Ю. И. Мельник, О конструктивном построении рядов Дирихле регулярных функций, *Матем. заметки*, 1980, том 27, выпуск 3, 391–397

https://www.mathnet.ru/mzm6523

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

О КОНСТРУКТИВНОМ ПОСТРОЕНИИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. И. Мельник

1. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t)$ — ассоциированная с ней по Борелю, $\overline{D}$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$, D — открытая часть $\overline{D}$. Предположим, что D — непустая область и начало координат принадлежит D. Предположим далее, что все нули $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ функции $L(\lambda)$ — простые. Функции $f(z)$, регулярной в $\overline{D}$, сопоставляется ряд Дирихле (см. [1, стр. 286])

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_L(\lambda_k, f)}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k z}, \tag{1}$$

где $\omega_L(\mu, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \gamma(t)\left(\int_0^t f(t-\tau)\, e^{\mu\tau}\, d\tau\right)dt$, C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$, на котором и внутри которого $f(z)$ — регулярная функция.

А. Ф. Леонтьев установил следующий результат (см. [2], а также [1, стр. 296]).

ТЕОРЕМА А. *Для того чтобы любая функция* $f(z)$, *регулярная в* $\overline{D}$, *представлялась в* D *рядом* (1), *необходимо и достаточно, чтобы* $L(\lambda)$ *была функцией вполне регулярного роста* [1]) *и удовлетворяла условию* $\ln|L'(\lambda_k)| > (h(\varphi_k - \varepsilon) r_k$, $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $k > k_0(\varepsilon)$, *где* $\varepsilon > 0$ — *любое*, $h(\varphi)$ — *индикатор* $L(\lambda)$.

---

[1]) За сведениями, относящимися к используемым в этой работе свойствам целых функций, мы отсылаем к книгам [3, гл. II, III], [1, гл. I].

В. Х. Мусоян доказал (см. [4], а также [1, стр. 79]), что для произвольной выпуклой области $\overline{D}$ $(0 \in D)$ существует целая функция $L(\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} L_D(\lambda)$, которая удовлетворяет условиям теоремы А. Явный вид функций $L_D(\lambda)$ из теоремы А известен лишь в тех случаях, когда $\overline{D}$ — многоугольник (см. [1, стр. 57]), круг (см. [5]), а также в некоторых других (см. [6]). В настоящей работе для произвольных выпуклых областей $\overline{D}$ функции $L_D(\lambda)$ из теоремы А строятся эффективно (так, что их нули задаются в явном виде).

Всюду в дальнейшем считается, что: а) оценки вида $O(\cdot)$, $o(\cdot)$ равномерны по всем не входящим в них параметрам, которые встречаются в данном выражении; б) $\langle x \rangle$ обозначает целую часть числа x и скобки $\langle \cdot \rangle$ употребляются только в этом смысле; в) $\sum_{k=0}^{-1} = 0$.

2. Пусть $\Delta(\theta)$ — возрастающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция такая, что $\Delta(0) = 0$, $\int_0^{2\pi} e^{-it} d\Delta(t) = 0$. Цель этого пункта — построить счетное множество точек $\Lambda \overset{\mathrm{df}}{=} \Lambda_\Delta$ на плоскости такое, что: 1) при любом $\theta \in [0, 2\pi]$, отличном от точек разрыва функции $\Delta(\theta)$, существует предел $\lim\limits_{r \to \infty} (n(r, \theta)/r) = \Delta(\theta)$, где $n(r, \theta)$ — число точек из Λ_Δ в секторе $|z| < r$, $0 < \arg z < \theta$; 2) существует предел $s = \lim\limits_{r \to \infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_\Delta,\, |\lambda| < r} \frac{1}{\lambda}$; 3) $|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| \geqslant 1$ $(\lambda_n \in \Lambda_\Delta$, Λ_Δ упорядочено по возрастанию модулей).

Пусть $q_n \uparrow +\infty$ — последовательность натуральных чисел такая, что

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-it}\, d\,\Delta(t) - \sum_{j=0}^{q_n - 1} e^{-i \frac{2\pi}{q_n} j} \left\{ \Delta\left(\frac{2\pi}{q_n}(j+1)\right) - \Delta\left(\frac{2\pi}{q_n} j\right) \right\} \right| \leqslant \frac{1}{n} \tag{2}$$

(в качестве q_n может быть взята любая последовательность $q_n \uparrow +\infty$ такая, что $q_n \geqslant 2\pi\,\Delta(2\pi) \cdot n$, $n \geqslant 1$). Положим

$$m_{n,j} = \left\langle \Delta\left(\frac{2\pi}{q_n}(j+1)\right)(2n-1) \right\rangle - \left\langle \Delta\left(\frac{2\pi}{q_n} j\right)(2n-1) \right\rangle,$$

$$M_{n,j} = \sum_{k=0}^{j-1} m_{n,j}, \quad m_n = M_{n, q_n}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, j = 0, 1, \ldots, q_n - 1).$$

Тогда, очевидно,

$$m_n = \langle \Delta(2\pi)(2n-1) \rangle \leqslant \Delta(2\pi)(2n-1) + 1. \quad (3)$$

Будем считать, что $\Delta(2\pi) < 1/2$ (это ограничение несущественно). Точки множества Λ_Δ будем выбирать в кольцах $n^2 \leqslant |z| \leqslant n^2 + m_n$. В силу (3) расстояние между любыми двумя соседними кольцами всегда больше 1. При $m_{n,j} \geqslant 1$ положим

$$\lambda_{n,j}^{(p)} = (n^2 + M_{n,j} + p) \exp\left\{ i \frac{2\pi}{q_n} j + i \frac{2\pi p}{q_n \cdot m_{n,j}} \right\}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, j = 0, 1, \ldots, q_n - 1, p = 0, 1, \ldots, m_{n,j} - 1). \quad (4)$$

Очевидно, что точки $\lambda_{n,j}^{(p)}$ лежат в кольцах $n^2 \leqslant |z| \leqslant n^2 + m_n$ на окружностях с целочисленными радиусами, причем на каждой такой окружности лежит в точности по одной точке. Покажем, что

$$\Lambda_\Delta \overset{\text{df}}{=} \{\lambda_{n,j}^{(p)},\ n = 1, 2, \ldots,\ j = 0, 1, \ldots, q_n - 1,\ p = 0, 1, \ldots, m_{n,j} - 1\}$$

— требуемое множество.

В силу сказанного выше условие 3), очевидно, выполняется. Покажем, что выполняется условие 1). Положим $n_r = \max\limits_n \{n\colon n^2 < r\}$, и пусть $\theta \in [0, 2\pi]$ не является точкой разрыва функции $\Delta(\theta)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем натуральное $n(\theta)$ так, чтобы при $n > n(\theta)$ было

$$\left| \Delta\left(\frac{2\pi}{q_n} \left\langle \frac{\theta}{2\pi} q_n \right\rangle \right) - \Delta(\theta) \right| < \varepsilon$$

(это всегда можно сделать, так как $\frac{2\pi}{q_n} \left\langle \frac{\theta}{2\pi} q_n \right\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ и θ — точка непрерывности функции $\Delta(\theta)$). Тогда при $r \to \infty$ легко получаем

$$|\delta(r, \theta)| \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{r} \left| \sum_{k=1}^{n_r - 1} \left\{ \Delta\left(\frac{2\pi}{q_n} \left\langle \frac{\theta}{2\pi} q_n \right\rangle \right) - \Delta(\theta) \right\} (2n-1) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r} \Delta(2\pi) \cdot \sum_{n=1}^{n(\theta)} (2n-1) + \varepsilon \frac{1}{r} \sum_{n=n(\theta)+1}^{n_r - 1} (2n-1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(\varepsilon, \theta)}{r} + \varepsilon \cdot C \qquad (C(\varepsilon, \theta) = \text{const},\ C = \text{const}).$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$ и учитывая затем произвольность ε, из последнего соотношения находим, что

$$\lim_{r \to \infty} \delta(r, \theta) = 0.$$

Отсюда, учитывая (3) и определение чисел $m_{n,j}$, получаем

$$\frac{n(r,\theta)}{r} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{n_r - 1} \sum_{j=0}^{\left\langle \frac{\theta}{2\pi} q_n \right\rangle - 1} m_{n,j} + O\left(\frac{m_{n_r}}{r}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{n_r-1} \frac{1}{r} \Delta\left(\frac{2\pi}{q_n} \left\langle \frac{\theta}{2\pi} q_n \right\rangle\right) \cdot (2n-1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) =$$

$$= \Delta(\theta) \cdot \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{n_r-1} (2n-1) + \delta(r, \theta) + o(1) \xrightarrow[r \to \infty]{} \Delta(\theta).$$

Этим выполнение условия 1) доказано.

Покажем теперь, что выполняется условие 2). При $m_{n,j} \geqslant 1$ имеем

$$\left| \int_{\frac{2\pi}{q_n} j}^{\frac{2\pi}{q_n}(j+1)} e^{-ix}\, dx - \frac{2\pi}{q_n \cdot m_{n,j}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{p=0}^{m_{n,j}-1} \exp\left\{ -i \frac{2\pi}{q_n} j - i \frac{2\pi p}{q_n \cdot m_{n,j}} \right\} \right| =$$

$$= \left| \sum_{p=0}^{m_{n,j}-1} \int_{\frac{2\pi}{q_n} j + \frac{2\pi p}{q_n \cdot m_{n,j}}}^{\frac{2\pi}{q_n} j + \frac{2\pi(p+1)}{q_n \cdot m_{n,j}}} \left(e^{-ix} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \exp\left\{ -i \frac{2\pi}{q_n} j - i \frac{2\pi p}{q_n \cdot m_{n,j}} \right\} \right) \right| \leqslant \frac{(2\pi)^2}{q_n^2 \cdot m_{n,j}}. \qquad (5)$$

Используя теперь (4), (3), (5), (2) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{-it}\, d\Delta(t) = 0,$$

находим, что

$$\sum_{j=0}^{q_n-1}\sum_{p=0}^{m_{n,j}-1}\frac{1}{\lambda_{n,j}^{(p)}}=$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{q_n-1}\sum_{p=0}^{m_{n,j}-1}\exp\left\{-i\frac{2\pi}{q_n}j-i\frac{2\pi p}{q_n\cdot m_{n,j}}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{q_n}{n^2}\sum_{j=0}^{q_n-1}m_{n,j}\int_{\frac{2\pi}{q_n}j}^{\frac{2\pi}{q_n}(j+1)}e^{-ix}\,dx+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{q_n}{n^2}\int_0^{2\pi/q_n}e^{-ix}\,dx\sum_{j=0}^{q_n-1}\left\{\left\langle\left(\frac{2\pi}{q_n}(j+1)\right)(2n-1)\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\left\langle\Delta\left(\frac{2\pi}{q_n}j\right)(2n-1)\right\rangle\right\}e^{-i\frac{2\pi}{q_n}j}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{q_n}{n^2}\int_0^{\frac{2\pi}{q_n}}e^{-ix}\,dx\cdot\sum_{j=1}^{q_n-1}\left\langle\Delta\left(\frac{2\pi}{q_n}j\right)\right\rangle\cdot$$

$$\cdot\{e^{-i\frac{2\pi}{q_n}(j-1)}-e^{-i\frac{2\pi}{q_n}j}\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{q_n}{n}\int_0^{\frac{2\pi}{q_n}}e^{-ix}\,dx\cdot\sum_{j=0}^{q_n-1}\Delta\left(\frac{2\pi}{q_n}j\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{e^{-i\frac{2\pi}{q_n}(j-1)}-e^{-i\frac{2\pi}{q_n}j}\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{q_n}{n}\int_0^{\frac{2\pi}{q_n}}e^{-ix}\,dx\sum_{j=0}^{q_n-1}\left\{\Delta\left(\frac{2\pi}{q_n}(j+1)\right)-\Delta\left(\frac{2\pi}{q_n}j\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot e^{-i\frac{2\pi}{q_n}j}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{q_n}{n}\int_0^{\frac{2\pi}{q_n}}e^{-ix}\,dx\cdot$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}e^{-it}\,d\Delta(t)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда немедленно следует выполнение условия 2). Все доказано.

3. Пусть $\overline{D}$ — произвольное выпуклое множество с опорной функцией $K(\theta)$. Положим $H(\theta) = K(-\theta)$, $\Delta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left(H'(\theta) + \int^{\theta} H(u)\,du\right)$ (это равенство определяет функцию $\Delta(\theta)$ в точках непрерывности; в точках разрыва можно считать, например, что $\Delta(\theta) \overset{df}{=} \Delta(\theta + 0)$). Если $\Delta(2\pi) < 1/2$, то отправляясь от функции $\Delta(\theta)$, строим счетное множество Λ_Δ из пункта 2 и соответствующее ему каноническое произведение

$$F(z; \Lambda_\Delta) \overset{df}{=} e^{s_\Delta \cdot z} \cdot \prod_{\lambda \in \Lambda_\Delta} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{z}{\lambda}},$$

где

$$s_\Delta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(\theta)\, e^{i\theta}\, d\theta - \lim_{r \to \infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_\Delta,\ |\lambda| < r} \frac{1}{\lambda}.$$

После этого полагаем

$$L_D(z) = F(z; \Lambda_\Delta). \tag{6}$$

Если $\Delta(2\pi) \geqslant 1/2$, то подбираем число M так, чтобы выполнялось неравенство $\Delta(2\pi)/M < 1/2$, и полагаем $\tilde{K}(\theta) = K(\theta)/M$, $\tilde{H}(\theta) = H(\theta)/M$, $\tilde{\Delta}(\theta) = \Delta(\theta)/M$. Затем, отправляясь от функции $\tilde{\Delta}(\theta)$, строим счетное множество $\Lambda_{\tilde{\Delta}}$ из пункта 2 и соответствующее ему каноническое произведение $F(z; \Lambda_{\tilde{\Delta}})$. После этого полагаем

$$L_D(z) = F(Mz; \Lambda_{\tilde{\Delta}}). \tag{6'}$$

ТЕОРЕМА. *Пусть $\overline{D}(0 \in D)$ — произвольное выпуклое множество и $L_D(z)$ — целая функция, которая определяется по формуле* (6), *если* $\Delta(2\pi) < 1/2$, *или* (6'), *если* $\Delta(2\pi) \geqslant 1/2$. *Тогда $L_D(z)$ удовлетворяет требованиям теоремы* A.

Справедливость теоремы немедленно следует из того, что в силу условий 1) — 3) множество нулей функции $L_D(z)$ регулярно (см. [3, стр. 205, 122, 121, 84, 604], [1, стр. 39]).

Институт математики
АН УССР

Поступило
24.V.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л е о н т ь е в А. Ф., Ряды экспонент, «Наука», М., 1976.

[2] Л е о н т ь е в А. Ф., Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле, Изв. АН СССР, Сер. матем., **36**, № 6 (1972), 1282—1296.

[3] Л е в и н Б. Я., Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.

[4] М у с о я н В. Х., О представлении функций рядами $\sum c_k f(\lambda_k z)$, Автореферат кандид. дисс., М., 1966.

[5] М е л ь н и к Ю. И., О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутом круге, Матем. сб., **97**, № 4 (1975), 493—502.

[6] М е л ь н и к Ю. И., К вопросу о разложении аналитических функций в ряды Дирихле, Укр. матем. ж., **27**, № 6 (1975), 815—818.