V. V. Voevodin, A method for the solution of the complete eigenvalue problem, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1962, Volume 2, Number 1, 15–24

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Январь 1962 Февраль № 1

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОЛНОЙ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В. В. ВОЕВОДИН

(Москва)

В данной работе приводятся некоторые методы решения полной проблемы собственных значений матрицы. Эти методы являются итерационными, легко реализуются на электронных вычислительных машинах и позволяют основную часть работы проводить в режиме фиксированной запятой без существенного снижения точности.

В § 1 приводится метод решения полной проблемы собственных значений нормальных матриц. Этот метод по своей структуре близок к якобиевому процессу (см. [1], § 81).

В § 2 приводится метод решения полной проблемы собственных значений произвольной матрицы, имеющей простую структуру. Он близок к треугольному степенному методу (см. [1], § 78).

Для простоты будем рассматривать только вещественные матрицы, хотя все приведенные методы без особого труда переносятся и на комплексные матрицы.

§ 1. Метод решения полной проблемы собственных значений нормальной матрицы

1. Определение главных значений матрицы

При решении полной проблемы собственных значений нормальной матрицы будет использован метод определения главных значений матрицы (см. [2]), поэтому вначале кратко изложим его. Изложение метода ведется с некоторыми изменениями.

Главными значениями матрицы $\mathbf{A}$ называются положительные значения квадратного корня из собственных значений матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ (или $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$). Метод определения главных значений основывается на следующем результате.

Пусть $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — две ортогональные матрицы такие, что

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}, \tag{1}$$

где $\mathbf{\Pi}$ — диагональная матрица; тогда модули диагональных элементов матрицы $\mathbf{\Pi}$ будут давать главные значения матрицы $\mathbf{A}$, строки матрицы $\mathbf{U}$ — собственные векторы матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$, а столбцы матрицы $\mathbf{V}$ — собственные векторы матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Все эти утверждения следуют из двух очевидных равенств, вытекающих из (1):

$$\Pi\Pi^* = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{U}^*; \qquad \Pi^*\Pi = \mathbf{V}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{V}. \tag{2}$$

Вычислительная схема метода такова.

В матрице $\mathbf{A}$ выберем пару недиагональных элементов a_{ij} и a_{ji} такую, что

$$a_{ij}^2 + a_{ji}^2 = \max_{k \neq l}(a_{kl}^2 + a_{lk}^2),$$

и строим две матрицы простых поворотов:

$$\mathbf{U}_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\varphi & \ldots & -\sin\varphi & \ldots & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & \sin\varphi & \ldots & \cos\varphi & \ldots & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \ldots i \\ \\ \ldots j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\mathbf{V}_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\psi & \ldots & \sin\psi & \ldots & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & -\sin\psi & \ldots & \cos\psi & \ldots & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \ldots i \\ \\ \ldots j \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{3}$$

Углы φ и ψ определяем из условия обращения в нуль элементов $a_{ij}^{(1)}$ и $a_{ji}^{(1)}$ матрицы $\mathbf{A}_1 = \mathbf{U}_{ij}^{(1)}\mathbf{A}\mathbf{V}_{ij}^{(1)}$.

Это условие дает для φ и ψ систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} &\cos\psi\,(a_{ij}\cos\varphi + a_{jj}\sin\varphi) - \sin\psi\,(a_{ii}\cos\varphi + a_{ji}\sin\varphi) = 0, \\ &\cos\psi\,(-a_{ii}\sin\varphi + a_{ji}\cos\varphi) + \sin\psi\,(-a_{ij}\sin\varphi + a_{jj}\cos\varphi) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

или

$$\begin{aligned} &\cos\varphi\,(a_{ji}\cos\psi + a_{jj}\sin\psi) - \sin\varphi\,(a_{ii}\cos\psi + a_{ij}\sin\psi) = 0, \\ &\cos\varphi\,(-a_{ii}\sin\psi + a_{ij}\cos\psi) + \sin\varphi\,(-a_{ji}\sin\psi + a_{jj}\cos\psi) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Эти системы можно рассматривать как линейные однородные алгебраические системы уравнений относительно $\cos\psi$, $\sin\psi$ и $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ с нормированным решением, и для того, чтобы они имели ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определители систем обращались в нуль. Из этих условий легко получить формулы для определения углов φ и ψ:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2\,\frac{a_{ii}a_{ji} + a_{ij}a_{jj}}{a_{ii}^2 - a_{jj}^2 + a_{ij}^2 - a_{ji}^2}; \qquad \operatorname{tg} 2\psi = 2\,\frac{a_{ii}a_{ij} + a_{ji}a_{jj}}{a_{ii}^2 - a_{jj}^2 + a_{ji}^2 - a_{ij}^2}. \tag{6}$$

За решение берутся те значения φ и ψ, которые определяются из (6) и удовлетворяют системе (4) или (5).

После построения матриц $\mathbf{U}_{ij}^{(1)}$ и $\mathbf{V}_{ij}^{(1)}$ строится матрица $\mathbf{A}_1$, к ней применяется аналогичный процесс, и т. д. Искомые матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ определяются как бесконечные произведения, соответственно, всех матриц $\mathbf{U}_{ij}^{(m)}$ и $\mathbf{V}_{ij}^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, получающихся на каждом шаге. Все теоремы о сходимости этого метода доказываются точно так же, как в методе Якоби (см. [1]).

Перейдем теперь непосредственно к решению полной проблемы собственных значений нормальных матриц.

Матрица A называется нормальной, если она перестановочна со своей сопряженной, т. е.

$$AA^* = A^*A. \tag{7}$$

Для нормальных матриц доказано следующее утверждение (см. [3]): *для того чтобы матрица* A *n-го порядка была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы она имела n ортогональных собственных векторов.*

Из этого утверждения следует, что нормальную матрицу A всегда можно представить в виде

$$A = Q\Lambda Q^*, \tag{8}$$

где Λ — диагональная, а Q — унитарная матрицы.

Из (8) следует, что

$$A^*A = Q\Lambda^*Q^*Q\Lambda Q^* = Q\Lambda^*\Lambda Q^*; \tag{9}$$

следовательно, главные значения нормальной матрицы равны модулям собственных значений самой матрицы. Этот факт и умение определять главные значения по методу, изложенному выше, позволяют эффективно решать полную проблему собственных значений нормальной матрицы.

Рассмотрим несколько случаев распределения собственных значений.

2. Все собственные значения нормальной матрицы A простые и различны по модулю, за исключением комплексно-сопряженных.

В этом случае по методу определения главных значений мы можем получить разложение матрицы A на множители (см. (1)):

$$A = U'\Pi V', \tag{10}$$

причем всегда можно матрицы U и V выбрать так, что равные по модулю диагональные элементы матрицы Π будут стоять рядом и иметь одинаковые знаки. Из (10) получаем, что матрица A будет подобна матрице

$$D = V'AV = V'U'\Pi V'V = V'U'\Pi = R\Pi. \tag{11}$$

Исследуем вид матрицы D. Так как матрица A нормальная, то нормальной будет и матрица D, т. е. для нее выполняется равенство

$$DD' = D'D. \tag{12}$$

Так как матрица R ортогональная, то из (12) получаем

$$R\Pi(R\Pi)' = (R\Pi)'R\Pi, \tag{13}$$

или

$$R\Pi\Pi'R' = \Pi'R'R\Pi,$$

откуда следует равенство

$$R\Pi^2 = \Pi^2 R. \tag{14}$$

Пусть r_{ij} — элементы матрицы R, а p_{ii}^2 — диагональные элементы матрицы Π^2; тогда из (14) получаем, что для любой пары индексов (k, l) будет выполняться соотношение

$$r_{kl}p_{ll}^2 = p_{kk}^2 r_{kl}, \tag{15}$$

из которого вытекает, что если $p_{kk}^2 \neq p_{ll}^2$, то $r_{kl} = 0$.

Так как из предположения о распределении собственных значений матрицы $\mathbb{A}$ следует, что кратность диагональных элементов матрицы Π^2 будет не более двух, то очевидно, что матрица $\mathbb{R}$ будет квазидиагональной с клетками по диагонали не выше второго порядка; такой же вид будет иметь и матрица $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D}=\begin{pmatrix}\mathbb{D}_1 & & & 0\\ & \mathbb{D}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbb{D}_m\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Следовательно, решение полной проблемы для матрицы $\mathbb{A}$ свелось к решению полной проблемы для матрицы $\mathbb{D}$, которая имеет очень простой вид.

Пусть $\mathbb{D}_j$ — клетка второго порядка; тогда ее матрица равна произведению ортогональной матрицы на диагональную:

$$\begin{pmatrix} r_{11}^{(j)} & r_{12}^{(j)}\\ r_{21}^{(j)} & r_{22}^{(j)}\end{pmatrix} \text{ на } \begin{pmatrix} p_{jj} & 0\\ 0 & p_{jj}\end{pmatrix}.$$

Так как клетки второго порядка соответствуют комплексно-сопряженным собственным значениям, то

$$\begin{pmatrix} r_{11}^{(j)} & r_{12}^{(j)}\\ r_{21}^{(j)} & r_{22}^{(j)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi_j & -\sin\varphi_j\\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Поэтому для собственных значений $\lambda_{1,2}^{(j)}$ и собственных векторов $z_{1,2}^{(j)}$ матрицы клетки $\mathbb{D}_j$ можно дать окончательное выражение:

$$\lambda_{1,2}^{(j)}=p_{jj}(\cos\varphi_j\pm i\sin\varphi_j),\quad \mathrm{z}_{1,2}^{(j)}=\left\{\frac{i}{\sqrt{2}};\quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}. \tag{18}$$

Таким образом, при сделанном предположении о распределении собственных значений нормальной матрицы ее полная проблема собственных значений полностью решается с помощью однократного применения метода определения главных значений. Если матрица имеет больше двух равных по модулю собственных значений, то это может привести к появлению в матрице $\mathbb{D}$ клеток выше второго порядка; в частности, для ортогональных матриц этот метод может не дать никакого упрощения решения задачи.

3. Все собственные значения нормальной матрицы простые; равных по модулю допускается любое количество

Представим матрицу $\mathbb{A}$ в виде

$$\mathbb{A}=\mathbb{B}+\mathbb{C}, \tag{19}$$

где матрица $\mathbb{B}$ симметрическая, а $\mathbb{C}$ кососимметрическая; если a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} — соответственно, элементы матриц $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, то

$$b_{ij}=b_{ji}=\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2};\qquad c_{ij}=-c_{ji}=\frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}. \tag{20}$$

По методу Якоби (см. [1]) приведем симметрическую матрицу $\mathbb{B}$ к диагональной матрице $\overline{\mathbb{B}}$, а матрицу $\mathbb{C}$ с помощью того же преобразования переведем в подобную ей $\overline{\mathbb{C}}$; тогда для матрицы $\mathbb{A}$ имеет место разложение

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}(\overline{\mathbb{B}} + \overline{\mathbb{C}})\mathbb{Q}', \tag{21}$$

где $\mathbb{Q}$ — ортогональная матрица преобразования.

Так как матрица $\mathbb{A}$ нормальная, то нормальной будет и матрица $\overline{\mathbb{B}} + \overline{\mathbb{C}}$; следовательно, для нее выполняется равенство

$$(\overline{\mathbb{B}} + \overline{\mathbb{C}})(\overline{\mathbb{B}} + \overline{\mathbb{C}})' = (\overline{\mathbb{B}} + \overline{\mathbb{C}})'(\overline{\mathbb{B}} + \overline{\mathbb{C}}), \text{ или } (\overline{\mathbb{B}} + \overline{\mathbb{C}})(\overline{\mathbb{B}} - \overline{\mathbb{C}}) = (\overline{\mathbb{B}} - \overline{\mathbb{C}})(\overline{\mathbb{B}} + \overline{\mathbb{C}}),$$

откуда получаем

$$\overline{\mathbb{B}}\overline{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}}\overline{\mathbb{B}}. \tag{22}$$

Из этого равенства, аналогичного равенству (14), можно сделать вывод, что матрицу $\overline{\mathbb{B}} + \overline{\mathbb{C}}$ путем перестановки строк и столбцов можно привести к квазидиагональному виду (16), только клетки $\mathbb{D}_j\,(j=1,2,\ldots,m)$ в этом случае могут иметь произвольный порядок l_j, но обязательно будут вида

$$\mathbb{D}_j = \overline{\mathbb{D}}_j + d_j\mathbb{E}, \tag{23}$$

где $\overline{\mathbb{D}}_j$ — кососимметрическая матрица, а d_j — действительное число. Собственные значения $\lambda_k^{(j)}\,(k=1,2,\ldots,l_j)$ матрицы $\mathbb{D}_j$ связаны с собственными значениями $\overline{\lambda}_k^{(j)}$ матрицы $\overline{\mathbb{D}}_j$ равенством

$$\lambda_k^{(j)} = \overline{\lambda}_k^{(j)} + d_j, \tag{24}$$

а их собственные векторы совпадают, поэтому дальнейшее решение полной проблемы для нормальных матриц сводится к решению полной проблемы для кососимметрических матриц $\overline{\mathbb{D}}_j$.

По предположению матрица $\mathbb{A}$ не имеет кратных собственных значений; не будет их иметь и кососимметрическая матрица $\overline{\mathbb{D}}_j$. Поэтому для решения ее полной проблемы собственных значений можно с успехом применять метод, изложенный в п. 2.

Интересно отметить один частный случай. Пусть матрица $\mathbb{A}$ ортогональная и не имеет кратных собственных значений. В этом случае клетки $\mathbb{D}_j\,(j=1,2,\ldots,m)$ будут также ортогональными матрицами. Известно (см. [3]), что все собственные значения ортогональнни матрицы по модулю равны единице, а все собственные значения кососимметрической матрицы суть чисто мнимые числа; поэтому из равенства (24) получаем, что в этом случае должно выполняться равенство

$$|\overline{\lambda}_k^{(j)}|^2 + d_j^2 = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, l_j. \tag{25}$$

Так как различных чисто мнимых чисел $\overline{\lambda}_k^{(j)}$, удовлетворяющих равенству (25), может быть не более двух, то отсюда следует, что все клетки $\mathbb{D}_j\,(j=1,2,\ldots,m)$ будут не выше второго порядка. Таким образом, если ортогональная матрица не имеет кратных собственных значений, то решение ее полной проблемы собственных значений сводится к однократному применению метода Якоби.

В заключение следует отметить, что при практическом применении этого метода не нужно производить разложение (19), а следует сразу применять ортогональные преобразования к матрице $\mathbb{A}$, вычисляя угол поворота по формуле

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{a_{ii} - a_{jj}}. \tag{26}$$

Применение этих преобразований эквивалентно приведению матрицы $\mathbf{B}$ методом Якоби к диагональному виду, но позволяет матрицу $\mathbf{A}$ сразу приводить к матрице $\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{C}}$. Для того чтобы обеспечить максимальную скорость сходимости, необходимо на каждом шагу выбирать такую пару индексов (i, j), чтобы сумма $a_{ij} + a_{ji}$ была наибольшей по модулю.

4. Нормальная матрица A имеет кратные собственные значения

Легко проверить, что в этом случае, применяя метод, изложенный в п. 3, мы в конце концов придем к необходимости решать полную проблему для таких матриц $\mathbf{N}$, которое одновременно являются и кососимметрическими, и ортогональными, т. е. для которых

$$\mathbf{N}' = -\mathbf{N}, \quad \mathbf{N}'\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{N}' = \mathbf{E}. \tag{27}$$

Из (27) легко получить еще равенство

$$\mathbf{N}^2 = -\mathbf{E}. \tag{28}$$

Собственные значения матрицы $\mathbf{N}$ равны $\pm i$, а собственные векторы легко находить, учитывая следующее замечание.

Пусть $\mathbf{p}$ — произвольный ненулевой вектор, тогда вектор $\mathbf{p} - i\mathbf{N}\mathbf{p}$ будет собственным вектором матрицы $\mathbf{N}$, соответствующим собственному значению, равному $+i$. Действительно, учитывая (28), имеем

$$\mathbf{N}(\mathbf{p} - i\mathbf{N}\mathbf{p}) = \mathbf{N}\mathbf{p} - i\mathbf{N}^2\mathbf{p} = \mathbf{N}\mathbf{p} + i\mathbf{p} = i(\mathbf{p} - i\mathbf{N}\mathbf{p}). \tag{29}$$

§ 2. Метод решения полной проблемы собственных значений произвольной матрицы

Пусть дана вещественная неособенная матрица $\mathbf{A}$, соответствующая оператору, действующему в n-мерном пространстве R, и имеющая n линейно независимых собственных векторов $\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n$. Разобьем все собственные значения $\lambda_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы $\mathbf{A}$ на m групп, поместив в одну группу только равные по модулю собственные значения, и пусть при этом будет выполняться условие

$$|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_{k_1}| > |\lambda_{k_1+1}| = \cdots = |\lambda_{k_2}| > \cdots > |\lambda_{k_{m-1}+1}| = \cdots = |\lambda_{k_m}|, \tag{30}$$

где $k_m = n$. Построим m инвариантных относительно $\mathbf{A}$ подпространств $P_1, P_2, \ldots, P_m$ пространства R, определив $P_j\,(j = 1, 2, \ldots, m)$ как подпространство, натянутое на собственные векторы $\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{k_j}$.

Очевидно, что имеет место соотношение

$$P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_m = R. \tag{31}$$

Пусть векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ образуют какой-нибудь базис пространства R, обладающий тем свойством, что векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k_j}\,(j = 1, 2, \ldots, m)$, образуют базис подпространства $P_j\,(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Выясним вид, который имеет матрица оператора, заданного в этом базисе (см. [1], § 7). Так как векторы $\mathrm{Au}_1, \ldots, \mathrm{Au}_{k_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ принадлежат P_j, т. е. являются линейными комбинациями лишь векторов $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{k_j}$, то их координаты в выбранном базисе, начиная с $k_j + 1$-й, равны нулю. Следовательно, матрица A в новом базисе имеет квазитреугольный вид

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{12} \ldots \mathrm{A}_{1m} \\ 0 \quad \mathrm{A}_{22} \ldots \mathrm{A}_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \ldots \mathrm{A}_{mm} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где клетка $\mathrm{A}_{jj}\,(j = 1, 2, \ldots, m)$ имеет порядок $k_j - k_{j-1}$, $k_0 = 0$. Если Q — матрица, столбцы которой суть координаты, соответственно, векторов $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n$, заданных в старом базисе, то матрицы A и $\overline{\mathrm{A}}$ связаны соотношением

$$\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Q}. \tag{33}$$

Для матрицы $\overline{\mathrm{A}}$ задача нахождения собственных значений решается значительно проще, чем для A, так как она сводится к нахождению собственных значений матриц $\mathrm{A}_{jj}\,(j = 1, 2, \ldots, m)$, имеющих, как правило, небольшой порядок. В частности, если все собственные значения матрицы A различны по модулю, то клетки $\mathrm{A}_{jj}\,(j = 1, 2, \ldots, m)$ будут первого порядка. Таким образом, решение полной проблемы собственных значений матрицы A или ее упрощение в случае наличия кратных по модулю собственных значений можно свести к отысканию какой-либо матрицы Q, удовлетворяющей равенству (33), где $\overline{\mathrm{A}}$ — матрица вида (32). Покажем, как можно находить матрицу Q.

Возьмем произвольную ортогональную матрицу Q_0 и построим последовательность ортогональных матриц $\mathrm{Q}_k\,(k = 1, 2, \ldots)$ по методу, аналогичному треугольному степенному методу:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\mathrm{Q}_0 &= \mathrm{Q}_1\Delta_1, \\ \mathrm{A}\mathrm{Q}_1 &= \mathrm{Q}_2\Delta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{A}\mathrm{Q}_k &= \mathrm{Q}_{k+1}\Delta_{k+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь $\Delta_k\,(k = 1, 2, \ldots)$ — правые треугольные матрицы; разложение матрицы на произведение ортогональной и правой треугольной лучше всего делать по методу отражений (см. [1], § 16).

Докажем, что последовательность матриц $\mathrm{Q}_k\,(k = 1, 2, \ldots)$ обладает тем свойством, что последовательность матриц $\mathrm{A}_k = \mathrm{Q}_k'\mathrm{A}\mathrm{Q}_k$ стремится к квазитреугольной матрице вида (32). Для этого нам потребуется оценить миноры матрицы

$$\mathrm{B}_k = \mathrm{Q}_0'\mathrm{A}'^k\mathrm{A}^k\mathrm{Q}_0. \tag{35}$$

Пусть

$$\mathrm{A} = \mathrm{Q}_0\mathrm{C}\Lambda\mathrm{C}^{-1}\mathrm{Q}_0', \qquad \Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]; \tag{36}$$

тогда

$$\mathrm{B}_k = \mathrm{C}^{-1'}\Lambda^k\mathrm{C}'\mathrm{C}\Lambda^k\mathrm{C}^{-1}. \tag{37}$$

Введем сокращенные обозначения для миноров матрицы $\mathbb{B}_k$:

$$\begin{vmatrix} b_{i_1j_1}^{(k)} & b_{i_1j_2}^{(k)} & \ldots & b_{i_1j_l}^{(k)} \\ b_{i_2j_1}^{(k)} & b_{i_2j_2}^{(k)} & \ldots & b_{i_2j_l}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i_lj_1}^{(k)} & b_{i_lj_2}^{(k)} & \ldots & b_{i_lj_l}^{(k)} \end{vmatrix} = \mathbb{B}_k\begin{pmatrix} i_1 i_2, \ldots, i_l \\ j_1, j_2, \ldots, j_l \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Используя формулу Бине — Коши (см. [3]) для определителя произведения двух прямоугольных матриц, получаем

$$\mathbb{B}_k\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_l \\ j_1, j_2, \ldots, j_l \end{pmatrix} = \sum_{1\leqslant p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_l\leqslant n} \mathbb{C}^{-1'}\Lambda^k\mathbb{C}'\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_l \\ p_1, p_2, \ldots, p_l \end{pmatrix}\times \tag{39}$$

$$\times\, \mathbb{C}\Lambda^k\mathbb{C}^{-1}\begin{pmatrix} p_1, p_2, \ldots, p_l \\ j_1, j_2, \ldots, j_l \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{1\leqslant p_1\leqslant\ldots\leqslant p_l\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant\beta_1\leqslant\ldots\leqslant\beta_l\leqslant n} \mathbb{C}^{-1'}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_l \\ \beta_1, \ldots, \beta_l \end{pmatrix}\Lambda^k\begin{pmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_l \\ \beta_1, \ldots, \beta_l \end{pmatrix}\mathbb{C}'\begin{pmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_l \\ p_1, \ldots, p_l \end{pmatrix}\times$$

$$\times \sum_{1\leqslant\alpha_1\leqslant\ldots\leqslant\alpha_l\leqslant n}\mathbb{C}\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_l \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l \end{pmatrix}\Lambda^k\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_l \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l \end{pmatrix}\mathbb{C}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_l \\ j_1, \ldots, j_l \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\Lambda^k\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_l \\ r_1, r_2, \ldots, r_l \end{pmatrix} = \lambda_{r_1}^k\lambda_{r_2}^k\ldots\lambda_{r_l}^k;$$

то, учитывая (30), будем иметь

$$\mathbb{B}_k\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_l \\ j_1, j_2, \ldots, j_l \end{pmatrix} = |\lambda_1|^{2k}|\lambda_2|^{2k}\ldots|\lambda_l|^{2k}\Theta_{ijl}^{(k)}, \tag{40}$$

где $\Theta_{ijl}^{(k)}$ — величины, ограниченные сверху по модулю для всех i, j, k, l постоянным числом, не зависящим от k. Для главных миноров матрицы $\mathbb{B}_k$ получим выражение

$$\mathbb{B}_k\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l \\ 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix} = \tag{41}$$

$$= \sum_{1\leqslant p_1\leqslant\ldots\leqslant p_l\leqslant n}\left[\sum_{1\leqslant\alpha_1\leqslant\ldots\leqslant\alpha_l\leqslant n}\mathbb{C}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_l \\ 1, \ldots, l \end{pmatrix}\mathbb{C}\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_l \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l \end{pmatrix}\lambda_{\alpha_1}^k\lambda_{\alpha_2}^k\ldots\lambda_{\alpha_l}^k\right]^2 =$$

$$= |\lambda_1|^{2k}|\lambda_2|^{2k}\ldots|\lambda_l|^{2k}\Theta_l^{(k)}.$$

Матрицу $\mathbb{Q}_0$ всегда можно выбрать так, что все величины $\Theta_l^{(k)}$ будут ограничены снизу при всех k строго положительным числом, не зависящим от k.

Из (34) получим

$$\mathbb{A}^k\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q}_k\cdot\mathbb{\Delta}_k\cdot\mathbb{\Delta}_{k-1}\ldots\mathbb{\Delta}_1 = \mathbb{Q}_k\cdot\nabla_k, \tag{42}$$

откуда вытекает

$$\mathbb{B} = \nabla_k'\nabla. \tag{43}$$

Пусть $\delta_{ij}^{(k)}$ — элементы матрицы ∇_k. Тогда известно (см. [3]), что

$$\delta_{11}^{(k)} = \sqrt{\mathbb{B}_k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}; \quad \delta_{ii}^{(k)} = \sqrt{\frac{\mathbb{B}_k\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, i \\ 1, 2, \ldots, i \end{pmatrix}}{\mathbb{B}_k\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, i-1 \\ 1, 2, \ldots, i-1 \end{pmatrix}}} \quad \text{для } i > 1; \tag{44}$$

$$\delta_{ij}^{(k)} = \delta_{ii}^{(k)} \frac{\mathrm{B}_k \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, i-1, i \\ 1, 2, \ldots, i-1, j \end{pmatrix}}{\mathrm{B}_k \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, i-1 \\ 1, 2, \ldots, i-1 \end{pmatrix}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; j = i+1, i+2, \ldots, n.$$

Из (40), (41), (44) легко получить, что матрицу ∇_k можно представить в виде

$$\nabla_k = \mathrm{D}_k \cdot \overline{\nabla}_k, \tag{45}$$

где $\mathrm{D}_k = [\,|\lambda_1|^k, \ldots, |\lambda_n|^k]$, а $\overline{\nabla}_k$ — правая треугольная матрица с элементами, ограниченными сверху по модулю для всех k постоянным числом, не зависящим от k; диагональные элементы матрицы $\overline{\nabla}_k$ ограничены для всех k снизу строго положительным числом, не зависящим от k. Отсюда следует, что $\overline{\nabla}_k^{-1}$ — правая треугольная матрица с элементами, ограниченными сверху по модулю для всех k постоянным числом, не зависящим от k.

Из (42) получаем

$$\mathrm{Q}_k = \mathrm{A}^k \mathrm{Q}_0 \nabla_k^{-1}. \tag{46}$$

Образуем матрицу A_k, и, учитывая (45) и (46), будем иметь

$$\mathrm{A}_k = \mathrm{Q}_k' \mathrm{A} \mathrm{Q}_k = \mathrm{Q}_k^{-1} \mathrm{A} \mathrm{Q}_k = \nabla_k \mathrm{Q}_0^{-1} \mathrm{A}^{-k} \mathrm{A} \mathrm{A}^k \mathrm{Q}_0 \nabla_k^{-1} = \tag{47}$$

$$= \nabla_k \mathrm{Q}_0^{-1} \mathrm{A} \mathrm{Q}_0 \nabla_k^{-1} = \mathrm{D}_k \overline{\nabla}_k \mathrm{Q}_0^{-1} \mathrm{A} \mathrm{Q}_0 \overline{\nabla}_k^{-1} \mathrm{D}_k^{-1} = \mathrm{D}_k \mathrm{N}_k \mathrm{D}_k^{-1}.$$

Элементы матрицы N_k суть числа, ограниченные сверху по модулю при всех k постоянным числом, не зависящим от k. Разобьем матрицу A_k на клетки $A_{ij}^{(k)}$ аналогично (32), и пусть τ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ есть число, равное модулю собственных значений, входящих в j-ю группу; тогда из (47) можно сделать вывод, что элементы клеток $A_{ij}^{(k)}$ для $i > j$ суть величины

$$O\left[\left(\frac{\tau_i}{\tau_j}\right)^k\right];$$

следовательно, матрицы A_k стремятся к квазитреугольной.

Основным достоинством этого метода является его устойчивость к ошибкам округления, так как он использует ортогональные преобразования матрицы и является самоисправляющимся. Однако при наличии близких по модулю собственных значений этот метод будет давать очень слабую сходимость. Для устранения этого недостатка можно воспользоваться следующим аналогом ΛP-алгорифма (см. [1], § 80). Пусть

$$\mathrm{A}^{2^p} = \widetilde{\mathrm{Q}}_p \widetilde{\nabla}_p, \tag{48}$$

где $\widetilde{\mathrm{Q}}_p$ — ортогональная, а $\widetilde{\nabla}_p$ — правая треугольная матрица. Очевидно, что во введенных выше обозначениях имеем $\widetilde{\mathrm{Q}}_p = \mathrm{Q}_{2^p}$, а $\widetilde{\nabla}_p = \nabla_{2^p}$ при $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{E}$.

Возведя равенство (48) в квадрат, получим

$$\mathrm{A}^{2^{p+1}} = \widetilde{\mathrm{Q}}_p \widetilde{\nabla}_p \widetilde{\mathrm{Q}}_p \widetilde{\nabla}_p. \tag{49}$$

Матрицу $\widetilde{\nabla}_p \widetilde{\mathrm{Q}}_p$ разложим в произведение ортогональной матрицы R_p

и правой треугольной матрицы $\mathbf{L}_p$. Тогда

$$\mathbf{A}^{2p+1} = \widetilde{\mathbf{Q}}_p \mathbf{R}_p \mathbf{L}_p \widetilde{\mathbf{V}}_p = \widetilde{\mathbf{Q}}_{p+1} \mathbf{V}_{p+1}, \tag{50}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{p+1} = \widetilde{\mathbf{Q}}_p \mathbf{R}_p, \quad \text{а} \quad \widetilde{\mathbf{V}}_{p+1} = \mathbf{L}_p \widetilde{\mathbf{V}}_p. \tag{51}$$

Этот метод позволяет последовательно определять матрицы $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_4$, $\mathbf{Q}_8, \ldots, \mathbf{Q}_{2p}, \ldots$.

В условиях сходимости основного метода будет сходиться и этот метод, причем сходимость будет порядка

$$O\left[\left(\frac{\tau_i}{\tau_j}\right)^{2^k}\right],$$

т. е. квадратичной.

Из (45) можно сделать вывод, что, как правило, элементы матрицы $\widetilde{\mathbf{V}}_p$ будут либо сильно возрастать, либо сильно уменьшаться с ростом p; поэтому для уменьшения влияния ошибок рекомендуется этот метод сочетать с изложенным выше методом следующим образом.

Пусть мы построили матрицу $\mathbf{Q}_{2p}$. Эту матрицу уточняем по основному методу, сделав несколько итераций. Пусть при этом получилась матрица $\mathbf{Q}_l$, где $2^p < l$. Строим матрицу $\mathbf{A}_l = \mathbf{Q}_l' \mathbf{A} \mathbf{Q}_l$, к ней применяем процесс ускорения, и т. д. Такая комбинация позволяет получить быстросходящийся устойчивый процесс.

Аналогично можно доказать, что треугольный степенной метод также позволяет решать полную проблему собственных значений произвольной матрицы.

Поступила в редакцию
22.09.1961

Цитированная литература

1. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
2. G. E. Forsythe, P. Henrici. The cyclic Jacobi method for computing the principal values of a complex matrix. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **94**, № 1, 1—23.
3. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1954.