

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РЕШЕНИЯМИ

© 2005 г. В. А. Цурко

В работе строятся и исследуются разностные схемы для линейных нестационарных краевых задач. Предполагается, что на фиксированных по времени границах коэффициенты имеют разрывы первого рода, допускается наличие и разрыва решений.

Уравнения диффузии с разрывом решения описывают, например, процесс миграции легированных атомов при производстве многослойных полупроводниковых элементов интегральных схем [1, 2]. Такого рода элементы с субмикронными размерами активных областей характерны для современного уровня технологий микроэлектроники. Подробно физико-математические постановки такого рода задач рассмотрены в [3–5], существование и единственность решения краевых задач исследованы в [6]. Большие значения концентраций примесей приводят к возникновению упругих напряжений кристаллической решетки полупроводника. Влияние напряжений на диффузию атомов учитывается в основном уравнении конвективным членом в дивергентной форме [7]. Различные постановки задач, разностные схемы для достаточно гладких задач конвекции-диффузии рассмотрены и исследованы в [8]. Численный метод решения одномерных задач нестационарной диффузии с разрывными решениями без учета конвекции построен и обоснован в [9]. Экономичные разностные схемы для многомерных задач с разрывными коэффициентами без конвективных слагаемых и непрерывным решением исследованы в [10, 11].

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Требуется найти решение уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} + pu \right) + qu + f$$

с начальными и краевыми условиями $u(x, 0) = \psi(x)$, $u(x, t)|_{S_t} = \mu(x, t)$, где S_t – боковая граница области изменения пространственных переменных, коэффициенты $k = k(x) = k(x_1, x_2, \dots, x_m) > 0$, $p = p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $q = q(x) = q(x_1, x_2, \dots, x_m) < 0$ и $f = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ имеют разрывы первого рода. Подробно рассмотрены алгоритмы для одномерных и трехмерных задач. Предполагаем, что в трехмерном случае поверхностью разрыва является плоскость и оси координат выбраны так, что нормаль \mathbf{n} к границе раздела перпендикулярна одной из координатных плоскостей. На границе разрыва коэффициентов поток непрерывен

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + pu \right] = 0,$$

а решение разрывно – отношение предельных значений решения справа и слева вдоль нормали является некоторой величиной κ .

В работе будем использовать обозначения, принятые в [12].

1. Априорные оценки точности для одномерных задач. Предположим, что условия физического процесса позволяют моделировать его следующей задачей. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} + p(x)u \right) + q(x)u + f(x) \quad (1)$$

в области $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 = [0 < x < \xi] \times [0 < t \leq T]$, $G_2 = [\xi < x < 1] \times [0 < t \leq T]$. Здесь $x = \xi$ – точка разрыва коэффициентов и решения, которые в областях G_1 и G_2 обладают

необходимой по ходу изложения гладкостью. Условия сопряжения имеют вид

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial x} + pu \right] = 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \quad \frac{u(\xi - 0, t)}{u(\xi + 0, t)} = \kappa, \quad \kappa > 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Пусть заданы граничные условия первого рода и начальное условие

$$u|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad u|_{x=1} = \varphi_2(t), \quad u(x, 0) = \psi(x). \quad (3)$$

Предположим, что условия разрыва, начальные и краевые для задачи (1)–(3), согласованы. Построим разностную схему для рассматриваемой задачи и алгоритм нахождения приближенного решения. В области G введем неравномерную по x и t сетку $\Omega = \Omega_h \times \Omega_\tau$: $\Omega_h = \{x_i, i = \overline{0, N}, x_0 = 0, x_N = 1, h_i = x_i - x_{i-1}\}$, $\Omega_\tau = \{t_j, j = \overline{0, j_0}, t_0 = 0, t_{j_0} = T, \tau_j = t_j - t_{j-1}\}$. Очевидно, всегда можно построить сетку Ω_h так, чтобы точка $x = \xi$ была ее узлом.

При решении практических задач в случае достаточно гладкого решения целесообразно выбирать в областях G_1 и G_2 равномерные шаги h_1 и h_2 соответственно и, исходя из положения точки $x = \xi$, число узлов находить из предположения $h_1 \approx h_2$. Обоснования разностных схем на неравномерных сетках для данной задачи не носят принципиального характера, и в дальнейшем для наглядности исследования во всей области G сетку по x и t будем считать равномерной, полагая $x_i - x_{i-1} = h, i = \overline{1, N}$, и $t_j - t_{j-1} = \tau, j = \overline{1, j_0}$. Значение x в точке $x = \xi$ обозначим через x_ξ , а соответствующий номер узла – через $N_\xi, 1 < N_\xi < N - 1$.

Введем сетки узлов Ω^1, Ω^2 и $\Omega^{1,2}$, где $\Omega^1 = \Omega_1 \times \Omega_\tau, \Omega^2 = \Omega_2 \times \Omega_\tau, \Omega^{1,2} = \Omega^1 \cup \Omega^2, \Omega_1 = \{x_i = ih, i = \overline{1, N_\xi - 1}\}, \Omega_2 = \{x_i = ih, i = \overline{N_\xi + 1, N - 1}\}$.

Пусть $y = y_i^j$ – приближенное значение точного решения u в узле (x_i, t_j) . Используя, например, интегро-интерполяционный метод, аппроксимируем уравнение (1) неявной разностной схемой

$$y_{\bar{t}} = (ay_{\bar{x}})_x + (p\check{y})_{\bar{x}} + qy + f, \quad (x, t) \in \Omega^{1,2}. \quad (4)$$

На границе раздела областей G_1 и G_2 из условий (2) и (1) получаем

$$0.5 h (y_{\bar{t}}^n + y_{\check{t}}^n)|_{N_\xi} = (ay_{\bar{x}})|_{N_\xi+1} - (ay_{\bar{x}})|_{N_\xi} + 0.5 h ((p\check{y}_{\bar{x}})|_{N_\xi} + (p\check{y})_x|_{N_\xi} + (q^n y^n + q^n y^n + f^n + f^n)|_{N_\xi}), \quad (5)$$

$$y_{N_\xi}^n / y_{N_\xi}^n = \kappa, \quad t \in \Omega_\tau. \quad (6)$$

Здесь $a = a_i = 0.5(k(x_i) + k(x_{i-1})), i = \overline{1, N}, y_{N_\xi}^n, y_{N_\xi}^n$ – приближенные значения точного решения u в узле x_ξ для областей G_1 и G_2 соответственно (аналогичные обозначения приняты и для коэффициентов); $y_{\bar{x}, N_\xi} = (y_{N_\xi}^n - y_{N_\xi-1}^n)/h, y_{\bar{x}, N_\xi+1} = (y_{N_\xi+1}^n - y_{N_\xi}^n)/h$.

Нетрудно видеть, что при достаточной гладкости решения в областях G_1 и G_2 локальная погрешность аппроксимации соотношений (4) и (5) равна $O(h^2 + \tau)$.

Краевые и начальные условия аппроксимируем точно:

$$y_{0,j} = \varphi_1, \quad y_{N,j} = \varphi_2, \quad j = \overline{0, j_0},$$

$$y_{1,0} = \psi_1, \quad y_{2,0} = \psi_2, \dots, \quad y_{N_\xi,0}^n = \psi_{N_\xi}^n, \quad y_{N_\xi,0}^n = \psi_{N_\xi}^n, \dots, \quad y_{N-1,0} = \psi_{N-1}, \quad \psi_{N_\xi}^n / \psi_{N_\xi}^n = \kappa. \quad (7)$$

Для получения удобной для расчетов схемы исключим из системы (4)–(7) одно из неизвестных $y_{N_\xi}^n$ или $y_{N_\xi}^n$. Учитывая соотношение (6), для вектора $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N_\xi-1}, y_{N_\xi}^n, y_{N_\xi+1}, \dots, y_N)$ построим следующую задачу. В приграничных слева к точке x_{N_ξ} узлах имеем

$$y_{\bar{t}, N_\xi-1} = h^{-2} (a_{N_\xi} (\kappa y_{N_\xi}^n - y_{N_\xi-1}^n) - a_{N_\xi-1} (y_{N_\xi-1}^n - y_{N_\xi-2}^n)) + 0.5 h^{-1} ((p\kappa\check{y}^n)|_{N_\xi} - (p\check{y})|_{N_\xi-2}) + (qy + f)|_{N_\xi-1}, \quad t \in \Omega_\tau. \quad (8)$$

Равенство (5) преобразуем к виду

$$0.5 h (\kappa + 1) y_{\bar{t}, N_\xi}^n = h^{-1} (a_{N_\xi+1} (y_{N_\xi+1}^n - y_{N_\xi}^n) - a_{N_\xi} (\kappa y_{N_\xi}^n - y_{N_\xi-1}^n)) +$$

$$+ 0.5((p\ddot{y})|_{N_{\xi+1}} - (p^n \ddot{y}^n)|_{N_{\xi}} + \kappa(p^n \ddot{y}^n)|_{N_{\xi}} - (p\ddot{y})|_{N_{\xi+1}} + h(y^n(q^n + \kappa q^n)|_{N_{\xi}} + f_{N_{\xi}}^n + f_{N_{\xi}}^n)). \quad (9)$$

К полученным соотношениям добавляем условия (7), исключая при этом значение $y_{N_{\xi}}^n$.

Непосредственно находить решение построенной задачи, например, методом немонотонной прогонки нецелесообразно, проблематично получить для него и априорные оценки. Записав разностную схему (4), (7)–(9) в виде системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей и умножив первые N_{ξ} ее столбцов на величину κ , получим систему уравнений

$$Ay^* = F. \quad (10)$$

Для компонент вектора y^* имеем

$$y_i^* = y_i/\kappa, \quad i = \overline{0, N_{\xi} - 1}, \quad y_i^* = y_i, \quad i = \overline{N_{\xi}, N}. \quad (11)$$

Нетрудно проверить, что матрица A имеет доминирующую диагональ при любых значениях τ и h и решение задачи (10) можно находить любым методом прогонки [12]. Оценим разность z между значением y , получаемым по алгоритму (10), (11), и точным решением: $z = u - y$.

Аналогично вектору y^* введем вектор z^* , для которого имеем задачу

$$\frac{\kappa z^* - \check{z}}{\tau} = (\tilde{a}z_{\bar{x}}^*)_x + (\tilde{p}\check{z}^*)_x + \tilde{q}z^* + R_1, \quad (x, t) \in \Omega^1, \quad (12)$$

$$0.5(1 + \kappa)z_i^*|_{N_{\xi}} = h^{-2}(a_{N_{\xi+1}}(z_{N_{\xi+1}}^* - z_{N_{\xi}}^*) - \tilde{a}_{N_{\xi}}(z_{N_{\xi}}^* - z_{N_{\xi-1}}^*)) + 0.5((p\check{z}^*)_{\bar{x}}|_{N_{\xi+1}} + (\tilde{p}\check{z}^*)_{\bar{x}}|_{N_{\xi}} + (z^*(\tilde{q} + q))|_{N_{\xi}}) + R_{N_{\xi}}, \quad (13)$$

$$\frac{z^* - \check{z}}{\tau} = (az_{\bar{x}}^*)_x + (p\check{z}^*)_x + qz^* + R_2, \quad (x, t) \in \Omega^2. \quad (14)$$

Здесь $\tilde{a}_i = \kappa a_i$, $i = \overline{1, N_{\xi}}$; $\tilde{q}_i = \kappa q_i$, $i = \overline{1, N_{\xi} + 1}$; $\tilde{p}_i = \kappa p_i$, $i = \overline{1, N_{\xi}}$; $R_1 \leq M_1(h^2 + \tau)$, $R_2 \leq M_2(h^2 + \tau)$, $R_{N_{\xi}} \leq M_{N_{\xi}}(h + \tau)$; $M_1, M_2, M_{N_{\xi}}$ – константы; $z_0 = z_N = 0$, $t \in \omega_{\tau}$. Для получения оценок точности воспользуемся методом энергетических неравенств [12]. Умножим каждое из уравнений (12)–(14) на соответствующее $2\tau h \kappa z_i^*$, $i = \overline{1, N - 1}$, и сложим полученные соотношения. Применив формулы разностного дифференцирования произведения, первую разностную формулу Грина, ε -неравенство, получим

$$h \left(\sum_{i=1}^{N_{\xi}-1} \left((1 - \varepsilon)\tau^2 \left(\frac{\kappa z_i^* - \check{z}_i}{\tau} \right)^2 + \kappa^2 (z_i^*)^2 \right) + \sum_{i=N_{\xi}+1}^{N-1} \left((1 - \varepsilon)\tau^2 \kappa \left(\frac{z_i^* - \check{z}_i}{\tau} \right)^2 + \kappa (z_i^*)^2 \right) \right) + \kappa(\kappa + 1)h \left((1 - \varepsilon)\tau^2 \left(\frac{z^* - \check{z}}{\tau} \right)^2 + (z^*)^2 \right) \Big|_{N_{\xi}} + \|z^*\|_1^2 \leq h \left(\sum_{i=1}^{N_{\xi}-1} \check{z}_i^2 + \sum_{N_{\xi}+1}^{N-1} \kappa \check{z}_i^2 + \kappa(\kappa + 1)\check{z}_{N_{\xi}}^2 \right) + (1 + \tau c_1)\|z^*\|_1^2 + \tau(c_2\|\check{z}\|^2 + R). \quad (15)$$

Здесь $1 - \varepsilon \geq 0$, $\|z\|_1^2 = 2\tau(a_{\kappa}, z_{\bar{x}}^2)$, $a_{\kappa i} = \begin{cases} \kappa \tilde{a}_i, & i = \overline{1, N_{\xi}}, \\ \kappa a_i, & i = \overline{N_{\xi} + 1, N}, \end{cases}$ $R = O(h^2 + \tau)^2$, c_1, c_2 – константы.

Обозначив

$$\tilde{z} = (0, z_1, z_2, \dots, z_{N_{\xi}-1}, (\kappa(\kappa + 1))^{1/2} z_{N_{\xi}}, \kappa^{1/2} z_{N_{\xi}+1}, \dots, \kappa^{1/2} z_{N-1}, 0),$$

из неравенства (15) получим рекуррентное соотношение

$$\|z^*\|_1^2 + \|\tilde{z}\|^2 \leq (1 + \tau C)(\|z^*\|_1^2 + \|\tilde{z}\|^2) + \tau R,$$

где C – положительная величина, не зависящая от τ и h . Из последнего неравенства следует, что верна

Теорема 1. Для решения задачи (4), (7)–(9), найденного по алгоритму (10), (11) при любых τ и h , $j = \overline{1, j_0}$, имеет место оценка точности $\|z\| \leq M(h^2 + \tau)$, $M = \text{const}$.

2. Устойчивость локально-одномерных схем для трехмерных задач. Пусть $G = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$ есть трехмерный параллелепипед с границей γ , $\overline{G} = G \cup \gamma$. В цилиндре $Q_T = \overline{G} \times [0 \leq t \leq T]$ рассмотрим уравнение диффузии-конвекции, полагая для наглядности изложения численного метода $q = f \equiv 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + p(x)u \right) \tag{16}$$

с условиями

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \overline{G}, \quad u(x, t)|_{S_T} = \mu(x, t), \quad S_T = \gamma \times [0 < t \leq T]. \tag{17}$$

Предположим, что разрыв коэффициентов происходит вдоль плоскости перпендикулярной оси x_3 , которая пересекает ее в точке $x_3 = \xi$, и на границе выполняются условия сопряжения

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial x_3} + pu \right] \Big|_{x_3=\xi} = 0, \quad \frac{u(x_1, x_2, \xi - 0, t)}{u(x_1, x_2, \xi + 0, t)} = \kappa. \tag{18}$$

Пусть задача (16)–(18) имеет единственное решение в области Q_T , обладающее требуемыми по ходу изложения непрерывными ограниченными производными в областях непрерывного изменения коэффициентов $k(x)$ и $p(x)$ – множествах Q_T^1 и Q_T^2 , $Q_T^m = G_m \times [0 \leq t \leq T]$, $m = 1, 2$, $G_1 = [0 \leq x_1 \leq l_1] \times [0 \leq x_2 \leq l_2] \times [0 \leq x_3 < \xi]$, $G_2 = [0 \leq x_1 \leq l_1] \times [0 \leq x_2 \leq l_2] \times [\xi < x_3 \leq l_3]$.

На отрезке $[0 \leq t \leq T]$, как и в п. 1, введем равномерную сетку Ω_τ . Поставим задаче (16)–(18) в соответствие цепочку одномерных задач

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = L_\alpha v_\alpha, \quad x \in G, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = \overline{1, j_0}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{19}$$

$$L_\alpha v_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x) \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + p(x)v \right),$$

с условиями

$$v_1(x, 0) = u_0(x), \quad v_\alpha(x, t_{j-1}) = v_{\alpha-1}(x, t_j), \quad \alpha = 2, 3, \quad j = \overline{1, j_0}, \tag{20}$$

$$v_1(x, t_j) = v_3(x, t_j), \quad j = \overline{1, j_0 - 1}, \quad v_\alpha(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \gamma, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\left[k \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + pv_3 \right] \Big|_{x_3=\xi} = 0, \quad \frac{v_3(x_1, x_2, \xi - 0, t)}{v_3(x_1, x_2, \xi + 0, t)} = \kappa. \tag{21}$$

За решение задачи (16)–(18) принимаются значения функции $v_3(x, t)$. Построенная система уравнений (19)–(21) аппроксимирует задачу (16)–(18) в суммарном смысле [12] с первым порядком по τ .

Введем в \overline{G} пространственную сетку ω_h следующим образом:

$$\omega_h = \{ \text{при } \alpha = 1, 2 \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \quad h_\alpha N_\alpha = l_\alpha;$$

$$\text{при } \alpha = 3 \quad x_3^{(i_3)} = i_3 h_3, \quad i_3 = \overline{0, N_3}, \quad h_3 N_\xi = \xi, \quad h_3(N_3 - N_\xi) = l_3 - \xi, \quad 1 < N_\xi < N_3 - 1 \}.$$

Существенным моментом при построении сеток для задач с разрывными решениями является требование принадлежности узлов сетки границе раздела областей. Для поставленной задачи

этого достичь нетрудно, если ввести неравномерные шаги по направлению x_3 . Исследование разностных схем при этом не усложнится.

На сетке $\Omega_{\tau,h} = \Omega_{\tau} \times \omega_h$ аппроксимируем соотношения (19)–(21) для $\alpha = 1, 2$ неявными разностными выражениями

$$\frac{y_{(\alpha)} - \check{y}_{(\alpha)}}{\tau} = (a_{(\alpha)}(x)y_{(\alpha)\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}} + (py_{(\alpha)})_{x_{\alpha}}, \quad i_{\beta} = \overline{1, N_{\beta} - 1}, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad j = \overline{0, j_0 - 1}. \quad (22)$$

Коэффициенты $a_{(\alpha)}$ определяются при помощи линейных шаблонных функционалов [12], которые обеспечивают для каждой внутренней точки сетки ω_h выполнение условий

$$|(a_{(\alpha)}(x)u_{(\alpha)\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}} + (pu)_{x_{\alpha}} - L_{(\alpha)}(u)| \leq M_{\alpha}h_{\alpha}^2, \quad \alpha = 1, 2, \quad M_{\alpha} = \text{const}.$$

Для узлов сетки ω_h , соответствующих значению $x_3 = \xi$, расчеты для уравнений (22), $\alpha = 1, 2$, проводятся дважды: для различных значений $k(x)$ и $p(x)$ соответственно для областей G_1 и G_2 .

Соотношения (22) дополним следующими краевыми и начальными условиями:

$$y_{(\alpha)}^j = \mu(x, t^j), \quad \alpha = 1, 2, \quad y_{(1)}^0 = u_0(x), \quad y_{(2)}^{j-1} = y_{(1)}^j, \quad y_{(1)}^{j-1} = y_{(3)}^j, \quad j = \overline{1, j_0}. \quad (23)$$

С учетом краевых условий на сетке ω_h для каждого слоя $j = \overline{1, j_0}$ имеем $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1) \times (N_3 + 2)$ значений $y_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$. При $\alpha = 3$ в узлах $\Omega_{\tau,h}$ для $i_3 = \overline{1, N_{\xi} - 2}$ и $i_3 = \overline{N_{\xi} + 1, N - 1}$ построим следующее уравнение:

$$\frac{y_{(3)} - \check{y}_{(3)}}{\tau} = (a_{(3)}(x)y_{(3)\bar{x}_3})_{x_3} + (py_{(3)})_{x_3}, \quad i_{\beta} = \overline{1, N_{\beta} - 1}, \quad \beta = 1, 2, \quad j = \overline{0, j_0 - 1}. \quad (24)$$

В узлах сетки ω_h для $i_3 = N_{\xi} - 1$ и $i_{\beta} = \overline{1, N_{\beta} - 1}$, $\beta = 1, 2$, с учетом разрыва решения по аналогии с одномерным случаем получаем

$$\begin{aligned} \frac{y_{(3)} - \check{y}_{(3)}}{\tau} \Big|_{N_{\xi}-1} &= h_3^{-2} (a_{(3)N_{\xi}} (\kappa y_{(3)N_{\xi}}^n - y_{N_{\xi}-1}) - a_{(3)N_{\xi}-1} (y_{(3)N_{\xi}-1} - y_{(3)N_{\xi}-2})) + \\ &+ 0.5h_3^{-1} ((p\kappa y^n)|_{N_{\xi}} - (py)|_{N_{\xi}-2}), \quad t \in \Omega_{\tau}. \end{aligned} \quad (25)$$

На границе раздела областей, принимая во внимание, что в отличие от одномерного случая $\check{y}_{(3)G_1}/\check{y}_{(3)G_2} \neq \kappa$, строится следующее разностное уравнение:

$$\begin{aligned} 0.5h_3 \left(\frac{(\kappa + 1)y_{(3)}^n - \check{y}_{(3)G_1} - \check{y}_{(3)G_2}}{\tau} \right) \Big|_{N_{\xi}} &= h_3^{-1} (a_{(3)N_{\xi}+1} (y_{(3)N_{\xi}+1} - y_{(3)N_{\xi}}^n) - \\ &- a_{(3)N_{\xi}} (\kappa y_{(3)N_{\xi}}^n - y_{(3)N_{\xi}-1}) + 0.5((py)|_{N_{\xi}-1} - (p^n y^n)|_{N_{\xi}} + \kappa (p^n y^n)|_{N_{\xi}} - (py)|_{N_{\xi}-1})). \end{aligned} \quad (26)$$

В формулах (24)–(26) полагаем $\check{y}_{(3)} = y_{(2)}$, $\check{y}_{(3)G_m}$, $m = 1, 2$, – значения $y_{(2)}$, полученные в одних и тех же узлах, принадлежащих плоскости раздела областей G_1 и G_2 , $a_{(3)} = a_{(3)}(x)$ определяется аналогично $a_{(\alpha)}(x)$, $\alpha = 1, 2$. Граничные условия для уравнений (24)–(26) имеют вид

$$y_{(3)}(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \gamma, \quad t \in \Omega_{\tau}.$$

Значения $y_{(3)}$ будем называть приближенным решением задачи (16)–(18).

Определение решений задач (22) осуществляется методом немонотонной прогонки либо при достаточно малых τ правой или левой прогонкой.

Для нахождения величин $y_{(3)}$, как и в одномерном случае, перейдем к разностной функции $y_{(3)}^*$, для которой получаем задачу

$$B_1 y_{(3)}^* = (b(x)y_{(3)\bar{x}_3})_{x_3} + B_2 y_{(3)}^*, \quad (x, t) \in \Omega_{\tau,h}, \quad (27)$$

где разностная функция $b(x)$ определяется аналогично функции $a_{\kappa}(x)$,

$$y_{i_1, i_2, i_3}^* = y_{i_1, i_2, i_3} / \kappa \quad \text{для} \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{0, N_{\xi} - 1}, \tag{28}$$

$$y_{i_1, i_2, i_3}^* = y_{i_1, i_2, i_3} \quad \text{для} \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{N_{\xi}, N}.$$

Для внутренних узлов области G_1 разностные операторы B_1 и B_2 имеют вид $B_1 y_{(3)}^* = (\kappa y^* - \check{y}) / \tau$, $B_2 y_{(3)}^* = (\kappa p y_{(3)}^*)_{x_3}^{\circ}$; для узлов, соответствующих $i_{\alpha} = \overline{1, N_{\alpha} - 1}$ и $i_3 = N_{\xi}$, определяем

$$B_1 y_{(3)}^* = 0.5((\kappa + 1)y_{(3)}^* - \check{y}_{(3)G_1} - \check{y}_{(3)G_2}) / \tau, \quad B_2 y_{(3)}^* = 0.5((p y_{(3)}^*)_{\bar{x}|N_{\xi}+1} + (\kappa p y_{(3)}^*)_{\bar{x}|N_{\xi}});$$

для внутренних узлов области G_2 имеем $B_1 y_{(3)}^* = (y_{(3)}^* - \check{y}) / \tau$, $B_2 y_{(3)}^* = (p y_{(3)}^*)_{x_3}^{\circ}$. Решение задачи (27) также находится одним из видов прогонки.

Покажем устойчивость рассматриваемого метода в предположении $\mu(x, t) \equiv 0$. Умножим скалярно уравнения (22) на соответствующее $\tau y_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, а уравнения (27) на $\kappa y_{(3)}^*$ и просуммируем полученные соотношения.

Применяя аппарат исследования аддитивных разностных схем [12] и вводя норму евклидова типа

$$\|y\|_*^2 = h_1 h_2 h_3 \left(\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \left(\sum_{i_3=1}^{N_{\xi}-1} y_{i_1, i_2, i_3}^2 + \sum_{i_3=N_{\xi}+1}^{N_3-1} \kappa y_{i_1, i_2, i_3}^2 + \kappa(1 + \kappa) y_{i_1, i_2, N_{\xi}}^2 \right) \right),$$

для разностной функции $y_{(3)}$ при достаточно малых τ получаем рекуррентное соотношение

$$\|y_{(3)}\|_*^2 \leq (1 + \tau c^*) \|\check{y}_{(3)}\|_*^2, \quad c^* = \text{const}.$$

Следовательно, верна

Теорема 2. При достаточно малых τ решение локально-одномерной схемы (22)–(26), найденное по соотношениям (22), (23), (27), (28), безусловно устойчиво по начальным данным.

Ограничение на шаг по времени связано с оценкой слагаемых вида $\tau(y_{x_{\alpha}}, y)$, $\alpha = 1, 2, 3$. При $p \equiv 0$ рассматриваемый алгоритм абсолютно устойчив.

При достаточной гладкости коэффициентов и решения в областях непрерывного изменения $k(x)$ и $p(x)$ с учетом суммарной аппроксимации построенных разностных схем и с помощью метода энергетических неравенств показывается, что имеет место

Теорема 3. При достаточно малых τ для погрешности решения разностной схемы (22)–(26), определенного из системы уравнений (22), (23), (27), (28) для $j = \overline{1, j_0}$, справедлива оценка

$$\left(h_1 h_2 h_3 \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \sum_{i_3=0}^{N_3} (y_{(3)} - u)^2 |_{i_1, i_2, i_3} \right)^{1/2} \leq \tilde{c} (h^2 + \sqrt{\tau}),$$

\tilde{c} – постоянная величина, не зависящая от h и τ .

Если разрыв коэффициентов и решения в случае двумерной задачи проходит, например, вдоль кривой линии, то, применяя неравномерные шаги по двум направлениям с обязательным попаданием узлов сетки на границу раздела, аналогично рассмотренному выше случаю можно построить алгоритм численного решения и провести обоснование устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brecl K., Furlan J.* // Technical Proceeding of the 2000 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems. 2000. P. 376–379.
2. Science and Technology of Millimetre Wave Components and Devoces (Electrocomponent Science Monographs) / Ed. Lyubchenko V.E. London, 2002.
3. *Садовников А.Д., Черняев А.В.* // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 8. С. 60–69.
4. *Величко О.И., Комаров Ф.Ф., Цурко В.А. и др.* // Мат. моделирование. 1997. Т. 9. № 5. С. 68–76.
5. *Величко О.И., Комаров Ф.Ф., Цурко В.А. и др.* // ИФЖ. 1997. Т. 70. № 6. С. 1025–1032.
6. *Корзюк В.И., Чеб Е.С.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 8. С. 1396–1404.
7. *Law M.E., Gilmer G.H., Jarais M.* // MRS Bulletin. 2000. № 25. P. 45–50.
8. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М., 1999.
9. *Цурко В.А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 7. С. 986–992.
10. *Фрязинов И.В.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1973. Т. 13. № 1. С. 80–91.
11. *Цурко В.А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 6. С. 142–146.
12. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1977.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
08.12.2003 г.