С. А. Пихтильков, О гипотезе Якобиана,
Чебышевский сб., 2013, том 14, выпуск 3, 92–99

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.714

О ГИПОТЕЗЕ ЯКОБИАНА

С. А. Пихтильков (г. Оренбург)

Семидесятипятилетию
А. Л. Шмелькина
посвящается

Аннотация

В работе получен условный результат имеющий отношение к гипотезе Якобиана (см. [1], [2], [3]).

Ключевые слова: Якобиан полиномиального отображения, гипотеза Якобиана, нильпотентное линейное преобразование.

ON THE JACOBIAN CONJECTURE

S. A. Pikhtilkov (Orenburg)

Abstract

The conditional result concerning to Jacobian conjecture is obtained in the article (see [1], [2], [3]).

Keywords: Jacobian of polynomial transformation, Jacobian conjecture, nilpotent linear transformation.

Гипотеза Якобиана восходит к 1939 году [1], [2], [3]. Она была включена в число проблем С. Смейла под номером 16. Дадим формулировку С. Смейла.

Предположим, что $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ полиномиальное отображение, производная которого в каждой точке невырождена. Является ли f биективным?

Известно, что гипотезу Якобиана достаточно решить для n равного двум и многочленов степени не выше 150 [1].

Пусть $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ – полиномиальное отображение. Можно считать, что $f = (f_1, ..., f_n)$, где $f_1, ..., f_n \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ - многочлены.

Пусть $J(f)$ – матрица Якоби

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Условие невырожденности отображения f в каждой точке эквивалентно равенству $|J(f)| = 1$ (якобиан должен быть равен ненулевой константе, на которую можно поделить f_1).

Было показано [2, теорема 1.4], что достаточно доказать инъективность отображения f. Тогда сюръективность также имеет место.

В [2, теорема 1.7] также показано, что гипотезу Якобиана достаточно доказать для всех отображений вида

$$f = \left(x_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \right)^3, ..., x_n + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right)^3 \right) \tag{1}$$

для всех n.

Скажем, что $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ точка инъективности отображения f, если для всех $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$ таких, что $(y_1, ..., y_n) \neq (x_1, ..., x_n)$ выполенено $f(x_1, ..., x_n) \neq f(y_1, ..., y_n)$.

Скажем, что в точке $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ нарушается инъективность отображения f, если существует точка $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$ такая, что $(y_1, ..., y_n) \neq (x_1, ..., x_n)$ и $f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n)$.

Отметим, что из соображений инъективности в окрестности множество точек, в которых нарушается инъективность отображения f является открытым.

Сначала докажем следующий условный результат.

Теорема 1. *Пусть некоторая точка $\mathbb{C}^n$ является точкой инъективности отображения f вида (1) и $|J(f)| = 1$ для всех точек $\mathbb{C}^n$. Тогда отображение f – инъективно.*

Для доказательства теоремы нам потребуется следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть f отображение вида (1), удовлетворяющее гипотезе якобиана. Тогда существуют такое положительное $\varepsilon \in \mathbb{R}$, что производная f по любому направлению в точке $b \in \mathbb{C}^n$ имеет норму большую ε.*

Доказательство. i-ая строка матрицы Якоби отображения f в точке $(b_1, ..., b_n)$ состоит из элементов

$$3a_{i1} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_k \right)^2, ..., 3a_{i,i-1} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \right)^2, 1 + 3a_{ii} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \right)^2,$$

$$3a_{i,i+1} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \right)^2, ..., 3a_{in} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \right)^2.$$

Пусть $u = (u_1, ..., u_n), u \in \mathbb{C}^n$ – единичный вектор. Рассмотрим $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=b} = v$.

Тогда i-ый элемент вектора v равен

$$u_i + 3(a_{i1}u_1 + ... + a_{in}u_n)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_k\right)^2. \tag{2}$$

Из невырожденности матрицы Якоби отображения f следует, что норма вектора v положительна для каждого направления u.

Обозначим через $\varepsilon(b)$ минимум нормы вектора v по всем направлениям $u, |u| = 1$. Существование такого минимума и его отличие от нуля следует из компактности $(n-1)$-мерной сферы в $\mathbb{C}^n$.

Пусть $\gamma = inf\ _{b\in\mathbb{C}^n}\varepsilon(b)$.

Предположим, что $\gamma = 0$. Тогда существуют такие последовательности b_n и u_n, предел нормы производной f по направлению u_n в точке b_n равен нулю.

Выбирая сходящуюся подпоследовательность, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} u_k = v.$$

1. Предположим, что последовательность b_k – ограничена.

Выбирая сходящуюся подпоследовательность, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} b_k = b.$$

Тогда в силу непрерывности

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial f}{\partial u_k}\bigg|_{x=b_k} = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x=b} = 0,$$

что невозможно.

2. Предположим, что последовательность b_k – неограничена.

Выбирая сходящуюся подпоследовательность, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \infty, \lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{|b_k|} = d.$$

Выберем i такое, что координата v_i отлична от нуля.

Рассмотрим два случая.

а) Предположим, что $a_{i1}v_1 + ... + a_{in}v_n = 0$ или $a_{i1}b_1 + ... + a_{in}b_n = 0$.

Тогда из формулы (2) следует

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial u_k}\bigg|_{x=b_k}\right| \geqslant v_i,$$

что невозможно в силу предположения $\gamma = 0$.

б) Предположим, что $a_{i1}v_1 + ... + a_{in}v_n \neq 0$ и $a_{i1}b_1 + ... + a_{in}b_n \neq 0$.

Тогда из формулы (2) следует

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial u_k}\bigg|_{x=b_k}\right| = \infty,$$

что невозможно в силу предположения $\gamma = 0$.

Полученные противоречия показывают, что $\gamma > 0$. В качестве ε можно взять любое положительное действительное число меньшее γ.

Обозначим через $B(b, r)$ шар в $\mathbb{C}^n$ с центром b радиуса r.

Лемма 2. *Пусть ε такое как в лемме 1, δ – положительное действительное. Тогда $B(f(x), \delta) \subset f(B(x, \delta/\varepsilon)$.*

Лемма 2 непосредственно следует из леммы 1. Отображение f обратимо в каждой малой окрестности любой точки.

Следовательно, для любого отрезка L длины l, соединяющего две точки в $\mathbb{C}^n$ существует гладкая кривая S, отображающаяся с помощью f на L длины не больше l/ε.

Следствие 1. *Отображение f вида (1), удовлетворяющее гипотезе якобиана, является сюръективным.*

Доказательство теоремы 1. Обозначим через a точку инъективности отображения f.

Предположим, что отображение f не является инъективным.

Тогда существует точка $z \in \mathbb{C}^n$ в которой нарушается инъективность. Соединим точку a с точкой z непрерывной кривой

$$x : [0, 1] \to \mathbb{C}^n, x(0) = a, x(1) = z.$$

Рассмотрим множество $E \subset [0, 1]$ чисел t таких, что в точке $x(t)$ нарушается инъективность.

Пусть $c = \inf$ E. Точка $b = x(c)$ является точкой инъективности, в любой окрестности которой есть точка с нарушением инъективности.

Покажем, что для отображения f вида (1) это невозможно.

Рассмотрим последовательность точек неинъективности b_k таких, что

$$|f(b_k) - f(b)| < \frac{1}{k}.$$

1) Предположим, что последовательность b_k – ограничена.

Выбирая сходящуюся подпоследовательность, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} b_k = d.$$

а) Пусть $d = b$. Получаем противоречие с инъективность отображения f в окрестности.

б) Пусть $d \neq b$.

Из соображений непрерывности получаем равенство $f(b) = f(d)$. Оно противоречит предположению о том, что b является точкой инъективности отображения f.

2) Предположим, что последовательность b_k – неограничена, ε – такое как в лемме (2).

Выберем k такое, что $|b_k| > |b| + \frac{1}{\varepsilon}$.

Рассмотрим шар $B(b_k, \frac{1}{k\varepsilon})$.

Согласно лемме (2), существует точка $b' \in B(b_k, \frac{1}{k\varepsilon})$ такая, что $f(b) = f(b')$.

Справедливы неравенства

$$|b' - b_k| < \frac{1}{k\varepsilon}, |b'| = |b_k - (b_k - b')| > |b_k| - |b_k - b'| > |b| + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{k\varepsilon} > |b|.$$

Получили противоречие с предположением, что b является точкой инъективности.

Полезно обсудить теорему 1 в связи с действительной проблемой Якобиана, которая была решена отрицательно С. Пинчуком [4] для размерности 2.

Основываясь на примере С. Пинчука Е.М. Хубберс [5] построил контрпример для действительных отображений вида (1) в размерности 2033!!.

Результаты теоремы 1 справедливы и для действительного отображения вида (1), удовлетворяющего гипотезе якобиана, но если ни одна точка не является точкой инъективности такого отображения, то теорема не работает.

Тоерема 1 сводит доказательство проблемы Якобиана к системе алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 + \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j\right)^3 = 0, \\ x_2 + \left(\sum_{j=1}^n a_{2j} x_j\right)^3 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n + \left(\sum_{j=1}^n a_{nj} x_j\right)^3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Если система (3) имеет единственное нулевое решение при условии что якобиан отображения f вида (1) равен 1, то гипотеза Якобиана справедлива.

Приведем формулировку еще одного результата достаточного для справедливости гипотезы Якобиана.

Гипотеза о нильпотентном отображении. *Пусть A – квадратная* *матрица порядка n,*

$$J_{n,A}(x_1,...,x_n) = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j\right)^2 a_{11} & ... & \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j\right)^2 a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\right)^2 a_{n1} & ... & \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\right)^2 a_{nn} \end{pmatrix} -$$

матрица нильпотентная при всех комплексных значениях переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$.

Тогда

$$\prod_{k=1}^n J_{n,A}(x_1^k,...,x_n^k) = 0$$

при всех комплексных значениях переменных x_i^k.

Для формулировки и доказательства второго условного результата нам потребуется понятие голоморфной функции и теорема единственности.

Функция дифференцируемая в смысле $\mathbb{C}^n$ в каждой точке некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}^n$ называется голоморфной в точке z_0. Функция, голоморфная в каждой точке некоторого открытого множества $D \subset \mathbb{C}^n$, называется голоморфной на множестве D [6].

Теорема (единственности [6], [7, статья "единственности свойства“]) *Если голоморфная в области D функция $f(z)$ обращается в нуль в некоторой точке z_0 области $D \subset \mathbb{C}^n$ вместе со всеми частными производными*

$$\frac{\partial^k g}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} ... \partial z_n^{k_n}}, k = k_1 + k_2 + ... + k_n, k_j = 0, 1, 2, ..., j = 1, ..., n,$$

то $f(z) \equiv 0$ в D.

Все многочлены из $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ являются голоморфными на всем $\mathbb{C}^n$. Справедливость теоремы единственности для многочленов можно проверить непосредственно вычисляя частные производные.

Теорема 2. *Если гипотеза о нильпотентном отображении справедлива, то система (3) такая, что определитель матрицы Якоби отображения (1) равен 1, имеет единственное нулевое решение.*

Доказательство. Пусть

$$H(x_1,...,x_n) = \left(\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \right)^3, ..., \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right)^3 \right) -$$

полиномиальное отображение.

Легко проверить, что $J(H) = 3J_{n,A}(x_1,...,x_n)$.

Согласно [1], матрица $J(H)$ нильпотентна при всех комплексных значениях переменных $x_1,...,x_n$.

Рассмотрим полиномиальное отображение $H^n(x_1, ..., x_n)$. Выполнено равенство $H^n(0) = 0$.

Согласно гипотезе о нильпотентном отображении, матрица Якоби $J(H^n)$ отображения H^n равна нулю для всех комплексных значений переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Следует учесть, что при дифференцировании сложной функции матрица Якоби вычисляется в разных точках. Например,

$$J(H^2)|_x = J(H)|_x J(H)|_{H(x)}.$$

Из теоремы единственности вытекает равенство $H^n(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0)$ для всех значений переменных $x_1, ..., x_n$.

Систему (3) можно переписать в виде $H(x_1, ..., x_n) = -(x_1, ..., x_n)$.

Последовательно применяя отображение H получим

$$(0, ..., 0) = H(x_1, ..., x_n) = (-1)^n(x_1, ..., x_n).$$

Мы доказали, что система (3) имеет единственное нулевое решение.

Полученный условный результат может быть полезен при построении контрпримера к гипотезе Якобиана. Гипотеза о нильпотентном отображении накладывает некоторые требования на матрицу A. Имеет смысл строить контрпример в виде отображения (1) только, если матрица A не удовлетворяет гипотезе о нильпотентном отображении.

Согласно результату Е.М. Хубберса [8], матрица A для такого контрпримера должна иметь порядок не меньше 8.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bass H., Connell E. H., Wright D. The Jacobian Conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 7, № 2. C. 287—330.

2. Van den Essen A. Polynomial automorphisms and the jacobian cojecture // Progress in Mathematics. Basel: Birkhauser Verlag. 2000. Vol. 190.

3. Артамонов В. А. О решенных и открытых проблемах в теории многочленов // Соросовский образовательный журнал. 2001. Т. 7, № 3. С. 110—113.

4. Pinchuk S. A counterexample to real Jacobian Conjecture // Mathzeitschrift. 1994. Vol. 217. P. 1—4.

5. Van den Essen A. To believe or not to believe: the Jacobian Conjecture // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. 1997. Vol. 55, № 4. P. 283—290.

6. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1976. 400 с.

7. Математическая энциклопедия / ред. И. М. Виноградов. М.: Сов. энциклопедия, 1977-1985. Т. 2: Д-Коо., 1979. 1103 с.

8. Hubbers E.-M. G. M. The Jacobian Conjecture: cubic homogeneous maps in dimension four // Masters Thesis. University of Nijmengen. Toernooiveld. The Nitherlands, 1994.

Оренбургский государственный университет
Поступило 30.09.2013