

**РАНГ И ПОРЯДОК КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ,
ДОПУСКАЮЩЕЙ ФРОБЕНИУСОВУ ГРУППУ
АВТОМОРФИЗМОВ**

Е. И. ХУХРО

Виктору Даниловичу Мазурову к его 70-летию

Введение

Предположим, что конечная группа G допускает фробениусову группу автоморфизмов FH с ядром F и дополнением H . Проблема В. Д. Мазурова [1, вопр. 17.72] привела к появлению ряда работ, где рассматривается случай, когда ядро F действует без неподвижных точек, $C_G(F) = 1$. Целью этих работ [2–10] является получение ограничений на порядок, ранг, нильпотентную длину, степень нильпотентности и период группы G в терминах соответствующих свойств и параметров централизатора $C_G(H)$ и порядка $|H|$.

Цель настоящей работы — показать, что если речь идёт о порядке и ранге группы G , то аналогичные результаты выполняются и без этого сильного условия $C_G(F) = 1$, по крайней мере, когда порядки групп G и FH взаимно просты. Доказательства по-существу сводятся к изучению силовских p -подгрупп группы G для разных простых чисел p . Более того, в случае, когда G — p -группа, удовлетворяющая равенству $G = [G, F]$, результаты являются наиболее сильными и зависят только от $C_G(H)$ и H . Поэтому удобно сформулировать отдельную теорему для p -групп.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что конечная p -группа P допускает фробениусову группу автоморфизмов FH с ядром F и дополнением H ,*

причём порядки P и FH взаимно просты: $(|P|, |FH|) = 1$. Если $P = [P, F]$, то

(а) степень nilпотентности группы P не превосходит $2 \log_p |C_P(H)|$;

(б) порядок группы P ограничен сверху в терминах порядков групп $C_P(H)$ и H ;

(в) ранг группы P ограничен сверху в терминах $|H|$ и ранга группы $C_P(H)$.

В настоящей работе ранг конечной группы — это минимальное число r , такое что каждая подгруппа порождается r элементами.

В качестве следствия получаем результат о ранге и порядке произвольной конечной группы с фробениусовой группой автоморфизмов копростого порядка. Обозначим через $\mathbf{r}(K)$ ранг конечной группы K .

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что конечная группа G допускает фробениусову группу автоморфизмов FH с ядром F и дополнением H , причём порядки G и FH взаимно просты: $(|G|, |FH|) = 1$. Тогда*

(а) $|G| \leq |C_G(F)| \cdot f(|H|, |C_G(H)|)$ для некоторой функции f от двух переменных;

(б) $\mathbf{r}(G) \leq \mathbf{r}(C_G(F)) + g(|H|, \mathbf{r}(C_G(H)))$ для некоторой функции g от двух переменных.

В условиях теоремы 2 более слабые оценки на порядок и ранг в терминах каких-то функций, зависящих соответственно от $|C_G(F)|$, $|H|$, $|C_G(H)|$ и $\mathbf{r}(C_G(F))$, $|H|$, $\mathbf{r}(C_G(H))$, можно было бы получить, просто рассматривая действие группы FH на критической подгруппе Томпсона в FH -инвариантных силовских p -подгруппах для разных p . Новая информация состоит в том, что зависимость от $C_G(F)$ теперь выступает в виде отдельного множителя $|C_G(F)|$ или слагаемого $\mathbf{r}(C_G(F))$.

Всем функциям, упоминаемым в теоремах, легко дать явные верхние оценки.

Индукционная группа автоморфизмов инвариантной секции часто обозначается той же буквой. Мы используем сокращение, скажем, „ (m, n) -ограниченный“ для „ограниченный сверху в терминах только m, n “, т. е.

ограниченный сверху функцией, зависящей только от m и n .

§ 1. Предварительные сведения

Напомним, что если группа A действует автоморфизмами на конечной группе G копростого порядка, $(|A|, |G|) = 1$, то неподвижные точки индуцированного действия группы A на фактор-группе G/N по A -инвариантной нормальной подгруппе покрываются неподвижными точками группы A в G :

$$C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N.$$

В частности, $[[G, A], A] = [G, A]$. Для каждого простого числа p группа G обладает A -инвариантной силовой p -подгруппой. Будем пользоваться этими известными свойствами копростого действия без особых ссылок.

Для группы A , действующей линейными преобразованиями на векторном пространстве V , используется правая операторная запись va для образа элемента $v \in V$ под действием $a \in A$. Используется также централизаторное обозначение для подпространства неподвижных точек $C_V(A) = \{v \in V \mid va = v \text{ для всех } a \in A\}$ (такое же, как для подгруппы неподвижных точек). Напомним, что для группы A и поля k *свободный kA -модуль ранга n* — это прямая сумма n копий групповой алгебры kA , каждая из которых рассматривается как векторное пространство над k размерности $|A|$ с базисом $\{v_g \mid g \in A\}$, помеченным элементами из A , на котором A действует в регулярном представлении подстановками: $v_g h = v_{gh}$. Ясно, что каждый свободный kA -модуль имеет нетривиальные неподвижные точки для A , которые дают „диагональные“ элементы — суммы по A -орбитам на этих базисах.

Из теоремы Клиффорда вытекает следующая

ЛЕММА 1.1 [5, лемма 2.5]. *Пусть фробениусова группа FH с ядром F и дополнением H действует линейными преобразованиями на векторном пространстве V над полем k так, что $C_V(F) = 0$. Тогда V — свободный kH -модуль.*

ЛЕММА 1.2. Пусть фробениусова группа FH с ядром F и дополнением H действует автоморфизмами на конечной группе G простого порядка так, что $[G, F] \neq 1$. Тогда $C_G(H) \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем FH -инвариантную силовскую p -подгруппу P из G , на которой F действует нетривиально. Тогда F действует нетривиально и на фактор-группе по подгруппе Фраттини $U = P/\Phi(P)$, которую можно рассматривать как $\mathbb{F}_p FH$ -модуль. По лемме 1.1, $V = [U, F] \neq 0$ — свободный $\mathbb{F}_p FH$ -модуль. Поэтому существует нетривиальная неподвижная точка группы H в V , а значит и в P . \square

Конечная p -группа P называется *мощной*, если $[P, P] \leq P^p$ при $p \neq 2$ или $[P, P] \leq P^4$ при $p = 2$ (здесь $A^n = \langle a^n \mid a \in A \rangle$). Мощные p -группы являются незаменимым инструментом в исследовании рангов конечных p -групп.

ЛЕММА 1.3 [11]. (а) Если мощная p -группа P порождается d элементами, то ранг группы P не превосходит d и P является произведением d циклических подгрупп.

(б) Если P — конечная p -группа ранга r , то P содержит характеристическую мощную подгруппу индекса не выше $p^{r(\log_2 r + 2)}$.

ЛЕММА 1.4. Если конечная p -группа P имеет ранг r и период p^n , то $|P| \leq p^{nf(r)}$ для некоторого r -ограниченного числа $f(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.3(б) группу P можно считать мощной; лемма 1.3(а) завершает доказательство. \square

Следующий результат был получен в [12] для разрешимых групп на основе теорем типа Холла–Хигмэна и распространён с использованием классификации на произвольные конечные группы в [13] (с оценкой $2d$) и [14].

ЛЕММА 1.5 [12–14]. Если d — максимальный ранг силовских p -подгрупп конечной группы (по всем простым числам p), то ранг этой группы не превосходит $d + 1$.

Приведём также следующий известный факт о нильпотентных группах.

ЛЕММА 1.6. Пусть G — нильпотентная группа степени нильпотентности s .

(а) Порядок группы G ограничен в терминах s и порядка группы $G/[G, G]$.

(б) Ранг группы G ограничен в терминах s и ранга группы $G/[G, G]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\gamma_i = \gamma_i(G)$ члены нижнего центрального ряда группы G . Оба утверждения являются следствиями того, что существует гомоморфизм

$$\underbrace{\gamma_1/\gamma_2 \otimes \cdots \otimes \gamma_1/\gamma_2}_k \rightarrow \gamma_k/\gamma_{k+1}$$

из тензорной степени на γ_k/γ_{k+1} . \square

§ 2. Конечные p -группы

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1. Напомним, что P — конечная p -группа, допускающая фробениусову группу автоморфизмов FH копростого порядка с ядром F и дополнением H , такую что $P = [P, F]$.

(а) Начнём с ограничения на степень нильпотентности группы P . Для краткости обозначим через $\gamma_i = \gamma_i(P)$ члены нижнего центрального ряда группы P . Пусть $|C_P(H)| = p^m$. По лемме 1.2, как только $[V, F] \neq 1$ для FH -инвариантной секции V , выполняется $C_V(H) \neq 1$. Поэтому существует не более m факторов нижнего центрального ряда группы P , где F действует нетривиально. Значит, для какого-то $i \leq 2m$ группа F действует тривиально на двух последовательных факторах γ_i/γ_{i+1} и $\gamma_{i+1}/\gamma_{i+2}$. Тогда

$$[F, \gamma_i, P] \leq [\gamma_{i+1}, P] = \gamma_{i+2} \text{ и } [\gamma_i, P, F] = [\gamma_{i+1}, F] \leq \gamma_{i+2}.$$

По лемме о трёх коммутантах отсюда вытекает, что

$$[[P, F], \gamma_i] = [P, \gamma_i] = \gamma_{i+1} \leq \gamma_{i+2}.$$

Следовательно, $\gamma_{i+1} = 1$, поскольку P нильпотентная группа.

(б) Теперь у нас имеется оценка степени нильпотентности группы P , и оценка порядка будет следовать из леммы 1.6(a), если получить оценку на порядок группы P/γ_2 .

Так как действие копростое, абелева группа P/γ_2 представима в виде

$$P/\gamma_2 = C_{P/\gamma_2}(F) \times [P/\gamma_2, F] = C_{P/\gamma_2}(F) \times P/\gamma_2,$$

откуда $C_{P/\gamma_2}(F) = 1$. По [5, теор. 2.7(a)], $|P/\gamma_2| = |C_{P/\gamma_2}(H)|^{|H|}$ (этот факт является несложным следствием леммы 1.1). Так как действие копростое, имеем $|C_{P/\gamma_2}(H)| \leq |C_P(H)|$. При этом степень нильпотентности группы P не превосходит $2 \log_p |C_P(H)| \leq 2 \log_2 |C_P(H)|$. Поэтому порядок $|P|$ действительно ограничен в терминах только $|C_P(H)|$ и $|H|$.

(в) Получим оценку ранга группы P . Ключевым моментом является доказательство того, что P обладает мощной p -подгруппой ограниченного ранга и „ко-ранга“. Построение мощной подгруппы аналогично тому, как это было сделано в [15, 16]. Сначала оценим число порождающих группы P . Всюду далее в этом параграфе через $r = \mathbf{r}(C_P(H))$ для краткости обозначается ранг подгруппы $C_P(H)$.

ЛЕММА 2.1. *Группа P порождается $r|H|$ элементами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим действие группы FH на фактор-группе по подгруппе Фраттини $V = P/\Phi(P)$. Как и в п. (б), легко понять, что $C_V(F) = 1$. По [5, теор. 2.7(a)] (или как следствие леммы 1.1) справедливо $|V| = |C_V(H)|^{|H|} \leq p^{r|H|}$. \square

Пусть M — некоторая нормальная FH -инвариантная подгруппа из P , которую мы выберем позже.

Рассмотрим фактор-группу $\bar{P} = P/M^p$ (или P/M^4 при $p = 2$); пусть черта обозначает образы.

Поскольку $\bar{M} = M/M^p$ (или $\bar{M} = M/M^4$) имеет период p (или 4), порядок группы $C_{\bar{M}}(H)$ не превосходит p^f для некоторого r -ограниченного числа $f = f(r)$ по лемме 1.4.

Как обычно, члены верхнего центрального ряда обозначаются через ζ_i , начиная с центра ζ_1 .

ЛЕММА 2.2. *Имеем $\bar{M} \leq \zeta_{2f+1}(\bar{P})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий центральный ряд группы \bar{P} :

$$M_1 = \bar{M} > M_2 > M_3 > \dots > 1, \text{ где } M_i = [\dots[\bar{M}, \underbrace{\bar{P}, \dots, \bar{P}}_{i-1}]].$$

Все M_i являются нормальными FH -инвариантными подгруппами из \bar{P} . Положим $V_i = M_i/M_{i+1}$ и рассмотрим действие группы FH на этих секциях.

Как только $[V_i, F] \neq 1$, имеем $C_{V_i}(H) \neq 1$ по лемме 1.2. Так как $|C_{\bar{M}}(H)| \leq p^f$, существует не более f факторов V_i , для которых $[V_i, F] \neq 1$.

Поэтому для некоторого $k \leq 2f + 1$ выполняются $[V_k, F] = 1$ и $[V_{k+1}, F] = 1$. Другими словами,

$$[[F, M_k], \bar{P}] \leq [M_{k+1}, \bar{P}] = M_{k+2} \text{ и } [[M_k, \bar{P}], F] = [M_{k+1}, F] \leq M_{k+2}.$$

Отсюда по лемме о трёх коммутантах

$$[[\bar{P}, F], M_k] = [\bar{P}, M_k] = M_{k+1} \leq M_{k+2}.$$

Группа \bar{P} нильпотентна, поэтому $M_{k+1} = 1$. В самом деле, из $M_{k+1} \leq M_{k+2}$ следует $[M_{k+1}, \bar{P}] \leq [M_{k+2}, \bar{P}]$, т. е. $M_{k+2} \leq M_{k+3}$, и т. д., становясь в конце концов тривиальной подгруппой в силу нильпотентности группы \bar{P} .

Полученное равенство $M_{k+1} = 1$ означает, что $\bar{M} \leq \zeta_k(\bar{P}) \leq \zeta_{2f+1}(\bar{P})$. \square

Продолжим доказательство того, что ранг группы P ограничен в терминах r и $|H|$. Положим $M = \gamma_{2f+1}$ (напомним, что $\gamma_{2f+1} = \gamma_{2f+1}(P)$). Удобно ввести единое обозначение $p_* = p$, если $p \neq 2$, и $p_* = 4$, если $p = 2$.

В силу леммы 2.2 имеем $[\bar{M}, \bar{M}] \leq [\gamma_{2f+1}(\bar{P}), \zeta_{2f+1}(\bar{P})] = 1$, т. е. $[M, M] \leq M^{p_*}$. Значит, $M = \gamma_{2f+1}(P)$ является мощной p -подгруппой группы P .

Фактор-группа $P/\gamma_{2f+1}^{p_*}$ нильпотентна степени $4f + 1$, поскольку $\gamma_{2f+1}/\gamma_{2f+1}^{p_*} \leq \zeta_{2f+1}(P/\gamma_{2f+1}^{p_*})$ по лемме 2.2 в силу выбора подгруппы M .

По лемме 2.1 группа P порождается $r|H|$ элементами, а группа $P/\gamma_{2f+1}^{p_*}$ нильпотентна степени $4f + 1$, следовательно в силу леммы 1.6(б) ранг группы $P/\gamma_{2f+1}^{p_*}$ ограничен в терминах r и $|H|$.

В частности, ранг группы $\gamma_{2f+1}/\gamma_{2f+1}^{p^*}$ ограничен в терминах r и $|H|$. Так как $\gamma_{2f+1}^{p^*} \leq \Phi(\gamma_{2f+1})$, получаем, что число порождающих группы γ_{2f+1} ограничено в терминах r и $|H|$. В мощной p -группе число порождающих равно её рангу (лемма 1.3(a)), поэтому ранг группы γ_{2f+1} ограничен в терминах r и $|H|$.

Итак, и ранг группы P/γ_{2f+1} , и ранг группы γ_{2f+1} ограничены в терминах r и $|H|$, следовательно ранг группы P ограничен в терминах r и $|H|$, что и требовалось. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Обе функции в пп. (б) и (в) теоремы 1 можно, конечно, считать неубывающими по каждому из их аргументов. Действительно, любую функцию $f(x, y)$ от двух натуральных переменных можно, напр., заменить на функцию

$$\bar{f}(x, y) = \sup_{\substack{u \leq x, \\ v \leq y}} f(u, v),$$

которая уже будет обладать требуемым свойством.

§ 3. Общий случай

Пусть G — конечная группа, допускающая фробениусову группу автоморфизмов FH копростого порядка с ядром F и дополнением H .

Для каждого простого p через S_p обозначается FH -инвариантная силовская p -подгруппа из G (одна для каждого p). Имеем $S_p = C_{S_p}(F)[S_p, F]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. (а) По теореме 1(б) имеем $|[S_p, F]| \leq f_1(|H|, |C_{[S_p, F]}(H)|)$ для некоторой функции f_1 , неубывающей по каждому аргументу. Поэтому

$$|S_p| \leq |C_{S_p}(F)| \cdot f_1(|H|, |C_{[S_p, F]}(H)|).$$

Заметим также, что $S_p = C_{S_p}(F)$, если $[S_p, F] = 1$. Поскольку $|G| = \prod_p |S_p|$ и $|C_G(F)| = \prod_p |C_{S_p}(F)|$, получаем

$$|G| \leq \prod_p |C_{S_p}(F)| \cdot \prod_{[S_p, F] \neq 1} f_1(|H|, |C_{[S_p, F]}(H)|)$$

$$= |C_G(F)| \cdot \prod_{[S_p, F] \neq 1} f_1(|H|, |C_{[S_p, F]}(H)|).$$

С другой стороны, $C_{[S_p, F]}(H) \neq 1$, как только $[S_p, F] \neq 1$, в силу леммы 1.2. Поэтому в произведении в правой части простые числа p делят $|C_G(H)|$. По грубой оценке существует не более $\log_2 |C_G(H)|$ таких простых чисел. Значит,

$$|G| \leq |C_G(F)| \cdot f_1(|H|, |C_G(H)|)^{\log_2 |C_G(H)|},$$

что является требуемой верхней оценкой на порядок с функцией

$$f(|H|, |C_G(H)|) = f_1(|H|, |C_G(H)|)^{\log_2 |C_G(H)|}. \quad \square$$

(б) По теореме 1(в) для каждого простого числа p имеем

$$\mathbf{r}([S_p, F]) \leq f_2(|H|, \mathbf{r}(C_{[S_p, F]}(H)))$$

для некоторой функции f_2 , неубывающей по каждому аргументу. Поэтому

$$\mathbf{r}(S_p) \leq \mathbf{r}(C_{S_p}(F)) + f_2(|H|, \mathbf{r}(C_{[S_p, F]}(H))) \leq \mathbf{r}(C_G(F)) + f_2(|H|, \mathbf{r}(C_G(H))).$$

По лемме 1.5 верхняя оценка ранга группы G получается прибавлением единицы к правой части. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Нерешённые вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 17-е изд., Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 2010, <http://www.math.nsc.ru/~alglog/17kt.pdf>.
2. *E. I. Khukhro*, Graded Lie rings with many commuting components and an application to 2-Frobenius groups, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **40**, No. 5 (2008), 907–912.
3. *N. Yu. Makarenko*, *P. Shumyatsky*, Frobenius groups as groups of automorphisms, *Proc. Am. Math. Soc.*, **138**, No. 10 (2010), 3425–3436.
4. *Е. И. Хухро*, Нильпотентная длина конечной группы, допускающей фробениусову группу автоморфизмов с ядром без неподвижных точек, *Алгебра и логика*, **49**, № 6 (2010), 819–833.

5. *E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, P. Shumyatsky*, Frobenius groups of automorphisms and their fixed points, to appear in *Forum Math.*, 2011; DOI: 10.1515/FORM.2011.152; arxiv.org/abs/1010.0343.
6. *Н. Ю. Макаренко, Е. И. Хухро, П. Шумяцкий*, Неподвижные точки фробениусовых групп автоморфизмов, *Докл. РАН*, **437**, № 1 (2011), 20–23.
7. *P. Shumyatsky*, On the exponent of a finite group with an automorphism group of order twelve, *J. Algebra*, **331**, No. 1 (2011), 482–489.
8. *P. Shumyatsky*, Positive laws in fixed points of automorphisms of finite groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **215**, No. 11 (2011), 2559–2566.
9. *E. I. Khukhro*, Fitting height of a finite group with a Frobenius group of automorphisms, *J. Algebra*, **366** (2012), 1–11.
10. *Е. И. Хухро*, Автоморфизмы конечных p -групп, допускающих расщепление, *Алгебра и логика*, **51**, № 3 (2012), 392–411.
11. *A. Lubotzky, A. Mann*, Powerful p -groups, I: Finite groups, *J. Algebra*, **105**, No. 2 (1987), 484–505.
12. *L. G. Kovács*, On finite soluble groups, *Math. Z.*, **103** (1968), 37–39.
13. *P. Longobardi, M. Maj*, On the number of generators of a finite group, *Arch. Math.*, **50**, No. 2 (1988), 110–112.
14. *R. M. Guralnick*, On the number of generators of a finite group, *Arch. Math.*, **53**, No. 6 (1989), 521–523.
15. *E. I. Khukhro, V. D. Mazurov*, Finite groups with an automorphism of prime order whose centralizer has small rank, *J. Algebra*, **301**, No. 2 (2006), 474–492.
16. *P. Shumyatsky*, Involutory automorphisms of finite groups and their centralizers, *Arch. Math.*, **71**, No. 6 (1998), 425–432.

Поступило 22 августа 2012 г.

Адрес автора:

ХУХРО Евгений Иванович, Ин-т матем. СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4,
г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: khukhro@yahoo.co.uk