А. Г. Черняков, Устойчивость для конечных бескоалиционных игр,
Докл. АН СССР, 1979, том 247, номер 4, 809–811

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Литтман, Г. Стампаккья, Г. Вайнбергер,* В сб.: пер. Математика, т. 9, № 2, 72 (1965). [2] *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг,* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, М., ИЛ, 1962. [3] *В.Г. Мазья,* Математические заметки, т. 2, № 3, 209 (1967). [4] *О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева,* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., "Наука", 1964. [5] *H. Levine, L. Payne,* SIAM, Math. Anal., v. 7, № 3, 337 (1976). [6] *I.B. Keller,* Comm. Pure and Appl. Math., v. 10, 503 (1957). [7] *W.Walter,* Iber Deutsch. Math. Verein, B. 57, 94 (1955). [8] *E.K. Haviland,* J. London Math. Soc., v. 26, № 3, 210 (1951). [9] *Е.М. Ландис,* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов, М., "Наука", 1971. [10] *А.А. Новрузов,* ДАН, т. 204, № 5, 1053 (1972).

УДК 518.9 МАТЕМАТИКА

А.Г. ЧЕРНЯКОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГР

(Представлено академиком Л.В. Канторовичем 16 II 1979)

1. Конечной бескоалиционной игрой называется упорядоченная тройка $\Gamma = \langle I, \{\mathfrak{C}_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\rangle$, в которой I, $\mathfrak{C}_i, i\in I$, – конечные множества (соответственно игроков и их стратегий), H_i – вещественнозначные функции выигрыша, заданные на декартовом произведении $\mathfrak{C}$ множеств $\mathfrak{C}_i$.

Пусть $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел $\mathrm{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{N}^n$. Обозначим через $\mathfrak{G}_{\mathrm{m}}$ класс всех бескоалиционных игр n игроков, в которых игрок i имеет m_i чистых стратегий. Мы предполагаем, что в каждой игре $\Gamma \in \mathfrak{G}_{\mathrm{m}}$ игроки и их стратегии перенумерованы, т.е. $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathfrak{C}_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$. Эта нумерация задает порядок на $\mathfrak{C}$ и таким образом $\mathfrak{G}_{\mathrm{m}}$ отождествляется с $\mathbf{R}^{nm_1\dots m_n}$. Совокупность смешанных стратегий игрока i рассматривается как стандартный $(m_i - 1)$-мерный симплекс $\Delta_{m_i} \subset \mathbf{R}^{m_i}$, а множество ситуаций (в смешанных стратегиях) в играх из $\mathfrak{G}_{\mathrm{m}}$ – как полиэдр $\Delta_{\mathrm{m}} = \Delta_{m_1} \times \dots \times \Delta_{m_n} \subset \mathbf{R}^{|\mathrm{m}|}$, где $|\mathrm{m}| = m_1 + \dots + m_n$. Обозначим через $\mathbf{F}_2$ поле из двух элементов и положим

$$\Omega_{\mathrm{m}} = (\mathbf{F}_2^{m_1} \setminus \{0\}) \times \dots \times (\mathbf{F}_2^{m_n} \setminus \{0\}).$$

Определение 1. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Delta_{\mathrm{m}}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_{\mathrm{m}}$. Будем говорить, что ситуация ξ имеет тип ω, если $\xi_{ij} = 0 \Leftrightarrow \omega_{ij} = 0$.

Через $\mathrm{Eq}_\omega(\Gamma)$ обозначается множество ситуаций равновесия типа ω в игре Γ; $\mathrm{eq}_\omega(\Gamma)$ – мощность этого множества. $\mathrm{Eq}(\Gamma)$ – совокупность всех ситуаций равновесия в игре Γ, $\mathrm{eq}(\Gamma) = |\mathrm{Eq}(\Gamma)|$.

2. Определение 2. Назовем игру Γ из $\mathfrak{G}_{\mathrm{m}}$ ω-устойчивой ($\omega \in \Omega_{\mathrm{m}}$), если:

1) множество $\mathrm{Eq}_\omega(\Gamma)$ конечно (возможно, пусто);

2) функция eq_ω постоянна в некоторой окрестности точки Γ;

3) для любого $\xi \in \mathrm{Eq}_\omega(\Gamma)$ можно найти окрестность U точки Γ в $\mathfrak{G}_{\mathrm{m}}$, окрестность V точки ξ в $\mathbf{R}^{|\mathrm{m}|}$ и аналитическое отображение $\varphi: U \to \mathbf{R}^{|\mathrm{m}|}$ такие, что для любого $\Gamma' \in U$

$$\mathrm{Eq}_\omega(\Gamma') \cap V = \{\varphi(\Gamma')\}.$$

Игра называется устойчивой, если она ω-устойчива для любого ω. Множество устойчивых (соответственно ω-устойчивых) игр из $\mathfrak{G}_{\mathrm{m}}$ обозначается $\mathfrak{S}_{\mathrm{m}}$

(соответственно $\mathfrak{S}_{\mathbf{m},\omega}$). Ясно, что множества $\mathfrak{S}_{\mathbf{m}}$ и $\mathfrak{S}_{\mathbf{m},\omega}$ открыты при любых $\mathbf{m}$ и ω.

Определение 3. Будем говорить, что подмножество пространства $\mathbf{R}^k$ обширно, если дополнение к нему содержится в собственном алгебраическом подмногообразии* пространства $\mathbf{R}^k$.

Теорема 1. *Для любых* $\mathbf{m}$ *и* ω *множество* $\mathfrak{S}_{\mathbf{m},\omega}$ *обширно в* $\mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$.

3. Определим теперь спектр игр из $\mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$, положив

$$\mathrm{Spec}_\omega(\mathbf{m}) = \{n \in \mathbf{N} \mid \mathrm{Int}\,(\mathrm{eq}_\omega^{-1}(n)) \neq \emptyset\}.$$

Будучи обширным, $\mathfrak{S}_{\mathbf{m},\omega}$ распадается на конечное число компонент связности. Спектр есть не что иное, как набор значений локально-постоянной функции eq_ω на компонентах связности пространства $\mathfrak{S}_{\mathbf{m},\omega}$.

Следствие 1. *Для любого* $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^n$ *множество* $\mathrm{Spec}_\omega(\mathbf{m})$ *конечно и* $\mathrm{eq}_\omega^{-1}(\mathrm{Spec}_\omega(\mathbf{m}))$ – *обширное подмножество в* $\mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$.

Из теоремы 1 немедленно следует, что $\mathfrak{S}_{\mathbf{m}}$ обширно в $\mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$ при любом $\mathbf{m}$.

Следствие 2. *Для любого* $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^n$ *множество*

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{m}) = \{n \in \mathbf{N} \mid \mathrm{Int}(\mathrm{eq}^{-1}(n)) \neq \emptyset\}$$

конечно и его eq-*прообраз обширен в пространстве* $\mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$.

Замечание. Вильсоном ([1]) доказано, что в пространстве $\mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$ игры, обладающие нечетным числом ситуаций равновесия, образуют открытое подмножество полной меры (см. также ([2])). Отсюда вытекает, что $\mathrm{Spec}(\mathbf{m})$ состоит из нечетных чисел. Следствие 2 позволяет уточнить результат Вильсона: множество игр с нечетным числом ситуаций равновесия обширно. Можно показать, что $\min \mathrm{Spec}(\mathbf{m}) = 1$ при всех $\mathbf{m}$, а $\max \mathrm{Spec}_\omega(\mathbf{m}) \leqslant (n-1)^{|\mathbf{m}|-n-z(\omega)}$, где $z(\omega)$ – количество нулей в строке ω.

4. Ниже мы опишем конструкции, которые оказываются полезными при изучении пространства игр и позволяют доказать теорему 1.

Определение 4. Игры Γ и Γ' из $\mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$ назовем эквивалентными (соответственно слабо эквивалентными), если найдется такой набор положительных (соответственно отличных от нуля) чисел $\{k_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ и такой набор функций α_i: $\mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_{i-1} \times \mathfrak{C}_{i+1} \times \ldots \times \mathfrak{C}_n \to \mathbf{R}$, что

$$H_i'(x_i, \ldots, x_n) = k_i H_i(x_1, \ldots, x_n) + \alpha_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

для любого i и любых $x_i \in \mathfrak{C}_i$.

Если Γ' эквивалентна Γ, то $\mathrm{Eg}_\omega(\Gamma') = \mathrm{Eq}_\omega(\Gamma)$ для любого ω. В случае слабо эквивалентных игр предыдущее равенство справедливо только при $\omega = \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$**. Множество классов эквивалентных игр очевидным образом отождествляется с произведением сфер $S^{M_1-1} \times \ldots \times S^{M_n-1}$, $M_i = m_1 \ldots m_{i-1}(m_i - 1)m_{i+1} \cdots m_n$, а пространство классов слабо эквивалентных игр (если исключить из $\mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$ игры с нулевыми функциями выигрыша) – с произведением проективных пространств $\mathbf{R}P^{M_1-1} \times \ldots \times \mathbf{R}P^{M_1-1}$. Сопоставим теперь игре $\Gamma \in \mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$ эквивалентную ей игру Γ', положив

$$H_i'(x_1, \ldots, x_n) = H_i(x_1, \ldots, x_n) - H_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Это равенство определяет проекцию p пространства $\mathfrak{G}_{\mathbf{m}}$ на линейное подпространство, образованное играми с нулевыми координатами $H_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, \ldots, x_n)$. Отождествим это подпространство фиксированным способом с $\mathbf{R}^M$, $M = M_1 + \ldots + M_n$.

---

* Здесь термин "алгебраическое подмногообразие" используется для обозначения множества совместных нулей нескольких многочленов от k переменных.

** Ситуации типа $\mathbf{1}$ есть не что иное, как вполне смешанные ситуации.

Вполне смешанные ситуации равновесия в игре Γ' суть положительные решения системы алгебраических уравнений

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&H_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, k, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n) = 0,\\
&\xi_{i1} + \ldots + \xi_{in} = 1,\ i = 1, \ldots, n;\ k = 2, \ldots, m_i
\end{aligned}
$$

(см. ([3])). Рассмотрим $H_i(x_1, \ldots, x_n)$ как координаты в $\mathbf{C}^M$, а $\xi_{11}, \ldots, \xi_{1m_1}, \ldots, \xi_{n1}, \ldots, \xi_{nm_n}$ как координаты в $\mathbf{C}^{|\mathbf{m}|}$. Система (1) задает аффинное алгебраическое многообразие $W_\mathbf{m}$ в $\mathbf{C}^M \times \mathbf{C}^{|\mathbf{m}|}$. Пусть π – ограничение на $W_\mathbf{m}$ проекции $\mathbf{C}^M \times \mathbf{C}^{|\mathbf{m}|} \to \mathbf{C}^M$. Тогда если $\gamma \in \mathbf{R}^M$ и $\gamma = p(\Gamma)$, то $\mathrm{Eq}_1(\Gamma)$ есть множество точек слоя $\pi^{-1}(\gamma)$ с положительными координатами. Рассмотрев классы слабо эквивалентных игр, мы переходим от аффинных алгебраических многообразий к проективным и, используя некоторые факты из теории размерности (в частности, теорему о размерности слоев, ([4])), устанавливаем, что $\dim W_\mathbf{m} = M$. Отсюда немедленно получается, что для обширного множества игр выполнено свойство 1) из определения устойчивости.

З а м е ч а н и е. Как видно из сказанного, этот факт остается в силе, если поле $\mathbf{R}$ заменить произвольным упорядоченным полем K.

Итак, в аффинном пространстве $\mathfrak{G}_\mathbf{m}(K)$ игр типа $\mathbf{m}$ над произвольным упорядоченным полем K множество игр, имеющих конечное число ситуаций равновесия, обширно.

Вернемся к играм над $\mathbf{R}$. Чтобы исключить неустойчивые игры, достаточно вырезать из $\mathbf{C}^M$ множество точек, над которыми π разветвлено, а также удалить такие $\gamma \in \mathbf{C}^M$, что $\pi^{-1}(\gamma)$ задевает одну из плоскостей $\{\xi_{ij} = 0\}$. Оставшиеся точки образуют открытое по Зарисскому множество в $\mathbf{C}^M$, которое высекает в $\mathfrak{G}_\mathbf{m}$ обширное подмножество.

Простые рассуждения позволяют получить нужные нам утверждения об ω-устойчивости из уже доказанных фактов о вполне смешанных ситуациях равновесия.

Институт социально-экономических проблем
Академии наук СССР
Ленинград

Поступило
26 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *R. Wilson*, SIAM J. Appl. Math., v. 21, 1, 80 (1971). [2] *J.C. Harsanyi*, Intern. J. Game Theory, v. 2, 4, 235 (1973). [3] *Н.Н. Воробьев*, УМН, т. 25, в. 2, 81 (1970). [4] *И.Р. Шафаревич*, Основы алгебраической геометрии, М., "Наука", 1972.