Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

D. V. Yakubovich, Invariant subspaces of multiplication by z of E^p in a multiply connected domain, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1989, Volume 178, 166–183

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
January 13, 2025, 17:35:47

Д.В.Якубович

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА УМНОЖЕНИЯ НА z В ПРОСТРАНСТВЕ E^p В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть G – ограниченная многосвязная область в $\mathbb{C}$ с границей, состоящей из конечного числа замкнутых C^1-гладких попарно непересекающихся кривых (такие области будем называть допустимыми), и пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$. В статье получено описание (замкнутых) подпространств $\mathcal{L}$ в $E^p(G)$, инвариантных относительно оператора умножения $M_z x(z)=zx(z)$. Здесь $E^p(G)$ – пространство Харди-Смирнова [1], $E^\infty(G)$ рассматривается в $*$ -слабой топологии.

Ранее эта задача была решена для следующих специальных случаев. Сарасон в [2] рассмотрел случай, когда $G=\{a<|z|<b\}$ – кольцо, и $\mathcal{L}$ – рационально инвариантно, т.е.

$$x\in\mathcal{L}\Rightarrow Q(z)x(z)\in\mathcal{L}$$

для всех рациональных функций Q с полюсами вне $\overline{G}$. Хасуми, Войчик [3,4] получили описание рационально инвариантных подпространств для произвольной области G. Все инвариантные подпространства в кольце для случая $p=2$ недавно описаны Хиттом [5]. Результат Хитта, однако, в некотором отношении неполон, и этот недостаток исправлен Сарасоном [6]. (Ниже в приложении предложены более прямые доказательства некоторых лемм из [5,6]). Методы Хитта и Сарасона существенно используют гильбертову технику и то, что G – круговое кольцо. Для произвольной области G с гладкой границей и произвольного p Ройденом [7] было получено описание инвариантных подпространств, подчиненных некоторому достаточно сильному, как он пишет, предположению.

Предложенное в статье описание всех инвариантных подпространств в $E^p(G)$ отличается от описания Хитта-Сарасона. Если граница области G содержит "углы", то обнаруживаются некоторые эффекты, отсутствующие в случаях, рассмотренных всеми перечисленными авторами (см. замечания 2,3 к теореме 1). Полученное описание, как и у Хитта [5], неполно в смысле, что не охарактеризован класс функциональных параметров. Для случая $p=2$ и аналитической границы области G, предложено другое описание без этого недостатка.

Техника доказательств отличается от [5,6]; настоящую статью можно рассматривать как продолжение [8, гл.4]. В доказательстве теоремы 2 применяется теорема Хитта-Сарасона. Существенно используется метод Б.М.Соломяка [9,10] аналитического продолжения и "склейки" интегралов Коши.

Статья дает ответы на ряд вопросов, поставленных Хиттом в [5, разд.9]. Гипотеза Ройдена [7, стр.152] остается открытой.

1. Необходимые определения и формулировки результатов. Напомним понятия, связанные с классами E^p и H^p (см. [11,12,7] и др.). Пусть Ω - допустимая (односвязная или многосвязная) область. Функция $\Phi\in H^\infty(\Omega)$ называется внутренней, если $|\Phi| = \mathrm{const}$ п.в. на каждой компоненте границы $\partial\Omega$ (см.[7], в [12] принято несколько другое определение). Как показано в [3,4], решетка рационально инвариантных подпространств в $E^p(\Omega)$ совпадает с множеством подпространств $\Phi\cdot E^p(\Omega)$, где Φ - внутренняя в Ω функция. Будем говорить, что функция x, $x\in E^p(\Omega)$ делится на внутреннюю функцию Φ, если $x=\Phi\cdot y$, $y\in E^p(\Omega)$. Функция $x\in E^p(\Omega)$ называется внешней, если она делится только на $\Phi\equiv \mathrm{const}$. Нам потребуются классы Неванлинны $N(\Omega)= =\{g_1/g_2: g_1,g_2\in H^\infty(\Omega)\}$ и Смирнова $\mathfrak{D}(\Omega)=\{g_1/g_2: g_1,g_2\in H^\infty(\Omega), g_2$ - внешняя$\}$. Имеют место включения $E^p(\Omega)\subset\mathfrak{D}(\Omega)\subset N(\Omega)$ при $p>0$. Функция $x\in\mathfrak{D}(\Omega)$ называется внешней, если $x=g_1/g_2$, g_1,g_2 - внешние класса $H^\infty(\Omega)$.

Отметим, что для любого семейства $\mathcal{U}$ функций из $E^p(\Omega)$ существует его наибольший общий делитель $\text{НОД}(\mathcal{U})$ со свойствами: $\text{НОД}(\mathcal{U})$ -внутренняя функция; внутренняя функция Φ делит все функции из $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда она делит $\text{НОД}(\mathcal{U})$. Отметим также, что если φ - конформное отображение области Ω на какую-нибудь область с аналитической границей, то φ' - внешняя функция, и умножение на функцию $(\varphi')^{1/p}$ - изоморфизм $E^p(\Omega)$ на $H^p(\Omega)$. Поэтому описание инвариантных подпространств оператора $M_{z|G}$ в $E^p(G)$ переформулируется и для $H^p(G)$, и обратно. Если $\partial\Omega$ - C^2-гладкая кривая, то $E^p(\Omega)= H^p(\Omega)$.

Будут использоваться обозначения: $\hat{\mathbb{C}}$ - расширенная комплексная плоскость, $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$ - единичный круг, $\mathbb{T}=\{|z|=1\}$ - единичная окружность.

Пусть V_0 - неограниченная, $V_1,\dots,V_s$ $(s\geq 1)$ - ограниченные компоненты множества $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ и $\Gamma_j=\partial V_j$. Положим $\Gamma_{int}=\Gamma_1\cup\dots\cup\Gamma_s$, Γ_{int} - "внутренняя" граница области G. Символом $\mathrm{Lat}(M_{z|G})$ будем обозначать решетку инвариантных подпространств оператора $M_{z|G}$ в $E^p(G)$ (т.е. таких подпространств $\mathcal{L}$, что $M_{z|G}\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$).

Пусть $\chi\in L^\infty(\Gamma_{int})$. Введем обозначение

$$L(\chi)=\{x\in E^p(G):\ \chi x\mid\Gamma_j\in E^p(V_j),\ j=1,\dots,s\};$$

здесь мы не делаем отличия между функцией из $E^p(V_j)$ и ее граничными значениями. Очевидно, $L(\chi)\in Lat(M_{z|G})$; если $\chi\neq 0$, $L(\chi)\neq\{0\}$, то $L(\chi)$ – не рационально инвариантное подпространство.

Для каждого $\mathcal{L}\in Lat(M_{z|G})$, $\mathcal{L}\neq\{0\}$, и каждого j, $1\leqslant j\leqslant s$, рассмотрим пространство

$$\mathcal{H}_j=clos_{L^p(\Gamma_j)}\{x\mid\Gamma_j : x\in\mathcal{L}\},$$

инвариантное относительно $M_{z|\Gamma_j}$. Используя конформное отображение области V_j на круг, из теоремы Сринивасана (см.[13], лекцию 4) легко вывести, что $\mathcal{H}_j=L^p(\Gamma_j)$, либо $\mathcal{H}_j=(1/\chi_j)\cdot E^p(V_j)$, где $\chi_j\in L^\infty(\Gamma_j)$, $|\chi_j|\equiv 1$ п.в. В первом случае положим $\chi_j=0$. Функция $\chi_{\mathcal{L}}$, $\chi_{\mathcal{L}}\in L^\infty(\Gamma_{int})$, определенная равенствами $\chi_{\mathcal{L}}\mid\Gamma_j=\chi_j$, в дальнейшем будет играть важную роль. Очевидно, $\mathcal{L}\subset L(\chi_{\mathcal{L}})$ для любого $\mathcal{L}\in Lat(M_{z|G})$.

Легко видеть, что каждое инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ оператора $M_{z|G}$ представимо в виде $\mathcal{L}=\Phi_{\mathcal{L}}\cdot\mathcal{L}'$; здесь $\Phi_{\mathcal{L}}=\text{НОД}(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}'\in Lat(M_{z|G})$, $\text{НОД}(\mathcal{L}')=1$. При описании инвариантных подпространств $\mathcal{L}\in Lat(M_{z|G})$ ограничимся поэтому теми из них, для которых $\text{НОД}(\mathcal{L})=1$. Как показал Ройден [7, теорема 5], если контур ∂G – C^1 – гладкий, то всякое ненулевое подпространство $\mathcal{L}\in Lat(M_{z|G})$ такое, что $\text{НОД}(\mathcal{L})=1$ и $0<C_1<|x|<C_2$ для некоторых $x\in\mathcal{L}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$, имеет вид

$$\mathcal{L}=L(\chi_{\mathcal{L}}).$$

Пусть B – допустимая область. Пространство слабого типа $L_0^{1,\infty}(\partial B)$ состоит из измеримых функций f на ∂B таких, что

$$\|f\|_{1,\infty}\overset{def}{=}\sup\{A\cdot m(|f|>A): A>0\}<\infty;$$

$$m(|f|>A)=o(A^{-1}),\quad A\to+\infty$$

(здесь и далее m – одномерная мера Лебега). Положим $E_0^{1,\infty}(B)=\mathcal{D}(B)\cap L_0^{1,\infty}(\partial B)$. Символом $d\omega_B$ обозначим гармоническую меру области B (относительно какой-нибудь точки $\lambda\in B$). Известно [12], что функция $\log|f|$ суммируема на ∂B

по мере $d\omega_B$ для любой $f\in N(\Omega)$. Если область B односвязна, то для любой вещественной функции $h\in L^1(d\omega_B)$ существует внешняя функция $f\in\mathcal{D}(B)$ такая, что $\log|f|=h$ п.в. на ∂B.

ТЕОРЕМА I. (i) Любое ненулевое инвариантное подпространство $\mathcal{L}\in Lat(M_{z|G})$ в $E^p(G)$ такое, что $НОД(\mathcal{L})=1$, имеет вид

$$\mathcal{L}=\{x:\varphi\cdot x|\Gamma_j\in E_0^{1,\infty}(V_j),\ j\geqslant 1\}; \tag{I}$$

здесь φ – измеримая на Γ_{int} функция, $|\varphi|=0$ или $|\varphi|\geqslant 1$ на Γ_j при каждом j.

(ii). Если при каком-то j, $1\leqslant j\leqslant s$, выполнено любое из условий

(а) $\exists x\in\mathcal{L}:\int_{\Gamma_j}\log|x|\,d\omega_{V_j}>-\infty$

(б) $d\omega_{V_j}\leqslant C\cdot d\omega_G$ на Γ_j,

то в (I) условие $\varphi\cdot x|\Gamma_j\in E_0^{1,\infty}(V_j)$ можно заменить условиями $\chi_{\mathcal{L}}\,x\,|\Gamma_j\in E^p(V_j),\ \rho_j\cdot x\in L_0^{1,\infty}(\Gamma_j)$,

где ρ_j – некоторая неотрицательная измеримая функция. Если для всех $j\geqslant 1$ выполнено (а) или (б), то для некоторой измеримой функции ρ, $\rho\geqslant 0$ на Γ_{int},

$$\mathcal{L}=\{x\in L(\chi_{\mathcal{L}}):\rho\cdot x\in L_0^{1,\infty}(\Gamma_{int})\}. \tag{2}$$

ЗАМЕЧАНИЯ. I) Если $НОД(\mathcal{L})=\Phi\neq 1$, то (I) и (2) заменяются соответственно на равенства

$$\mathcal{L}=\{x\in\Phi\cdot E^p(G):\varphi\cdot x|\Gamma_j\in E_0^{1,\infty}(V_j),\ j\geqslant 1\}, \tag{I$'$}$$

$$\mathcal{L}=\{x\in\Phi\cdot E^p(G)\cap L(\chi_{\mathcal{L}}):\rho\cdot x\in L_0^{1,\infty}(\Gamma_{int})\}, \tag{2$'$}$$

это легко следует из равенств $\mathcal{L}=\Phi\cdot\mathcal{L}'$, $НОД(\mathcal{L}')=1$.

2) Из (б) следует (а). Если (а) выполнено и $\chi_{\mathcal{L}}|\Gamma_j=0$, то $(z-\lambda)^{-1}\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$ при $\lambda\in V_j$, и можно считать $\rho_j=0$.

3) Легко видеть, что пространство $\mathcal{E}_x=span\{z^n x:n\geqslant 0\}$, порожденное функцией $x\in E^p(G)$, допускает описание $\mathcal{E}_x=(\mathcal{D}(\mathbb{C}\setminus\overline{V_0})\cdot x)\cap E^p(G)$ (см.[2,8]). Из теоремы Сринивасана [I3] следует, что $\chi_{\mathcal{L}}\equiv 0$ на Γ_j при нарушении условия (а). Если нарушено условие (б) при некотором j, то пространство $\mathcal{L}=\mathcal{E}_x$ при подходящем x доставляет пример пространства, для которого нарушено (а), $\chi_{\mathcal{L}}|\Gamma_j=0$, но $(z-\lambda)^{-1}\mathcal{L}\not\subset\mathcal{L}$ при $\lambda\in V_j$.

Сходное с (б) условие имеется в работах А.Л.Вольберга–Б.М.Соломяка (см., например,[9,I0]).

Неясно, какие функции $\varphi,\rho,\chi_{\mathcal{L}}$ могут участвовать в формулах (I) и (2). В следующей теореме для $p=2$ этот недостаток устранен.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s$ – аналитические кривые и τ_j – конформные отображения V_j на $\mathbb{D}$ $(j\geq 1)$.

I) Для любого инвариантного подпространства $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}\subset E^2(G)$, $\mathcal{L}\in \mathrm{Lat}(M_{z|G})$, $\text{НОД}(\mathcal{L})=1$, найдутся внешние функции $g_j\in E^2(V_j)$ $(j=1,\ldots,s)$, числа $m_j\in\mathbb{Z}$ и внутренние в V_j функции θ_j такие, что

(а) $|g_j|^2=\mathrm{Re}(\tau_j\theta_j v_j)+1$ п.в. на Γ_j для некоторых функций $v_j\in E_0^{1,\infty}(V_j)$,

(б) $\mathcal{L}=\{x\in\mathcal{L}(\chi):|x|\cdot|g_j|^{-1}\in L^2(\Gamma_j), j=1,\ldots,s\}$;

здесь функция $\chi\in L^\infty(\Gamma_{int})$ определяется равенствами

$$\chi|\Gamma_j=\tau_j^{m_j}\,\theta_j g_j/\overline{g}_j. \tag{5}$$

2) Обратно, для любых таких функций g_j, θ_j, удовлетворяющих (а), пространство $\mathcal{L}$, определенное из (5), (б), замкнуто в $E^2(G)$, инвариантно относительно $M_{z|G}$, $\mathcal{L}\neq\{0\}$, и $\chi_{\mathcal{L}}=\chi$.

Поясним связь этой теоремы с теоремой Хитта [5], относящейся к случаю $E^2(A)$, где $A=\{1<|z|<R\}$ – кольцо.

Положим $E=\hat{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}}$. Пусть P_+ – ортопроектор Рисса из $L^2(\mathbb{T})$ на H^2, и $P_-=I-P_+$. Проектор P_+ действует также из $L^1(\mathbb{T})$ в $E_0^{1,\infty}(\mathbb{D})$; см.[II]. Для вещественных функций $h\in L^2(\mathbb{T})$ имеет место тождество $|h|^2=2\mathrm{Re}P_+|h|^2-\|h\|_2^2$. Учитывая исследование Сарасона [6], результат Хитта можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 3 (Хитт–Сарасон). Пусть $\mathcal{L}$ – ненулевое инвариантное подпространство оператора M_z в $E^2(A)$, и $\text{НОД}(\mathcal{L})=1$. Тогда найдутся внутренняя в $\mathbb{D}$ функция θ, внешняя в E функция $g_\infty\in H^2(E)$ и $m\in\mathbb{Z}$ такие, что: (а) $P_+|g_\infty|^2-1=z\theta v$ для некоторой $v\in E_0^{1,\infty}(\mathbb{D})$,

(б) $\mathcal{L}=z^m\cdot g_\infty\cdot L(\theta)$.

Обратно, для любых $m\in\mathbb{Z}$ и функций θ, g_∞, удовлетворяющих (а), пространство $\mathcal{L}$, определяемое из (б) – замкнутое инвариантное относительно M_z в $E^2(A)$, и $\text{НОД}(\mathcal{L})=1$.

Поскольку в таком виде явно эта теорема в [5,6] не сформулирована, в приложении приводится план ее доказательства.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $G=A$ – кольцо, $\Gamma_0=R\cdot\mathbb{T}$, $\Gamma_1=\mathbb{T}$, то теорема 2 прямо следует из теоремы Хитта-Сарасона. Действительно, положим $m_1=-m$, $g_1(z)=\overline{g}_\infty(\overline{z}^{-1})$ $(g_1\in H^2)$, и χ определим из (5) (здесь $\tau_1(z)\equiv z$). Условие (а) теоремы 2 следует из (а) теоремы Хитта-Сарасона. Далее, $y\in z^m g_\infty L(\theta)\Rightarrow z^{-m}y\theta\overline{g}_\infty/g_\infty|\mathbb{T}\in H^1$ (так как $\overline{g}_\infty=g_1$ на $\mathbb{T}$) $\Rightarrow\chi y\in H^2$ (так как $\chi y\in L^2(\mathbb{T})$). Обратно, если $x\in L(\chi)$, $|xg_\infty^{-1}|\in L^2(\mathbb{T})$, то $z^{-m}\theta x g_\infty^{-1}=$ $=\chi\overline{g}_\infty^{-1}x\in\mathcal{D}(\mathbb{D})\cap L^2(\mathbb{T})=H^2$, и поэтому $x\in z^m g_\infty L(\theta)$.

Из представления (б) теоремы 2 следует утверждение (б) теоремы 3); см. доказательство теоремы 2.

2. Доказательства теорем I и 2. Нам потребуются несколько лемм. Пусть Ω – допустимая область. Функция f, $f\in L_0^{1,\infty}(\partial\Omega)$, называется A-интегрируемой, если существует предел $\lim\limits_{A\to\infty}\int_{|f|\le A}f\,dm\overset{def}{=}\int_{\partial\Omega}f\,dm$. Из теорем 3 и 9 работы [I4] следует, что если Ω – допустимая область, $\partial\Omega$ не образует нулевых углов, $f\in E_0^{1,\infty}(\partial\Omega)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}(A)\int\limits_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}f(z), & z\in\Omega\\ 0, & z\notin\Omega.\end{cases}\tag{6}$$

Отсюда легко вытекает

ЛЕММА I (о склейке) [I0]. Если Ω_1,Ω_2,Ω – допустимые области, $\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2=\overline{\Omega}$, $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$, $f_i\in E_0^{1,\infty}(\Omega_i)$, $f_1=f_2$ п.в. на $\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$, то $f_i=f|\Omega_i$ для некоторой $f\in E_0^{1,\infty}(\Omega)$.

(возможность склейки в угловых точках границы следует из возможности склейки в остальных точках).

СЛЕДСТВИЕ. Если $f,g\in E_0^{1,\infty}(\mathbb{D})$, $f(0)=g(0)=0$, $\mathrm{Re}f=\mathrm{Re}g$ п.в. на $\mathbb{T}$, то $f=g$.

Действительно, для функции φ, равной $f-g$ в $\mathbb{D}$ и $\overline{g}(\overline{z}^{-1})-\overline{f}(\overline{z}^{-1})$ в $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}}$, по лемме о склейке и теореме Лиувилля имеем $\varphi\equiv0$. ●

Если $f\in L^1(\partial\Omega)$, то интеграл Коши

$$K_f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

определяет функции $K_{f,\Omega}=K_f|\Omega\in E_0^{1,\infty}(\Omega)$ и $K_{f,\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega}=$ $=K_f|\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega\in E_0^{1,\infty}(\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega)$. При этом $K_{f,\Omega}-K_{f,\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega}=f$ п.в. на $\partial\Omega$ по формуле Привалова-Племеля [II]. Отметим также (см. [I4, I5]), что

$$\|K_{f,\Omega}\|_{E_0^{1,\infty}} \leq C_\Omega \|f\|_1. \tag{7}$$

Пусть $q \in [1,\infty]$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Если $x \in E^p(G)$ и $\alpha \in L^q(\partial G)$, то положим $\langle \alpha, x\rangle_G = \langle \alpha, x\rangle = \int_{\partial G} \alpha(\zeta)x(\zeta)d\zeta$; каждая компонента границы ∂G здесь предполагается положительно ориентированной. Любой функционал на $E^p(G)$ (неоднозначно) представим в виде $x \mapsto \langle \alpha, x\rangle$, $\alpha \in L^q(\partial G)$. Будем писать $\alpha \perp\!\!\!\perp x$, если $\langle \alpha, z^n x\rangle = 0$ для всех $n \geqslant 0$. Так как $K_{\alpha x}(\lambda) = \frac{i}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}\langle \alpha, z^n x\rangle$ при больших $|\lambda|$, то

$\alpha \perp\!\!\!\perp x \iff K_{\alpha x}|V_0 \equiv 0.$

ЛЕММА 2. Пусть $x \in E^p(G)$, $\alpha \in L^q(\partial G)$. Положим $\alpha_j = \alpha|\Gamma_j$, $j = 0,\dots,s$. Тогда условие $\alpha \perp\!\!\!\perp x$ равносильно условиям

(i) $\exists \tilde{\alpha} \in N(G): \tilde{\alpha} = \alpha$ п.в. на Γ_0, $\tilde{\alpha} x \in \mathfrak{D}(G)$

(ii) $(\tilde{\alpha}+\alpha_j)x|\Gamma_j \in E_0^{1,\infty}(V_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \perp\!\!\!\perp x$, тогда $K_{\alpha x} \equiv 0$ в V_0, и следовательно, $K_{\alpha x, G}|\Gamma_0 = \alpha_0 x$. Полагая $\tilde{\alpha} = K_{\alpha x, G}/x$, получаем (i): Так как $(\tilde{\alpha}+\alpha_j)x|\Gamma_j = K_{\alpha x, V_j}|\Gamma_j$ по формуле Привалова–Племеля, то выполнено (ii).

Обратно, пусть выполнены (i), (ii). Тогда $(\tilde{\alpha}+\alpha_j)x = \beta_j$ п.в. на Γ_j $(j \geqslant 1)$, где $\beta_j \in E_0^{1,\infty}(V_j)$. Определим функцию $\varphi_{\alpha,x}$ в $\hat{\mathbb{C}} \setminus \partial G$ по правилу

$$\varphi_{\alpha,x}(\lambda) = \begin{cases} K_{\alpha x}(\lambda), & \lambda \in V_0, \\ K_{\alpha x}(\lambda) + \tilde{\alpha}(\lambda)x(\lambda), & \lambda \in G, \\ K_{\alpha x}(\lambda) + \beta_j(\lambda), & \lambda \in V_j,\ j \geqslant 1. \end{cases}$$

Ее граничные значения совпадают п.в. на ∂G. Так как $\tilde{\alpha}x = \beta_j - \alpha_j x$ п.в. на Γ_j при $j \geqslant 1$, то $\tilde{\alpha}x \in E_0^{1,\infty}(G)$ ввиду (i). По лемме о склейке, $\varphi_{\alpha,x}$ аналитична в $\hat{\mathbb{C}}$. Так как $\varphi_{\alpha,x}(\infty) = 0$, то $\varphi_{\alpha,x} \equiv 0$, $\alpha \perp\!\!\!\perp x$. ∎

ЛЕММА 3. Функция $f \mapsto \|f\|_{1,\infty}^{1/2}$ есть метрика в $L_0^{1,\infty}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В очевидном неравенстве $m\{|f_1+f_2| > y_1+y_2\} \leqslant m\{|f_1| > y_1\} + m\{|f_2| > y_2\}$ надо положить

$y_j = C\|f_j\|_{1,\infty}^{1/2} \cdot (\|f_1\|_{1,\infty}^{1/2} + \|f_2\|_{1,\infty}^{1/2})^{-1}$, $C > 0$. ∎

Введем обозначение $\log_* x = \log x$ при $x \geqslant e$ и $\log_* x = e^{-1}x$ при $0 < x \leqslant e$. Тогда $\log_*(a+b) \leqslant \log_* a + \log_* b$ при $a, b > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть $\mathcal{L}\in \mathrm{Lat}(M_{z|G})$, $\text{НОД}(\mathcal{L})=1$. Выберем счетное множество $\{\alpha^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^q(\partial G)$ такое, что $x\in\mathcal{L}\Leftrightarrow \langle x,\alpha^{(n)}\rangle=0\ \forall n (\Leftrightarrow x \perp\!\!\!\perp \alpha^{(n)} \forall n)$. Это возможно, т.к. единичный шар в $L^q(\partial G)$ метризуем в $*$-слабой топологии. По лемме 2, (i), $\mathcal{I}^{(n)}x\in\mathcal{D}(G)$ для всех $x\in\mathcal{L}$. Следовательно, $\mathcal{I}^{(n)}\in\mathcal{D}(G)$ при $n=1,2,\ldots$. Положим

$$\beta^{(n)}=c_n\cdot(\mathcal{I}^{(n)}+\alpha^{(n)})|\Gamma_{int},$$

где $c_n\downarrow 0$; необходимую скорость убывания чисел c_n определим позже. Можно считать, что ряд $\sum\|c_n\alpha^{(n)}\|_q$ сходится. Согласно лемме 2, $x\in\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда

$$\beta^{(n)}x|\Gamma_j\in\mathcal{D}(V_j)\quad \forall n\,\forall j\geqslant 1, \tag{8}$$

$$\beta^{(n)}x\in L_0^{1,\infty}(\Gamma_{int})\quad\forall n. \tag{9}$$

Положим

$$\rho(\lambda)=\sum_{n\geqslant 1}|\beta^{(n)}(\lambda)|,\quad \lambda\in\Gamma_{int}.$$

Этот ряд сходится почти всюду, так как при $x\in\mathcal{L}$, $x\neq 0$, имеем $\rho\cdot|x|=\sum_{n\geqslant 1}|\beta^{(n)}|x$,

$$\|\rho\cdot x\|^{1/2}_{L_0^{1,\infty}(\Gamma_{int})}\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\|\beta^{(n)}x\|^{1/2}_{L_0^{1,\infty}(\Gamma_{int})}\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\|K_{c_n\alpha^{(n)}x,G}\|^{1/2}_{1,\infty}\leqslant$$

$$\leqslant C_G\sum_{n\geqslant 1}\|c_n\alpha^{(n)}x\|^{1/2}_{L^1(\partial G)}\leqslant C_G\|x\|_p^{1/2}\sum_{n\geqslant 1}\|c_n\alpha^{(n)}\|_q^{1/2}<\infty. \tag{10}$$

(здесь использованы (7) и лемма 3). Из неравенств $\rho>|\beta^{(n)}|$ и из (10) следует, что (9) равносильно одному условию $\rho\cdot x\in L_0^{1,\infty}(\Gamma_{int})$.

Обозначим $\beta_j^{(n)}=\beta^{(n)}|\Gamma_j$. Найдем эквивалент условия (8) при фиксированном $j\geqslant 1$. Если все $\beta^{(n)}\equiv 0$, то положим $\varphi|\Gamma_j\equiv 0$. В противном случае пусть $\beta_j^{(n_0)}\not\equiv 0$. Так как (8) выполнено при $x\in\mathcal{L}$, то $\beta_j^{(n_0)}\neq 0$ почти всюду. Положим

$$\varphi^{(n)}=\beta_j^{(n)}/\beta,\quad \beta\overset{def}{=}\beta_j^{(n_0)}.$$

Условие (8) переписывается как (*) $\varphi^{(n)}\beta x\in\mathcal{D}(V_j)\ \forall n\geqslant 1$. Подставляя сюда $x\in\mathcal{L}\setminus\{0\}$ и учитывая то, что $\varphi^{(n_0)}\equiv 1$, получаем, что $\varphi^{(n)}\in N(V_j)$. Следовательно, $\varphi^{(n)}=\delta^{(n)}/\theta^{(n)}$, где $\delta^{(n)}\in\mathcal{D}(V_j)$, $\theta^{(n)}$ – внутренняя в V_j функция для всех n и $\text{НОД}(\theta^{(n)},\delta^{(n)})=1$. Пусть θ – наименьшее общее кратное функций

$\theta^{(n)}$, $n \geqslant 1$ (см.[16]). Тогда условие ($*$) равносильно условию ($**$) $\beta x \in \theta \mathcal{D}(V_j)$. Так как ($*$) выполнено не для всех $x \in E^p(G)$, то $\theta \neq 0$.

Пусть η – внешняя функция в V_j такая, что $|\eta| = \rho \cdot |\beta|^{-1}$ на Γ_j. При подходящем выборе C_n она существует, так как $\rho \cdot |\beta|^{-1} \geqslant 1$,

$$\int \log_*(\rho|\beta|^{-1})\, d\omega_{V_j} \leqslant \sum_{\beta_n \neq 0} \int \log\left(c_n \left|\frac{\tilde{\alpha}^{(n)} + \alpha^{(n)}}{\beta}\right|\right) d\omega_{V_j},$$

и каждое слагаемое в правой части может быть сделано сколь угодно малым. Положим

$$\varphi|\Gamma_j = \theta^{-1} \eta \beta | \Gamma_j .$$

Условия ($**$) и $\rho x|\Gamma_j \in L_0^{1,\infty}$ равносильны условию $\varphi x|\Gamma_j \in E_0^{1,\infty}(V_j)$. Осуществив это построение для всех $j \geqslant 1$, получаем искомую функцию φ.

Пусть теперь при некотором j выполнено условие (a) и пусть $\rho_j = \rho|\Gamma_j$. Если все $\beta_j^{(n)} \equiv 0$, то соотношения (8), (9) показывают, что $(z-\lambda)^{-1}\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ при $\lambda \in V_j$, откуда следует, что $\rho_j = \chi_{\mathcal{L}} \equiv 0$ на Γ_j, и утверждение тривиально. В противном случае из (8) и (a) следует, что $\log|\beta| \in L^1(d\omega_{V_j})$. Пусть γ – внешняя функция класса $\mathcal{D}(V_j)$, $|\gamma| = |\beta|$ на Γ_j. Условие ($**$) можно теперь заменить условием $\chi x|\Gamma_j \in E^p(V_j)$, где $\chi \overset{def}{=} \theta^{-1}\beta\gamma$, $|\chi| = 1$ п.в. на Γ_j.

Так как $\chi x|\Gamma_j \in E^p(V_j)$ при $x \in \mathcal{L}$, то $\chi_{\mathcal{L}} E^p(V_j) \supset \chi E^p(V_j)$. Пусть теперь $y \in E^p(G)$, $\varphi y|\Gamma_k \in E_0^{1,\infty}(\Gamma_k)$ при $k \neq j$; тогда

$$\chi_{\mathcal{L}} y|\Gamma_j \in E^p(V_j) \Rightarrow \chi y\, \Gamma_j \in E^p(V_j) \Rightarrow y \in \mathcal{L} \Rightarrow \chi_{\mathcal{L}}\, y|\Gamma_j \in E^p(V_j).$$

Отсюда следует возможность замены, указанной в теореме I, (ii). Последнее утверждение получается аналогично. ●

ЛЕММА 4. Пусть A_j – кольцевые области, $A_j \subset G$ ($j = 1, \dots, s$), $\overline{A_j} \cap \overline{A_k} = \emptyset$ при $j \neq k$, причем каждая область A_j ограничена кривой Γ_j и кусочно-гладкой кривой Γ_j', гомологичной Γ_j в $\overline{G}$. Пусть $\mathcal{L}$ – инвариантное подпространство оператора $M_{z|G}$ в $E^p(G)$, причем $\text{НОД}(\mathcal{L}) = 1$. Положим

$$\mathcal{L}_j = \operatorname{clos}_{E^p(A_j)} \{x|A_j : x \in \mathcal{L}\}. \qquad \text{(II)}$$

Тогда для всякой функции $x \in E^p(G)$, $x \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x|A_j \in \mathcal{L}_j$, $j = 1, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая импликация очевидна. Пусть $x|A_j \in \in \mathcal{L}_j$; надо доказать, что $\alpha \perp\!\!\!\perp x$, если $\alpha \in E^p(\partial G)$ и $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{L}$. Из леммы 2 и условия $\text{НОД}(\mathcal{L}) = 1$ следует, что $\tilde{\alpha} \in \mathcal{D}(A)$. Положим $\alpha'_j | \Gamma_j = \alpha | \Gamma_j$ и $\alpha'_j | \Gamma'_j = \tilde{\alpha} | \Gamma'_j$, $j \geqslant 1$. По теореме Коши, $\langle \alpha, y \rangle_G = \sum_{j \geqslant 1} \langle \alpha'_j, y \rangle_{A_j}$ для всех $y \in E^p(A)$. Пусть x_{jn} – такие функции из $\mathcal{L}$, что $x_{jn}|A_j \to x|A_j$ в $E^p(A_j)$ при $n \to \infty$ ($*$ – слабо, если $p = \infty$). Пусть V'_j – внутренность кривой Γ'_j. По теореме Рунге, существуют такие многочлены q_{jn}, что

$$c_n = \sup_{j,k} \| q_{jn} - \delta_{jk} \|_{H^\infty(V'_k)} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$; здесь δ_{jk} – символ Кронекера. Если скорость убывания последовательности $\{c_n\}$ достаточно велика, то

$$y_n = \sum_{j=1}^{s} q_{jn} \cdot x_{jn} \to x$$

в $E^p(A_k)$ при $n \to \infty$ и при каждом $k = 1, \ldots, s$. Так как $y_n \in \mathcal{L}$, то

$$\langle \alpha, z^l x \rangle_G = \sum_{k=1}^{s} \langle \alpha'_k, z^l x \rangle_{A_k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{s} \langle \alpha'_k, z^l y_n \rangle_{A_k} = \lim_{n \to \infty} \langle \alpha, z^l y_n \rangle = 0$$

при $l \geqslant 0$. Следовательно, $\alpha \perp\!\!\!\perp x$. ▨

Пространства $\mathcal{L}_j$ можно назвать следами пространства $\mathcal{L}$ на множествах A_j. В работе автора [8] получено описание инвариантных подпространств оператора умножения на независимую переменную на римановых поверхностях, удовлетворяющих некоторому условию отсутствия дыр. Это описание использует следы инвариантных подпространств, определяемые в более общей ситуации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. I) Пусть $\tau_j^{-1} : \mathbb{D} \to V_j$ – обратные отображения к τ_j. Конформные отображения τ_j^{-1} продолжаются аналитически на круг $r\overline{\mathbb{D}}$ при некотором $r > 1$. Пусть $A = r\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Положим $A_j = \tau_j^{-1}(A)$ и $\Gamma'_j = \tau_j^{-1}(r\mathbb{T})$; будем предполагать, что A_j удовлетворяют условиям леммы 4. Определим $\mathcal{L}_j$, $\mathcal{L}_j \subset E^2(A_j)$, из (II), и положим

$$\mathcal{E}_j = \{ x \circ \tau_j^{-1} : x \in \mathcal{L}_j \}. \qquad (12)$$

Тогда $\mathcal{E}_j$ – замкнутые подпространства в $E^2(A)$, инвариантные относительно умножения на τ_j^{-1}. Так как функцию z можно приблизить равномерно многочленами от $\tau_j^{-1}(z)$ при каждом j, то $\mathcal{E}_j$ инвариантны относительно оператора $M_{z|A}$. Так как $\text{НОД}(\mathcal{L}_j)=1$, то $\text{НОД}(\mathcal{E}_j)=1$. Применяя теорему Хитта-Сарасона (см. замечание после ее формулировки), получаем, что

$$\mathcal{E}_j=\{x\in L(\tilde{\chi}_j):|x|\cdot|\tilde{g}_j|^{-1}\in L^2(\mathbb{T})\}, \tag{13}$$

$\tilde{\chi}_j \overset{def}{=} z^{m_j}\tilde{\theta}_j\tilde{g}_j/\bar{\tilde{g}}_j$; здесь $\tilde{g}_j\in H^2$, $m_j\in\mathbb{Z}$, θ_j – внутренние и $|\tilde{g}_j|^2-1=\operatorname{Re}(z\tilde{\theta}_j v_j)$ для некоторых $v_j\in E_0^{1,\infty}(\mathbb{D})$. Положим $g_j=\tilde{g}_j\circ\tau_j$, $\theta_j=\tilde{\theta}_j\circ\tau_j$ и т.п. Тогда $g_j\in E^2(V_j)$, θ_j – внутренние в V_j, функции $\chi|\Gamma_j \overset{def}{=} \chi_j$ определяются формулой (5). Утверждение (а) теоремы 2 очевидно; утверждение (б) следует из (12), (13) и леммы 4.

2) Обратно, пусть $m_j\in\mathbb{Z}$, функции g_j, θ_j удовлетворяют (а), χ и $\mathcal{L}$ определены из (5) и (6). Положим $\chi_j=\chi|\Gamma_j$, $j\geqslant 1$. Введем обозначения $\tilde{\theta}_j=\theta_j\circ\tau_j^{-1}$ и т.д., $g_{j,\infty}(z)=\bar{g}_j(\bar{z}^{-1})$. Тогда $|g_{j,\infty}|^2-1=\operatorname{Re}(z\tilde{\theta}_j\tilde{v}_j)$, $\tilde{v}_j\in E_0^{1,\infty}(\mathbb{D})$ и следовательно

$$\|g_{j,\infty}\|^2_{L^2(\mathbb{T})}=1+\operatorname{Re}(A)\int_{\mathbb{T}} z\tilde{\theta}_j\tilde{v}_j\,dm=1$$

ввиду (6). Пусть $P_+|g_{j,\infty}|^2-1=w_j$; тогда $|g_{j,\infty}|^2-1=2\operatorname{Re}(w_j)$. Следствие леммы о склейке показывает, что $P_+|g_{j,\infty}|^2-1=\frac{1}{2}z\tilde{\theta}_j\tilde{v}_j$. По теореме Хитта-Сарасона

$$\mathcal{E}_j=z^{m_j}g_{j,\infty}\cdot\{x\in H^2(A):\theta_j x\in H^2\}-$$

замкнутые инвариантные подпространства в $H^2(A)$, причем, как объяснено ранее, имеет место (13). Очевидно, $\chi_{\mathcal{E}_j}=\tilde{\chi}_j$. Определим $\mathcal{L}_j$ из (12); тогда $\mathcal{L}_j\in \operatorname{Lat}(M_{z|A_j})$. Сравнение (13) и определения пространства $\mathcal{L}$ показывает, что $\mathcal{L}=\{x\in E^2(G):$ $x|A_j\in\mathcal{L}_j,\ j\geqslant 1\}$. Поэтому $\mathcal{L}$ – замкнуто, $\mathcal{L}\in\operatorname{Lat}(M_{z|G})$. Осталось доказать, что $\chi_{\mathcal{L}}=\chi$. Очевидно, $\{y|\Gamma_j : y\in\mathcal{L}\}\subset$ $\subset(\chi|\Gamma_j)\cdot E^2(V_j)$.

Из результатов Хитта [5] следует, что в $\mathcal{E}_j$ полны функции, аналитичные в $\mathbb{C}\setminus\bar{\mathbb{D}}$. Следовательно, в $\mathcal{L}_j$ полны функции, аналитичные на Γ_j'. Покажем, что линейные множества

$$\mathcal{L}_j'=\{x\in\mathcal{L}_j:\ x \text{ аналитична в } \mathbb{C}\setminus V_j\}$$

также полны в $\mathcal{L}_j$. Действительно, пусть j фиксировано. Пусть функция y, $y\in\mathcal{L}_j$, аналитична на Γ_j', и $y|\Gamma_j'\neq 0$ (такие функции плотны в $\mathcal{L}_j$). Тогда $y=uv$ в окрестности Γ_j', где u аналитична на V_j', v аналитична на $\mathbb{C}\setminus V_j'$, $u\neq 0$ в V_j', $v\neq 0$ в $\mathbb{C}\setminus V_j'$. (При некотором n функция $\log((z-\tau_j^{-1}(0))^n y)$ однозначна на Γ_j'; представление $y=uv$ получается из ее разложения в разность интегралов Коши внутри и вне Γ_j'). Очевидно, функция $v=y/u$ аналитична на $\mathbb{C}\setminus\overline{V}_j$, и $v\in\mathcal{L}_j'$. Пусть p_n – полиномы, $p_n\to u$ в $H^\infty(V_j')$. Тогда $p_n v\in\mathcal{L}_j'$, $p_n v\to y$ в $E^2(A_j)$, что доказывает наше утверждение.

Положим

$$\mathcal{L}'=\{p\cdot y_1 y_2\dots y_s : y_j\in\mathcal{L}_j',\quad p \text{ – многочлен}\}.$$

Из доказанного следует, что $\mathcal{L}'\subset\mathcal{L}$ и $clos\{y|\Gamma_j : y\in\mathcal{L}'\}=$ $=(\overline{\chi}|\Gamma_j)\cdot E^2(V_j)$ $(=E^2(V_j)$, если $\chi(\Gamma_j=0)$. Поэтому $\chi_\chi\equiv\chi$. ∅

3. <u>Приложение.</u> (комментарии к доказательству теоремы 3) Полагаем $G=A=\{1<|z|<R\}$ и $p=2$. Опишем кратко рассуждение Хитта. Оно основано, в частности, на установленном им соответствии между M_z-инвариантными подпространствами в $H^2(A)$ и почти M_z-инвариантными подпространствами в $H^2(E)$. Подпространство $\mathcal{E}$ в $H^2(E)$ называется почти инвариантным [5], если выполнена импликация $f\in\mathcal{E}$, $f(\infty)=0\Rightarrow zf\in\mathcal{E}$. Каждому подпространству $\mathcal{M}\subset H^2(A)$, $\mathcal{M}\in Lat(M_{z|A})$, сопоставляется почти инвариантное подпространство

$$\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{M})=\mathcal{M}\cap H^2(E).$$

Обратно, каждому почти инвариантному подпространству $\mathcal{E}$ в $H^2(E)$ сопоставляется инвариантное подпространство

$$\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{E})=span_{H^2(A)}\cup\{z^n\mathcal{E}:n\geqslant 0\}.$$

ЛЕММА 5 (Хитт[5], пп.6,7,8). Для любого $\mathcal{M}\in Lat(M_{z|A})$ такого, что $\text{НОД}(\mathcal{M})=1$, существует $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ такое, что:

1) $\text{НОД}_E(\hat{\mathcal{E}}(z^{-m}\mathcal{M}))=1$,
2) $z^m\hat{\mathcal{M}}(\hat{\mathcal{E}}(z^{-m}\mathcal{M}))=\mathcal{M}$.

Сопоставим каждой внутренней функции θ почти инвариантное подпространство

$$\mathcal{E}_\theta=\{y\in H^2(E):\theta y\in H^2\}.$$

ЛЕММА 6 ([5], предложение 3, [6], теорема I). Любое почти инвариантное подпространство $\mathcal{E}$, $\text{НОД}_E(\mathcal{E})=1$, имеет вид $g_\infty\cdot\mathcal{E}_\theta$, где $g_\infty\in H^2(E)$, g_∞ – внешняя, θ – внутренняя функция в $\mathbb{D}$, и оператор M_{g_∞} действует изометрично на $\mathcal{E}_\theta$. Обратно, если $g_\infty\in H^2(E)$, g_∞ – внешняя, θ – внутренняя в $\mathbb{D}$,

M_{g_∞} – изометрия на $\mathcal{E}_\theta$, то $g_\infty \cdot \mathcal{E}_\theta$ – замкнутое почти инвариантное подпространство в $H^2(E)$.

ЛЕММА 7 (см.[6], теорему 2). M_{g_∞} – изометрия на $\mathcal{E}_\theta$ тогда и только тогда, когда $P_+|g_\infty|^2-1=\bar{z}\theta v$ для некоторой функции $v\in E_0^{1,\infty}(\mathbb{D})$.

ЛЕММА 8 ([5], предложение 3). В обозначениях лемм 6 и 7, $\hat{\mathcal{M}}(g_\infty\cdot\mathcal{E}_\theta)=g_\infty\cdot L(\theta)$.

Теорема 3 очевидно следует из лемм 5–8.

Легко показать также, что для любого почти инвариантного подпространства $\mathcal{E}$ такого, что $НОД_E(\mathcal{E})=1$, имеем $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{E}))=\mathcal{E}$.

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ЛЕММЫ 6. "Пересадим" $\mathcal{E}$ в круг $\mathbb{D}$ посредством замены $z\mapsto\frac{1}{\bar{z}}$; получим пространство $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\subset H^2$, такое, что $x\in\mathcal{F}$, $x(0)=0\Rightarrow \bar{z}^{-1}x\in\mathcal{F}$. Пусть $S=M_{z|\mathbb{D}}$ – оператор сдвига в H^2; тогда $S^*x(z)=z^{-1}(x(z)-x(0))$. Символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ будем обозначать обычное полуторалинейное скалярное произведение в H^2.

Пусть $g\in\mathcal{F}$, $g\perp\mathcal{F}\cap zH^2$, $\|g\|=1$ и $g(0)>0$; по этим условиям g находится однозначно (функция g_∞ будет определена равенством $g_\infty(z)=g(z^{-1})$). Пусть $h\in\mathcal{F}$; вслед за Хиттом определим последовательность $\{h_n\}_{n\geq 0}$ функций из $\mathcal{F}$ формулами $h_0=h$;

$$h_n=C_n g+zh_{n+1},\, zh_{n+1}\in\mathcal{F},\, h_{n+1}\in\mathcal{F}.$$

Легко видеть, что

$$h=(C_0+C_1z+\ldots+C_nz^n)g+z^{n+1}h_{n+1}, \tag{I4}$$

$$\|h\|_2^2=|C_0|^2+\ldots+|C_n|^2+\|h_{n+1}\|_2^2. \tag{I5}$$

Основная часть доказательства леммы состоит в проверке того,что $\|h/g\|_2=\|h\|_2$ для всех $h\in\mathcal{F}$. Ввиду (I4), (I5), для этого нужно проверить, что $\|h_n\|_2\to 0$ при $n\to\infty$ для любой функции $h\in\mathcal{F}$. Как заметил Сарасон [6], $h_{n+1}=R_g h_n$, где

$$R_g=S^*(I-g\otimes g),$$

и $(g\otimes g)h\overset{def}{=}\langle h,g\rangle g$. Поэтому достаточно доказать, что $R_g^n\xrightarrow{s}0$ при $n\to\infty$. Н.К.Никольский и В.И.Васюнин указали автору,что это возможно сделать прямым вычислением характеристической функции Надя-Фойаша $\theta_R(w)$ оператора $R=R_g$. Ниже изложено соответствующее вычисление.

Напомним, что

$$\theta_R(w)=-R+wD_{R^*}(I-wR^*)^{-1}D_R|\mathcal{D}_R:\mathcal{D}_R\to\mathcal{D}_{R^*};$$

здесь $w\in\mathbb{D}$, $D_B\overset{def}{=}(I-B^*B)^{1/2}$, $\mathcal{D}_B\overset{def}{=}D_BH^2$. Вычислим сначала D_R и D_{R^*}. Пусть $e_0(z)\equiv 1$, $e_0\in H^2$. Положим $g_0=\langle g,e_0\rangle$, $\rho=(1-g_0^2)^{1/2}$, $h=\rho^{-1}(e_0-g_0g)$, $\ell=\rho^{-1}S^*g$; тогда $\|h\|_2=\|\ell\|_2=1$. Заметим, что $Rg=0$;

$$Rh=\rho^{-1}S^*(I-g\otimes g)(e_0-g_0g)=-\rho^{-1}g_0S^*g=-g_0\ell, \qquad (16)$$

откуда $\|D_R^2h\|=\|h\|^2-\|Rh\|^2=\rho^2$. Кроме того, $Rx=x$, если $\langle x,\ell_0\rangle=\langle x,g\rangle=0$. Так как $D_R\geqslant 0$ и $g\perp h$, то

$$\mathcal{D}_R=span\{g,h\};\quad D_Rg=g,\quad D_Rh=\rho h. \qquad (17)$$

Аналогично, $\|D_{R^*}^2\ell\|^2=\rho^2$; если $\langle x,\ell\rangle=0$, то $\langle Sx,g\rangle=0$, и

$$\|D_{R^*}x\|^2=\|x\|^2-\|R^*x\|^2=\|x\|^2-\|(I-g\otimes g)Sx\|^2=0.$$

Следовательно,

$$\mathcal{D}_{R^*}=span\{\ell\};\quad D_{R^*}\ell=\rho\ell. \qquad (18)$$

Вычислим оператор $(I-wR^*)^{-1}$. Если

$$(I-wR^*)x=y,$$

то есть $x-wzx+w\langle zx,g\rangle g=y$, то, полагая

$$C_y=\langle zx,g\rangle, \qquad (19)$$

получаем

$$x=(I-wR^*)^{-1}y=(1-wz)^{-1}(y-wC_yg). \qquad (20)$$

Подставляя (20) в (19) и решая относительно C_y, находим

$$C_y(w)=(1+w\beta(w))^{-1}\langle(1-wz)^{-1}zy,g\rangle, \qquad (21)$$

где

$$\beta(w)=\langle(1-wz)^{-1}zg,g\rangle.$$

Таким образом, если $u\in\mathcal{D}_R$, $y=D_Ru$, $x=(I-wR^*)^{-1}y$, то ввиду (18), (19), (21),

$$\theta_R(w)u=-Ru+wD_{R^*}x=-Ru+w\langle x,\rho\ell\rangle\ell=$$

$$=-Ru+w\langle zx,g\rangle\ell=-Ru+wC_y(w)\ell.$$

Обозначим

$$\alpha(w)=\langle (1-wz)^{-1} z\ell_0, g\rangle.$$

Тогда $C_{D_R}g=\beta(1+w\beta)^{-1}$; $C_{D_R}h=(\alpha-g_0\beta)(1+w\beta)^{-1}$.
Учитывая (16), окончательно получаем, что

$$\theta_R(w)g=w\beta(1+w\beta)^{-1}\ell;$$

$$\theta_R(w)h=\left(g_0-w\,\frac{g_0\beta-\alpha}{1+w\beta}\right)\ell=\frac{g_0+w\alpha}{1+w\beta}\,\ell. \tag{22}$$

Согласно [I7, гл.6, предложение 3.5], $R^n \xrightarrow{s} 0$ тогда и только тогда, когда θ- $*$ - внутренняя функция, т.е. когда $\theta^*(\overline{w})$ - изометрическое отображение из $\mathcal{D}_{R^*}$ в $\mathcal{D}_R$ при почти всех $w\in\mathbb{T}$. Введем обозначение $f^T(w)=\overline{f(\overline{w})}$. Осталось проверить равенство

$$\left|\frac{w\beta^T(w)}{1+w\beta^T(w)}\right|^2+\left|\frac{g_0+w\alpha^T(w)}{1+w\beta^T(w)}\right|^2=1 \tag{23}$$

при п.в. $w\in\mathbb{T}$. Легко видеть, что

$$g_0+w\alpha^T(w)=\langle g,e_0\rangle+\langle g,(1-\overline{w}z)^{-1}\overline{w}z\rangle=\langle g,(1-\overline{w}z)^{-1}\rangle=g(w); \tag{24}$$

$$1+w\beta^T(w)=\langle g,g\rangle+\langle g,(1-\overline{w}z)^{-1}\overline{w}zg\rangle=\langle g,(1-\overline{w}z)^{-1}g\rangle=(P_+|g|^2)(w). \tag{25}$$

Так как $|g|^2=2\operatorname{Re}P_+|g|^2-1$, то

$$|P_+|g|^2-1|^2+|g|^2=|P_+|g|^2|^2 \tag{26}$$

почти всюду на $\mathbb{T}$. Из (24), (25), (26) следует (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Положим $g(z)=g_\infty(z^{-1})$. Конформная пересадка $z\to\frac{1}{z}$ переводит пространство $\mathcal{E}_\theta$ в пространство $H^2\ominus\varphi H^2$, где $\varphi=z\overline{\theta}(\overline{z})$ - внутренняя в $\mathbb{D}$ функция. Заметим, что $(P_+|g_\infty|^2)(z)=\overline{P_+|g|^2(\overline{z})}$. Необходимо показать поэтому, что M_g - изометрия на $H^2\ominus\varphi H^2$ тогда и только тогда, когда $P_+|g|^2-1=\varphi\cdot v$ для некоторой $v\in E_0^{1,\infty}(\mathbb{D})$.

I) Пусть $P_+|g|^2-1=\varphi\cdot v$ и $f\in(H^2\ominus\varphi H^2)\cap H^\infty$. Тогда $\|g\|_2^2=1$, $\varphi\overline{f}\in zH^\infty$, $v f\varphi\overline{f}\in zE_0^{1,\infty}(\mathbb{D})$, откуда следует, что

$$\int_{\mathbb{T}}(|g|^2-1)|f|^2\frac{dm}{2\pi}=2\operatorname{Re}(A)\int_{\mathbb{T}}(P_+|g|^2-1)|f|^2\frac{dm}{2\pi}=$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,(A)\int_{\mathbb{T}} v f \psi \bar f \frac{dm}{2\pi} = 0$$

ввиду (6). Значит, оператор M_g изометричен на $(H^2 \ominus \psi H^2) \cap H^\infty$. Так как функции $\{S^{*n}\psi\}_{n\geq 1}$ полны в $H^2\ominus\psi H^2$ [16], то множество $(H^2\ominus\psi H^2)\cap H^\infty$ плотно в $H^2\ominus\psi H^2$. Поэтому оператор M_g продолжается изометрично на $H^2\ominus\psi H^2$, где он, очевидно, действует по той же формуле.

2) Обратно, пусть M_g - изометричный оператор на $H^2\ominus\psi H^2$, и пусть $f\in(H^2\ominus\psi H^2)\cap H^\infty$, $c\in\mathbb{C}$. Так как $\psi(0)=0$, то $c\in H^2\ominus\psi H^2$, и следовательно,

$$\int (|g|^2-1)(|f|^2+2\,\mathrm{Re}\langle f,c\rangle+|c|^2)\frac{dm}{2\pi}=0.$$

Полагая здесь $c=1$ и $c=i$, приходим к равенству

$$\int (|g|^2-1)\bar f\,\frac{dm}{2\pi}=0.$$

Следовательно,

$$(A)\int P_+(|g|^2-1)\bar f\,\frac{dm}{2\pi}=-(A)\int(P_-|g|^2)\bar f\,\frac{dm}{2\pi}=0.$$

для всех $f\in(H^2\ominus\psi H^2)\cap H^\infty$ ввиду (6). Далее, если $|\lambda|>1$, то

$$(S^*-\bar\lambda I)^{-1}S^*\psi=(\bar z-\bar\lambda)^{-1}\bar z\,\psi+\bar u_\lambda\in(H^2\ominus\psi H^2)\cap H^\infty,$$

где $u_\lambda\in zH^\infty$. Поэтому

$$K^{(A)}_{(P_+|g|^2-1)\bar\psi}(\lambda)=(A)\int_{\mathbb{T}}(P_+|g|^2-1)\left[\overline{(S^*-\bar\lambda I)^{-1}S^*\psi}-u_\lambda\right]\frac{dm}{2\pi}=0 \tag{27}$$

при $|\lambda|>1$ (здесь $K^{(A)}_f$ - интеграл Коши функции f по окружности $\mathbb{T}$, понимаемый в смысле A -интеграла). С другой стороны, $(|g|^2-1)\bar\psi\in E_0^{1,\infty}+\overline{z E_0^{1,\infty}}$ ввиду формулы Привалова-Племеля. Поэтому $(P_+|g|^2-1)\bar\psi=w^++w^-$, где $w^+\in E_0^{1,\infty}$, $w^-\in \overline{zE_0^{1,\infty}}$. Ввиду (27) и (6),

$$w^-=K^{(A)}_{w^++w^-,\,\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}\equiv 0,$$

следовательно, $P_+|g|^2-1=\psi\cdot w^+$. ●

Автор благодарит Н.К.Никольского за постоянное внимание к работе, В.И.Васюнина, А.Л.Вольберга и Б.М.Соломяка за полезные обсуждения и замечания.

Литература

1. Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я. К определению аналитических функций класса E^p в многосвязных областях. – Успехи мат.наук, 1958, т.13, № 1, с.201-206.
2. Sarason, D. The H^p Spaces of an Annulus.-Memoirs Amer.Math.Soc., Providence, R.I, 1965.
3. Hasumi, M. Invariant Subspace Theorems for Finite Riemann Surfaces.-Canad.J.Math., 1966, v.18, p.240-255.
4. Voichick, M. Invariant Subspaces on Riemann Surfaces.-ibid., p.399-403.
5. Hitt, D. Invariant subspaces of H^2 of an annulus.-Pacif. J.Math., 1988, v.134, N 1, p.101-120.
6. Sarason, D. Nearly invariant subspaces of the backward shift, preprint, 1987.
7. Royden, H.L. Invariant subspaces of H^p for multiply connected regions.-Pacif.J.Math., 1988, v.134, N 1,p.151--172.
8. Yakubovich, D.V. Riemann surface models of Toeplitz operators.-Operator theory: advances and applications, Birkhäuser , to appear.
9. Соломяк Б.М. О кратности спектра аналитических операторов Теплица. – Докл.АН СССР, 1986, т.286, № 6, с.1308-1311.
10. Solomyak B.M., Volberg A.L. Multiplicity of Analytic Toeplitz operators.-Operator theory: advances and applications, Birkhäuser, to appear.
11. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М., ГИТТЛ, 1950.
12. Fisher S.D. Function theory on planar domains. N.Y., 1983.
13. Helson, H. Lectures on invariant subspaces. N.Y. - London, Academic Press, 1964.
14. Салимов Т.С. A-интеграл и граничные значения аналитических функций.-Мат.сборник, т.136 (178), № 1 (5), с.24-40.
15. David G. Operateurs integraux singuliers sur certaines courles du plan complexe.-Annales scient. de l'école norm. sup., t.17 f.1 (1984), 157-189.
16. Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига.М:1980
17. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.

Yakubovich D.V. Invariant subspaces of multiplication by z of E^p in a multiply connected domain.

Summary

Let G be a multiply connected domain with boundary $\Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_s$ where Γ_j are closed piecewice C^2-smooth curves. A subspace $\mathcal{I}$ in Hardy-Smirnov class $E^p(G)$, $1 \le p \le \infty$, is called invariant if $zf(z) \in \mathcal{I}$ for $f \in \mathcal{I}$. Define domains V_j by $\Gamma_j = \partial V_j$, $\mathbb{C} \setminus G = V_0 \cup \dots \cup V_s$; suppose that V_0 is unbounded. For an invariant subspace $\mathcal{I}$ in $E^p(G)$ the function $\gamma_{\mathcal{I}} \in L^\infty(\Gamma_{int})$, $\Gamma_{int} \overset{def}{=} \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_s$ is defined by the equalities $\mathcal{H}_j \overset{def}{=} clos_{L^p(\Gamma_j)} \{ x(\Gamma_j : x \in \mathcal{I} \} = (\bar{\gamma}_{\mathcal{I}} | \Gamma_j) \cdot E^p(V_j)$, $|\gamma_{\mathcal{I}}| \equiv 1$ a.e. on Γ_j for $j \ge 1$ ($\gamma_{\mathcal{I}} | \Gamma_j \equiv 0$ if $\mathcal{H}_j = L^p(\Gamma_j)$).

THEOREM 1. (i) Let $\mathcal{I}$ be an invariant subspace in $E^p(G)$ such that $GCD(\mathcal{I}) = 1$. Then

$$\mathcal{I} = \{ x : \varphi \cdot x \in E_0^{1,\infty}(V_j),\ j \ge 1 \}.$$

Here φ is measurable function on Γ_{int}, $\varphi \equiv 0$ or $|\varphi| \ge 1$, a.e. on each Γ_j; $L_0^{1,\infty}(\Gamma_j) = \{ f \in L^{1/2}(\Gamma_j) : m\{|f| > A\} = o(A^{-1}),$ $A \to +\infty$ (m is the Lesbegue measure), $E_0^{1,\infty}(V_j) = E^{1/2}(V_j) \cap L_0^{1,\infty}(\Gamma_j)$, and $GCD(\mathcal{I})$ is common least divisor of inner parts of functions in $\mathcal{I}$.

(ii) If the inequality $d\omega_{V_j} \le C\, d\omega_G | \Gamma_j$ holds for harmonic measures for $j \ge 1$, then

$$\mathcal{I} = \{ x : \gamma_{\mathcal{I}} x | \Gamma_j \in E^p(V_j),\ \rho \cdot x \in L_0^{1,\infty}(\Gamma_{int}) \}$$

for a measurable function ρ on Γ_{int}.

THEOREM 2. Let Γ_j be analytic, τ_j be conformal mappings of V_j onto the unit disk ($j \ge 1$). Suppose $\mathcal{I}$ is invariant subspace in $E^2(G)$, $GCD(\mathcal{I}) = 1$. There exist outer $g_j \in E^2(V_j)$, inner θ_j in V_j, $m_j \in \mathbb{Z}$ such that $|g_j|^2 = Re(\tau_j \theta_j v_j) + 1$ a.e. on Γ_j for some $v_j \in E_0^{1,\infty}(V_j)$ and

$$\mathcal{I} = \{ x : x | \Gamma_j \in (\gamma | \Gamma_j) E^2(V_j),\ |x g_j^{-1}| \in L^2(\Gamma_j) \text{ for } j \ge 1 \}.$$

Here $\gamma \in L^\infty(\Gamma_{int})$ is defined by $\gamma | \Gamma_j = \tau_j^{m_j} \theta_j g_j / \bar{g}_j$. Conversely, every g_j, θ_j, m_j satisfying the above conditions give rise to an invariant subspace $\mathcal{I}$ such that $GCD(\mathcal{I}) = 1$ and $\gamma_{\mathcal{I}} = \gamma$.

This generalizes the results of Hitt and Sarason [5, 6].