



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Селиванов, Бипроективные банаховы алгебры, их строение, когомологии и связь с ядерными операторами,
Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, выпуск 1, 89–90

<https://www.mathnet.ru/faa2140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

30 апреля 2025 г., 08:11:17



БИПРОЕКТИВНЫЕ БАНАХОВЫЕ АЛГЕБРЫ, ИХ СТРОЕНИЕ, КОГОМОЛОГИИ И СВЯЗЬ С ЯДЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Ю. В. Селиванов

В связи с изучением глобальной размерности банаховых алгебр ($\text{dg } A$) был введен в рассмотрение класс т. н. бипроективных банаховых алгебр (см. [1]), изучение которого представляет и самостоятельный интерес. В настоящей работе изучается строение полупростых бипроективных банаховых алгебр; «практически все» такие алгебры (подробно см. теорему 1) являются топологическими прямыми суммами топологически простых бипроективных банаховых алгебр («ячеек»). Дается полное описание таких ячеек; они образуют класс т. н. алгебр, порожденных двойственностью. Эти алгебры обычно состоят из ядерных операторов в банаховых пространствах.

Результаты о вычислении $\text{dg } A$, а также результаты о существовании нерасщепимых сингулярных расширений (см. [1], [2]), полученные ранее лишь для части полупростых бипроективных банаховых алгебр, в этой работе распространены «практически на все» такие алгебры (подробно см. теорему 5). Наконец, для всех коммутативных полупростых бипроективных банаховых алгебр, обладающих свойством аппроксимации, решается положительно вопрос о расщепимости всех коммутативных сингулярных расширений.

Пусть A — (комплексная) банахова алгебра, вообще говоря, не обладающая единицей, A^+ — результат присоединения к A единицы, \mathcal{A} — категория левых банаховых A -модулей, \mathcal{A}^2 — категория банаховых A -бимодулей, $\text{Prim}(A)$ — примитивный спектр алгебры A с топологией Джекобсона. Для $X \in \mathcal{A}$ ($X \in \mathcal{A}^2$) через $\text{dh } X$ ($\text{dh}^2 X$) обозначается гомологическая размерность объекта $X \in \mathcal{A}$ ($X \in \mathcal{A}^2$) (см. [1] и [3]). Глобальная размерность (соответственно когомологическая размерность) банаховой алгебры A есть, по определению, число $\text{dg } A = \sup \{\text{dh } X : X \in \mathcal{A}\}$ (соответственно $\text{dc } A = \inf \{n : H^{n+1}(A, X) = 0 \text{ для всех } X \in \mathcal{A}^2\}$). (Определение групп когомологий банаховых алгебр см., например, в [3], [4].) Известно, что $\text{dg } A \leq \text{dc } A = \text{dh}^2 A^+$. Банахова алгебра A называется бипроективной, если A является проективным банаховым A -бимодулем, т. е. если $\text{dh}^2 A = 0$. Как легко показать (ср. [1]), независимо от наличия в A единицы бипроективность банаховой алгебры A равносильна существованию в категории \mathcal{A}^2 такого морфизма $\rho: A \rightarrow A \hat{\otimes} A$, что $\pi \rho = 1_A$. (Здесь $\hat{\otimes}$ — знак проективного тензорного произведения банаховых пространств (см. [5]), $A \hat{\otimes} A$ — банахов A -бимодуль с внешними операциями, определенными формулами $a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c$, $(b \otimes c) \cdot a = b \otimes ca$, а $\pi: A \hat{\otimes} A \rightarrow A$ определяется формулой $\pi(a \otimes b) = ab$.) Напомним [6], что, по определению, банахово пространство E имеет свойство аппроксимации (коротко $A. P.$), если всякий компактный оператор из любого банахова пространства в E можно аппроксимировать операторами конечного ранга. Будем говорить, что банахова алгебра (банахов A -модуль) имеет $A. P.$, если она (он) имеет $A. P.$ как банахово пространство.

Пусть (E, F) — дуальная пара банаховых пространств, т. е. пара банаховых пространств, связанная невырожденной непрерывной билинейной формой (x, y) , $x \in E$, $y \in F$. На базе банахова пространства $E \hat{\otimes} F$ можно построить банахову алгебру, если умножение определить формулой

$$(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = (x_2, y_1) x_1 \otimes y_2.$$

Эту банахову алгебру будем также обозначать через $E \hat{\otimes} F$ и называть алгеброй, порожденной двойственностью (x, y) .

Предложение 1. Банахова алгебра $E \hat{\otimes} F$ бипроективна.

Заметим, что если E имеет $A. P.$, то банахова алгебра $E \otimes F$ может быть представлена как неприводимая алгебра ядерных операторов пространства E .

Теорема 1. Пусть A — бипроективная полупростая банахова алгебра, имеющая $A. P.$ и такая, что каждый простой (в алгебраическом смысле) A -модуль $X \in \mathcal{A}$ может быть непрерывно вложен как плотный подмодуль в некоторый $Y \in \mathcal{A}$, имеющий $A. P.$ Тогда банахова алгебра A есть замыкание прямой суммы всех своих минимальных замкнутых двусторонних идеалов I_α , $\alpha \in \Lambda$, которые являются топологически простыми бипроективными банаховыми алгебрами, причем для каждого $\alpha \in \Lambda$ с точностью до изоморфизма банаховых алгебр $I_\alpha = E_\alpha \hat{\otimes} F_\alpha$, где (E_α, F_α) — некоторая дуальная пара банаховых пространств. Кроме того, для каждого $\alpha \in \Lambda$ существует такой примитивный идеал P_α алгебры A , что $A = I_\alpha \oplus P_\alpha$.

Т е о р е м а 2. Пусть E — банахово пространство, имеющее A . Пусть, далее, A — банахова алгебра непрерывных операторов пространства E , являющаяся по отношению к множеству всех конечномерных непрерывных операторов этого пространства по некоторой норме $\|\cdot\|$, причем $\|\cdot\| \geq \|\cdot\|_0$, где $\|\cdot\|_0$ — обычная норма оператора. Тогда A бипроективна в том и только в том случае, когда с точностью до изоморфизма банаховых алгебр $A = N(E)$, где $N(E)$ — банахова алгебра всех ядерных операторов пространства E .

При доказательстве теоремы 2 по морфизму $\rho: A \rightarrow A \hat{\otimes} A$ строится некоторый функционал на A , позднее оказывающийся следом.

Т е о р е м а 3. Пусть банахова алгебра A удовлетворяет условиям теоремы 1 и обладает левой ограниченной аппроксимативной единицей. Тогда ее спектр $\text{Prim}(A)$ дискретен, а все неприводимые представления (т. е. простые A -модули) конечномерны.

Т е о р е м а 4. C^* -алгебра A бипроективна тогда и только тогда, когда ее спектр $\text{Prim}(A)$ дискретен, а все неприводимые представления конечномерны.

Достаточность теоремы 3 доказана А. Я. Хелемским в работе [1], а необходимость — автором.

Т е о р е м а 5. Пусть A — бесконечномерная бипроективная полупростая банахова алгебра, имеющая A . Пусть A такая, что каждый простой левый или правый A -модуль X имеет как банахово пространство базис. Тогда $\text{dg } A = \text{dc } A = 2$ и, кроме того, $H^2(A, A \hat{\otimes} A) \neq 0$.

С л е д с т в и е 1. Пусть банахова алгебра A удовлетворяет условиям теоремы 5. Тогда существует сингулярное расширение банаховой алгебры A с ядром $A \hat{\otimes} A$, которое не является расщепимым.

Оценка $\text{dc } A \leq 2$ для бипроективной банаховой алгебры A и оценка $\text{dg } A \geq 2$ для бесконечномерной коммутативной полупростой банаховой алгебры A даны в [2]. Доказательство теоремы 5 использует некоторые идеи работы [2], теорему 1, теорему о сведении теоремы 5 к случаю бесконечномерной фактор-алгебры и обобщение методов, использованных в теореме 3 работы [7]. Заметим, что требование полупростоты в теореме 5 существенно (см. [7], теорема 1). Можно показать, что в чисто алгебраическом случае глобальная размерность бипроективной полупростой комплексной алгебры равна либо единице, либо нулю.

Т е о р е м а 6. Пусть A — бипроективная коммутативная полупростая банахова алгебра, имеющая A . Пусть A такая, что для любого A -бимодуля X такого, что $a \cdot x = x \cdot a$ при всех $a \in A$ и $x \in X$, $H^n(A, X) = 0$ при $n > 0$.

С л е д с т в и е 2. Любое коммутативное сингулярное расширение бипроективной функциональной банаховой алгебры, имеющей A , расщепимо.

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
4 февраля 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Хелемский А. Я., Матем. сб. 87 (1972), 122—135.
2. Хелемский А. Я., Функциональный анализ, вып. 2 (1972), 95—96.
3. Хелемский А. Я., Матем. сб. 81 (1970), 430—444.
4. Kamowitz H., Trans. Amer. Math. Soc. 102, (1962), 352—372.
5. Grothendieck A., Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).
6. Efflor P., Acta Math. 130, № 3—4 (1973), 309—317.
7. Селиванов Ю. В., Вестник МГУ, матем., механ. 1 (1975), 37—42.