \mathcal{M}_0^2)$ ,  $\pm M(1 + E_0)$ , ( $M = \text{const} > 0$ ). В таком случае существование глобального решения следует из известных результатов [11, с. 21; 8, с. 13].

### 7.2. Равновесие

Рассмотрим усредненные уравнения в автономном случае, когда  $h, \Omega = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= h\langle R \cos \Psi \rangle + b\langle (Z - 1)(\Omega - Z) \rangle \equiv f(E, \mathcal{M}^2), \\ \frac{d\mathcal{M}^2}{d\tau} &= -2\langle R^2 + bZ(Z - 1) \rangle \equiv g(E, \mathcal{M}^2). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Правые части этих автономных уравнений вычисляются через средние значения периодических функций, т. е. через интегралы вдоль замкнутых фазовых траекторий бездиссипативной системы. Поскольку у такой системы почти все траектории замкнуты, то функции  $f(E, \mathcal{M}^2)$ ,  $g(E, \mathcal{M}^2)$  определены на полуплоскости  $E \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{M}^2 > 0$  почти всюду<sup>5</sup>. Для тех значений аргументов  $E, \mathcal{M}^2$ , которые в бездиссипативной системе соответствуют неподвижным точкам типа “центр”, значения функций  $f(E, \mathcal{M}^2)$ ,  $g(E, \mathcal{M}^2)$  определяются по непрерывности. В результате для таких  $E, \mathcal{M}^2$  на месте интегралов оказываются значения подынтегральных функций в неподвижной точке. Это позволяет связать равновесие усредненной системы с равновесием невозмущенной (бездиссипативной) системы.

Обозначим через  $\hat{\rho}, \hat{z}, \hat{\psi}$  предел по малой диссипации (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) для одной из неподвижных точек уравнений Блоха (1.1). Такой предел соответствует одному из равновесий бездиссипативной системы при соответствующем значении первого интеграла  $\mathcal{M}^2 = (b - 1)\hat{z}^2 - b\hat{z}$ . Эта точка равновесия может оказаться либо центром, либо седлом.

**Теорема 6.** *Если предельная точка  $\hat{\rho}, \hat{z}, \hat{\psi}$  является центром бездиссипативной системы, то значения  $\hat{\mathcal{M}}^2 = \hat{z}^2 - b\hat{z}(\hat{z} - 1)$ ,  $\hat{E} = \hat{z}^2/2 - \hat{z}\Omega - h\hat{\rho} \cos \hat{\psi}$  определяют неподвижную точку усредненных уравнений (7.1).*

<sup>5</sup>За исключением линии  $E = E_s(\mathcal{M}^2)$ , которая состоит из точек со значениями первых интегралов  $(E, \mathcal{M}^2)$  на сепаратрисных (незамкнутых) траекториях бездиссипативной системы.

Доказательство. Рассмотрим в фазовом пространстве  $(\rho, z, \psi)$  линию, определяемую уравнениями (4.8):

$$hz \cos \psi + \rho(z - \Omega) = 0, \quad \rho^2 = bz(1 - z). \quad (7.2)$$

На этой линии находятся как неподвижные точки (4.1), так и их бездиссипационные (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) пределы  $(\hat{\rho}, \hat{z}, \hat{\psi})$ . В частности, для предельной точки в силу (7.2) получаем соотношение

$$h\hat{\rho} \cos \hat{\psi} + b(\hat{z} - 1)(\Omega - \hat{z}) = \frac{-\hat{\rho}^2(\hat{z} - \Omega) + b\hat{z}(z_0 - 1)(\Omega - \hat{z})}{\hat{z}} = 0, \quad (7.3)$$

а также  $\hat{\rho}^2 - b\hat{z}(1 - \hat{z}) = 0$ . Как было показано, эта предельная точка является неподвижной точкой бездисперсионной системы при значении параметра  $\mathcal{M}^2 = \hat{\mathcal{M}}^2 = (b - 1)\hat{z}^2 - b\hat{z}$ . Соответствующее значение параметра  $E = \hat{E}$  вычисляется через выражение первого интеграла в неподвижной точке. С другой стороны, правые части усредненных уравнений, вычисленные при таких значениях параметров  $\mathcal{M}^2 = \hat{\mathcal{M}}^2$ ,  $E = \hat{E}$ , т. е. при

$$R(S; \hat{E}, \hat{\mathcal{M}}^2) \equiv \hat{\rho}, \quad Z(S; \hat{E}, \hat{\mathcal{M}}^2) \equiv \hat{z}, \quad \Psi(S; \hat{E}, \hat{\mathcal{M}}^2) \equiv \hat{\psi} \quad \forall S,$$

равны нулю в силу (7.2), (7.3). Поэтому  $\hat{E}, \hat{\mathcal{M}}^2$  является неподвижной точкой усредненных уравнений (7.1). Теорема доказана.

## 8. Заключение

В данной работе исследована система трех уравнений (1.1), возникающая в теории ядерной намагниченности при учете диссипации по Блоху. Для случая постоянных параметров выявлены положения равновесия, которых может быть от одного до трех. Обнаружена область параметров, при которых два положения равновесия оказываются неустойчивыми. Равновесие с наименьшим значением координаты  $z = z_-$ , видимо, устойчиво всегда, но строгое доказательство отсутствует. Остается открытой проблема описания областей притяжения (захвата) к разным устойчивым положениям равновесия.

Показано, что в пределе малой диссипации (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) неподвижные точки оказываются на разных сферах. Тем самым модель Блоха при наличии трех положений равновесия не переходит в бездиссипативную модель Ландау — Лившица, в которой все неподвижные точки (от двух до четырех) принадлежат одной сфере. За рамками статьи осталось описание свойств единственности и устойчивости неподвижных точек при переходе к бездиссипативному пределу.

Для решений вдали от равновесия построена асимптотика по малому параметру  $\varepsilon$ . При этом допускается медленная (по времени  $\varepsilon t$ ) деформация коэффициентов системы (1.1). Асимптотика в главном члене описывается периодическими функциями, которые представляют собой решение бездиссипативной системы с “замороженными” коэффициентами. Наличие возмущения в виде малой диссипации и медленного изменения коэффициентов проявляется на далеких временах  $t \approx \varepsilon^{-1}$ . В асимптотике эти эффекты обнаруживаются в виде медленного изменения параметров (констант интегрирования) невозмущенного решения. Уравнения, описывающие медленную деформацию таких параметров, получаются методом усреднения.

Для усредненной системы доказана глобальная разрешимость и выявлено наличие неподвижных точек. Остается открытым вопрос о числе неподвижных точек и их устойчивости. Численные эксперименты наводят на мысль, что для диссипативных систем типа (1.1) асимптотики, получаемые методом усреднения, пригодны на бесконечном интервале времени  $0 < t < \infty$  (см. рис. 7). Однако известные на этот счет результаты, например [14; 15], неприменимы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bloch F. Nuclear Induction // Phys. Rev. 1946. Vol. 70, №7-8. P. 460–474.
2. Куркин М.И., Туров Е.А. ЯМР в магнитоупорядоченных веществах и его применения. М.: Наука, 1990. 248 с.
3. Спиновое эхо в системах со связанной ядерно-электронной прецессией / А.С. Боровик-Романов, Ю.М. Буньков, Б.С. Думеш, М.И. Куркин, М.П. Петров, В.П. Чекмарев // Успехи физ. наук. 1984. Т. 142, № 4. С. 537–570.
4. Калякин Л.А., Султанов О.А., Шамсутдинов М.А. Асимптотический анализ модели ядерного магнитного авторезонанса // Теорет. мат. физика. 2011. Т. 167, № 3. С. 419–430.
5. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М. : Физматлит, 1994. 231 с.
6. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971. 376 с.
7. Калякин Л.А., Шамсутдинов М.А. Адиабатические приближения для уравнений Ландау — Лифшица // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т 13, № 2. С. 104–119.
8. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал, 2004. 552 с.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.
10. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейшгадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 300 с.
11. Хасьминский Р.З Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях. М.: Наука, 1969. 316 с.
12. Ажоткин В. Д., Бабич В. М. О применении метода двухмасштабных разложений к одночастотной задаче теории нелинейных колебаний // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 377–383.
13. Брюнинг Й., Доброхотов С.Ю., Потеряхин М.А. Об усреднении для гамильтоновых систем с одной быстрой фазой и малыми амплитудами // Мат. заметки. 2001. Т. 70, вып. 5. С. 660–669.
14. Арнольд В.И. О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 758–761.
15. Ильин А.М. О методе двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания // Теорет. мат. физика. 1999. Т. 118, № 3. С. 383–389.

Калякин Леонид Анатольевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
гл. науч. сотрудник  
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН  
e-mail: klenru@mail.ru

Поступила 10.10.2011