В. М. Курбанов, О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора. I, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 4, 464–478

https://www.mathnet.ru/de11257

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 464–478

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И КРИТЕРИЙ БЕССЕЛЕВОСТИ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА. I

© 2005 г. В. М. Курбанов

В ряде работ, в частности в [1–8], исследовался вопрос бесселевости систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов, при этом всюду по операторам высокого порядка накладывалось требование равномерной ограниченности ранга собственных значений или же условие “сумма единиц” (см. ниже (6)).

В настоящей работе доказываем, что выполнение условия (6) является необходимым для бесселевости систем нормированных корневых функций дифференциального оператора, получаем точную оценку для числа собственных значений и уточняем критерий бесселевости, сформулированный в работе [8].

1. Основные понятия. На произвольном конечном интервале $G=(a,b)$ вещественной оси рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$Lu=u^{(n)}+P_1(x)u^{(n-1)}+\ldots+P_n(x)u,\quad n\ge 2, \tag{1}$$

где $P_l(x)\in L_1(G)$, $l=\overline{1,n}$.

Обозначим через D класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно на замкнутом интервале $\overline{G}$.

Следуя работам В.А. Ильина, будем исходить из обобщенной трактовки корневых функций оператора L, допускающей рассмотрение совершенно произвольных краевых условий [9].

Рассмотрим произвольную систему $\{u_k(x)\}$, состоящую из корневых функций оператора (1). Пусть $\{\lambda_k\}$ – соответствующая система собственных значений этого оператора. Потребуем, чтобы вместе с каждой присоединенной функцией порядка $s\ge 1$ система $\{u_k(x)\}$ содержала также соответствующие ей собственную функцию и все присоединенные функции порядка, меньшего s. Это означает, что каждый элемент $u_k(x)$ системы $\{u_k(x)\}$ не равен тождественно нулю, принадлежит классу D и почти всюду в G удовлетворяет либо уравнению $Lu_k+\lambda_k u_k=0$ (в этом случае $u_k(x)$ – собственная функция, λ_k – собственное значение), либо уравнению $Lu_k+\lambda_k u_k=u_{\nu(k)}$, где номер $\nu(k)$ однозначно определяется номером k и $\nu(k_1)\ne\nu(k_2)$ при $k_1\ne k_2$ (в этом случае $\lambda_k=\lambda_{\nu(k)}$, $u_k(x)$ – присоединенная функция порядка $r\ge 1$, $u_{\nu(k)}$ – присоединенная функция порядка $r-1$) (см. [10]).

Наряду с собственным значением λ_k будем использовать спектральный параметр μ_k, который, следуя В.А. Ильину, определим следующим образом: $\mu_k=[(-1)^{n/2}(-\lambda_k)]^{1/n}$, если n четно, $\mu_k=(-i\lambda_k)^{1/n}$, если n нечетно и $\operatorname{Im}\lambda_k\ge 0$, $\mu_k=(i\lambda_k)^{1/n}$, если n нечетно и $\operatorname{Im}\lambda_k<0$, где $[\rho\exp(i\varphi)]^{1/n}=\rho^{1/n}\exp(i\varphi/n)$, $-\pi/2<\varphi\le 3\pi/2$.

Наивысший порядок корневых функций, отвечающих заданной собственной функции $u_k(x)$, назовем рангом этой собственной функции и обозначим его через γ_k.

Будем обозначать через $\|f\|_{p,E}$ норму функции $f(x)\in L_p(E)$, $p\ge 1$. Если $E=G$, то пишем $\|f\|_p$. Будем говорить, что система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ бесселева, если существует постоянная $\beta>0$ такая, что для произвольной функции $f(x)\in L_2(G)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(u_k,f)|^2\le\beta\|f\|_2^2,\quad (u_k,f)=\int\limits_G u_k(x)\overline{f(x)}\,dx.$$

2. Необходимые условия бесселевости.

Теорема 1. *Пусть* $P_1(x) \in L_2(G)$, $P_l(x) \in L_1(G)$, $l = \overline{2,n}$. *Тогда для бесселевости системы* $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ *необходимо*

$$\sum_{|\rho_k|\le\tau} |u_k(x)|^2\|u_k\|_2^{-2} \le \mathrm{const}\cdot(1+\tau) \quad \forall\tau\ge 0, \tag{2}$$

где $x \in \bar{G}$, $\rho_k = (-\lambda_k)^{1/n}$, const *не зависит от* x, *а суммирование проводится по собственным функциям.*

В теореме 1 и далее подразумеваем, что $[\rho\exp(i\varphi)]^{1/n} = \rho^{1/n}\exp(i\varphi/n)$, $-\pi < \varphi \le \pi$. Из теоремы 1 следует, что для бесселевости системы $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ необходимо, чтобы

$$\sum_{|\rho_k|\le\tau} 1 \le \mathrm{const}\cdot(1+\tau) \quad \forall\tau\ge 0,$$

где суммирование ведется только по собственным функциям.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 выполняется антиаприорная оценка*

$$\|u_{\nu(k)}\|_2 \le \mathrm{const}\cdot(1+|\rho_k|)^{n-1/2}\|u_k\|_2, \tag{3}$$

где const *не зависит от порядка присоединенных функций. Тогда для бесселевости системы* $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ *необходимо выполнение неравенства (2), причем суммирование проводится по всем корневым функциям.*

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 2 для бесселевости системы* $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ *необходимо, чтобы*

$$\sum_{|\rho_k|\le\tau} \gamma_k \le \mathrm{const}\cdot(1+\tau) \quad \forall\tau\ge 0. \tag{4}$$

Из неравенства (4) следует, что ранг каждой собственной функции конечен и последовательность $\{\rho_k\}$ не имеет конечных точек сгущения.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1, условия Карлемана* $|\operatorname{Im}\mu_k| \le \mathrm{const}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *и антиаприорная оценка*

$$\|u_{\nu(k)}\|_2 \le \mathrm{const}\cdot(1+|\mu_k|)^{n-1}\|u_k\|_2. \tag{5}$$

Тогда для того чтобы система $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ *удовлетворяла неравенству Бесселя, необходимо, чтобы*

$$\sum_{\tau\le\operatorname{Re}\mu_k\le\tau+1} 1 \le \mathrm{const}, \tag{6}$$

$$\sum_{|\mu_k|\le\tau} |u_k(x)|^2\|u_k\|_2^{-2} \le \mathrm{const}\cdot(1+\tau) \quad \forall\tau\ge 0, \quad x\in\bar{G}, \tag{7}$$

где суммирования проводятся по всем корневым функциям.

Из неравенства (6) в свою очередь следует, что ранг собственных функций равномерно ограничен, т.е. $\sup\gamma_k < \infty$.

Отметим, что при выполнении условий (5), (6) и условия Карлемана необходимость неравенства (7) для бесселевости системы $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ установлена впервые в работе [4] для оператора четвертого порядка. А при условии равномерной ограниченности ранга собственных функций, а также при выполнении условия Карлемана и антиаприорной оценки (5) необходимость неравенств (6) и (7) для бесселевости системы $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ установлена в работах [6, 11] для оператора произвольного четного порядка с гладкими коэффициентами $P_l(x) \in$ $\in W_1^{(n-l)}(G)$, $l = \overline{1,n}$.

Теорема 4. *Пусть $n=2$, $P_1(x)\in L_2(G)$, $P_2(x)\in L_1(G)$. Тогда для бесселевости системы $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ необходимо выполнение неравенств (7) и*

$$\sum_{\tau\le \operatorname{Re}\mu_k\le\tau+1} 1 \le \mathrm{const}\cdot(1+\sup_{\tau\le \operatorname{Re}\mu_k\le\tau+1}|\operatorname{Im}\mu_k|), \tag{8}$$

где $\tau\in R$, $x\in\bar G$, суммирования проводятся по собственным функциям. Если ранг собственных функций равномерно ограничен, то суммирование в (8) проводится по всем корневым функциям.

Теорема 5. *Пусть $n=2$, $P_1(x)\in L_2(G)$, $P_2(x)\in L_1(G)$ и выполняется априорная оценка*

$$\|u_{\nu(k)}\|_2\le \mathrm{const}\cdot(1+|\mu_k|)(1+|\operatorname{Im}\mu_k|)^{1/2}\|u_k\|_2. \tag{9}$$

Тогда для бесселевости системы $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ необходимо выполнение неравенств (7) и (8), причем суммирования проводятся по всем корневым функциям.

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 3 неравенства (4), (6) являются необходимыми для бесселевости системы $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$. При этом в случае $n=2$ в неравенстве (6) параметр τ – произвольное действительное число.*

Отметим, что при выполнении условия Карлемана и равномерной ограниченности ранга собственных функций необходимость и достаточность условия (6) для бесселевости системы $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ доказаны В.А. Ильиным в [1, 2] для оператора второго порядка с коэффициентами $P_1(x)\equiv 0$, $P_2(x)\in L_1(G)$. Следует отметить также работы [12, 13], в которых получены необходимые условия более грубого характера, чем (4), (8).

3. Критерий бесселевости и безусловной базисности.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 1, (5) и*

$$|\operatorname{Im}\mu_k|\le \mathrm{const},\quad k=1,2,\ldots \tag{10}$$

Тогда для бесселевости системы $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ необходимо и достаточно выполнения условий (6) и (7).

Отметим, что теорема 6 уточняет критерий бесселевости, сформулированный в работе [8], обобщает и усиливает результаты работ [4, 6, 7, 11]: в работе [4] критерий бесселевости установлен для оператора четвертого порядка при выполнении условия (6), а в работе [11] – для дифференциального оператора произвольного четного порядка с гладкими коэффициентами $P_l(x)\in W_1^{(n-l)}(G)$, $l=\overline{1,n}$, при дополнительном предположении равномерной ограниченности ранга собственных функций; в работе [7] доказаны две теоремы о бесселевости системы $\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\}$ для оператора (1) произвольного порядка, первая из которых (см. теорему 1 и замечание 2) совпадает только с достаточной частью теоремы 6 настоящей работы, а во второй теореме (см. теорему 2 и замечание 2) доказана необходимость условия (6) для бесселевости при дополнительных условиях (7), $\|u_k\|_\infty\le\mathrm{const}\cdot\|u_k\|_2$, $k=1,2,\ldots$, и равномерной ограниченности ранга собственных функций.

Следствием теоремы 6 является следующий критерий безусловной базисности.

Теорема 7. *Пусть $P_l(x)\in W_1^{n-l}(G)$, $l=\overline{1,n}$, $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ – пара биортогонально сопряженных в $L_2(G)$ полных систем корневых функций операторов L и L^* (L^* – формально сопряженный оператор к L) соответственно, выполнены условия (5), (10) и $\|v_{\alpha(k)}\|_2\le$ $\le\mathrm{const}\cdot(1+|\mu_k|)^{n-1}\|v_k\|_2$, где $v_{\alpha(k)}$ – предшествующая v_k корневая функция в цепочке корневых функций, соответствующих собственному значению $\overline{\lambda_k}$. Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ каждой из систем необходимо и достаточно выполнения условия (6), условия типа (7) для каждой из систем и неравенства*

$$\|u_k\|_2\|v_k\|_2\le\mathrm{const},\quad k=1,2,\ldots \tag{11}$$

Отметим, что эта теорема для оператора четного порядка доказана в работах [1, 2, 4, 11]. Критерий безусловной базисности для системы корневых функций оператора произвольного порядка сформулирован в двух теоремах работы [7], в первой из них (теорема 4) условия

(6) и (7) также входят в число требуемых условий и необходимыми и достаточными условиями базисности являются (11), а во второй теореме (теорема 5) условия (7), $\|u_k\|_\infty \le \text{const}$, $k = 1, 2, \ldots$, и равномерной ограниченности ранга собственных функций также входят в число требуемых условий и необходимыми и достаточными условиями базисности являются (6) и (11).

Отметим также работы [14–20], в которых изучены вопросы, тесно связанные с исследуемой в настоящей работе темой.

4. Формулы сдвига. Доказательства сформулированных результатов опираются на следующие леммы.

Лемма 1. *Для корневых функций оператора (1) справедлива формула сдвига*

$$f(\rho_k t)t^s u_k^{(s)}(x) = \sum_{h=1}^{n} f_{hs}(\rho_k t)\biggl[u_k(x+ht)+\sum_{l=1}^{n}\int\limits_x^{x+ht}(x+ht-\tau)^{n-1}g(\rho_k(x+ht-\tau))P_l(\tau)u_k^{(n-l)}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_x^{x+ht}(x+ht-\tau)^{n-1}g(\rho_k(x+ht-\tau))u_{\nu(k)}(\tau)\,d\tau\biggr], \tag{12}$$

где $0 \le s \le n-1$, $[x, x+nt] \subset \bar{G}$, $\rho_k = \sqrt[n]{-\lambda_k}$, $f(z)$, $f_{hs}(z)$, $g(z)$ *– целые функции, причем* $f(z) \ne 0$ *при* $|z| < \pi$. *При* $s = 0$

$$u_k(x) = \sum_{h=1}^{n} f_h(\rho_k t)\biggl[u_k(x+ht)+\sum_{l=1}^{n}\int\limits_x^{x+ht}(x+ht-\tau)^{n-1}g(\rho_k(x+ht-\tau))P_l(\tau)u_k^{(n-l)}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_x^{x+ht}(x+ht-\tau)^{n-1}g(\rho_k(x+ht-\tau))u_{\nu(k)}(\tau)\,d\tau\biggr], \tag{13}$$

где $f_h(z)$, $h = \overline{1,n}$, *– аналитические функции в круге* $|z| < \pi$, *причем*

$$|f_h(z_1) - f_h(z_2)| \le C_0|z_1 - z_2|, \quad |z_1|, |z_2| \le 1, \tag{14}$$

где $C_0 \ge 1$.

При доказательстве леммы нам понадобится формула сдвига для собственных функций оператора $L_0 y = y^{(n)}$, доказанная в работе [21].

Лемма 2. *Для собственных функций* $y_{k0}(x)$ *оператора* L_0 *справедлива формула*

$$f(\rho_{k0}t)t^s y_{k0}^{(s)}(x) = \sum_{h=1}^{n} f_{hs}(\rho_{k0}t)y_{k0}(x+ht), \tag{12$'$}$$

где $0 \le s \le n-1$, $[x, x+ht] \subset \overline{G}$, $\rho_{k0} = \sqrt[n]{-\lambda_{k0}}$, λ_{k0} *– собственное значение,* $f(z)$, $f_{hs}(z)$ *– целые функции, причем* $f(z) \ne 0$ *при* $|z| < \pi$. *При* $s = 0$

$$y_{k0}(x) = \sum_{h=1}^{n} f_h(\rho_{k0}t)y_{k0}(x+ht), \tag{13$'$}$$

где $f_h(z)$, $h = \overline{1,n}$, *– аналитические функции в круге* $|z| < \pi$, *причем выполняется оценка (14).*

Доказательство леммы 1. Введем обозначения:

$$y_k(z) = u_k(z) + \int\limits_x^{z}\Phi(\rho_k, z-\tau)\{M(u_k(\tau)) - u_{\nu(k)}(\tau)\}\,d\tau,$$

$$\Phi(\rho_k,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{n\lambda_k}\sum\limits_{j=1}^{n}\rho_{jk}\exp(\rho_{jk}\xi) & \text{при}\quad \lambda_k\neq 0,\\ \xi^{n-1}/(n-1) & \text{при}\quad \lambda_k=0,\end{cases}\qquad M(u_k(\tau))=\sum_{l=1}^{n}P_l(\tau)u_k^{(n-l)}(\tau),$$

где ρ_{jk}, $j=\overline{1,n}$, – различные корни n-й степени из числа $-\lambda_k$, $x\in\overline{G}$ – произвольная фиксированная точка.

Учитывая, что $\Phi_z^{(r-1)}(\rho_k,0)=0$ при $0\le r\le n-1$, $\Phi_z^{(n-1)}(\rho_k,0)=1$, имеем

$$y_k^{(n)}(z)=u_k^{(n)}(z)+M(u_k(z))-u_{\nu(k)}(z)+\int\limits_x^z\Phi_z^{(n)}(\rho_k,z-\tau)\{M(u_k(\tau))-u_{\nu(k)}(\tau)\}\,d\tau.$$

Отсюда в силу равенства $\Phi_z^{(n)}(\rho_k,z)+\lambda_k\Phi(\rho_k,z)=0$ находим, что

$$y_k^{(n)}(z)+\lambda_k y_k(z)=u_k^{(n)}(z)+M(u_k(z))-u_{\nu(k)}(z)+\lambda_k u_k(z)+$$

$$+\int\limits_x^z[\Phi_z^{(n)}(\rho_k,z-\tau)+\lambda_k\Phi(\rho_k,z-\tau)]\{M(u_k(\tau))-u_{\nu(k)}(\tau)\}\,d\tau=0,$$

т.е. функции $y_k(z)$ являются собственными функциями оператора $L_0y=y^{(n)}$.

Применяя формулу $(12')$ для собственной функции $y_k(z)$, получаем

$$\left(u_k^{(s)}(z)+\int\limits_x^z\Phi_z^{(s)}(\rho_k,z-\tau)\{M(u_k(\tau))-u_{\nu(k)}(\tau)\}\,d\tau\right)t^sf(\rho_kt)=$$

$$=\sum_{h=1}^{n}f_{hs}(\rho_kt)\left\{u_k(z+ht)+\int\limits_x^{z+ht}\Phi(\rho_k,z+ht-\tau)\{M(u_k(\tau))-u_{\nu(k)}(\tau)\}\,d\tau\right\},\qquad s=\overline{0,n-1},$$

откуда с учетом равенства $\Phi(\rho_k,z)=z^{n-1}g(\rho_kz)$ (см. [21]) предельным переходом при $z\to x$ получим формулу (12). А для доказательства формулы (13) достаточно записать для $y_k(z)$ формулу $(13')$ и перейти к пределу при $z\to x$. Лемма 1 доказана.

Отметим, что формулы (12), (13) отличаются от ранее известных (см. [3, 21]) тем, что в правые части формул (12), (13) входят только сама функция $u_k(x)$ и предыдущая функция $u_{\nu(k)}(x)$, что позволяет отказаться от предположения ограниченности ранга собственных значений.

Лемма 3. *Для корневых функций оператора L справедливы оценки*

$$\|u_k^{(s)}\|_\infty\le C_1(1+|\rho_k|)^{s+1/p}\{\|u_k\|_p+(1+|\rho_k|)^{-n+1/p'-1/p}\|u_{\nu(k)}\|_{p'}\},\tag{15}$$

$$\|u_k^{(s)}\|_p\le C_2(1+|\rho_k|)^{s}\{\|u_k\|_p+(1+|\rho_k|)^{-n}\|u_{\nu(k)}\|_{p}\},\tag{16}$$

где $p,\ p'\ge 1$, $s=\overline{0,n-1}$, $\rho_k=\sqrt[n]{-\lambda_k}$, константы C_1, C_2 зависят от $\operatorname{mes}G$ *и* $\|P_l\|_1$, $l=\overline{1,n}$.

Доказательство. Зафиксируем число B так, чтобы

$$|f_{hs}(z)|\le B|f(z)|\quad\text{при}\quad |z|\le 1;\quad |g(z)|\le B\quad\text{при}\quad |z|\le n.\tag{17}$$

Выберем число $\delta>1$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\sup\limits_{x\in[a,(a+b)/2]}\max\limits_{1\le l\le n}\{\|P_l\|_{1,\Delta_x^\delta}\}\le$ $\le\varepsilon_1\le(2B^2n^{n+2})^{-1}$, где $\Delta_x^\delta=[x,x+(2n^{\delta-1})^{-1}(b-a)]$, n – порядок оператора L.

Пусть $R = \min\{(2n^\delta)^{-1}(b-a), (1+|\rho_k|)^{-1}\}$, $M_\infty = \max\limits_{0\le s\le n-1}\{R^s\|u_k^{(s)}\|_\infty\}$. Тогда при $x \in [a,(a+b)/2]$, $0 \le t \le R$ в силу неравенства (17) и неравенства Гёльдера из (12) получаем

$$t^s|u_k^{(s)}(x)| \le B\sum_{h=1}^n |u_k(x+ht)| + B^2n^nR^{n-1}\sum_{l=1}^n \|P_l\|_{1,\Delta_x^\delta}\|u_k^{(n-l)}\|_\infty + B^2n^{n+1}R^{n-1+1/q'}\|u_{\nu(k)}\|_{p'} \le$$

$$\le B\sum_{l=1}^n |u_k(x+ht)| + B^2n^{n+1}\varepsilon_1 M_\infty + B^2n^{n+1}R^{n-1+1/q'}\|u_{\nu(k)}\|_{p'},$$

где $1/p'+1/q'=1$. Итак, при $a \le x \le (a+b)/2$, $0\le t\le R$

$$t^s|u_k^{(s)}(x)| \le B\sum_{h=1}^n |u_k(x+ht)| + \frac{1}{2n}M_\infty + B^2n^{n+1}R^{n-1/p'}\|u_{\nu(k)}\|_{p'}.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по t от 0 до R, получим

$$R^s|u_k^{(s)}(x)| \le Bn^2R^{-1/p}\|u_k\|_p + (1/2)M_\infty + B^2n^{n+2}R^{n-1/p'}\|u_{\nu(k)}\|_{p'},$$

где $x \in [a,(a+b)/2]$, $s=\overline{0,n-1}$. В силу симметрии такое же неравенство имеет место и при $x\in[(a+b)/2,b]$. Следовательно, $M_\infty \le 2Bn^2R^{-1/p}\|u_k\|_p + 2B^2n^{n+2}R^{n-1/p'}\|u_{\nu(k)}\|_{p'}$. Отсюда с учетом определения числа M_∞ получим

$$\|u_k^{(s)}\|_\infty \le 2Bn^2R^{-s-1/p}\|u_k\|_p + 2B^2n^{n+2}R^{n-s-1/p'}\|u_{\nu(k)}\|_{p'}.$$

Таким образом,

$$\|u_k^{(s)}\|_\infty \le C(\rho_k)(1+|\rho_k|)^{s+1/p}\{\|u_k\|_p + (1+|\rho_k|)^{-n+1/p'-1/p}\|u_{\nu(k)}\|_{p'}\},$$

где $C(\rho_k) = 2B^2n^{n+2}\max\{1,(2n^\delta/[(b-a)(1+|\rho_k|)])^{n+1/p}\}$.

Теперь ясно, что оценка (15) будет справедлива с константой

$$C_1 = 2B^2n^{n+2}\max\{1,(2n^\delta/(b-a))^{n+1}\},$$

а также на сегменте $E_{\rho_k}(x) = [x, x+C_3/(1+|\rho_k|)] \subset \bar{G}$ с константой

$$C_1 = 2B^2n^{n+2}\max\{1,(2n^\delta/C_3)^{n+1}\}.$$

Оценка (15) доказана.

Из оценки (15) при $p'=p$ и $y\in E_{\rho_k}(x)$ вытекает неравенство

$$|u_k^{(s)}(y)|^p \le \mathrm{const}\cdot(1+|\rho_k|)^{sp+1}\{\|u_k\|^p_{p,E_{\rho_k}(x)} + (1+|\rho_k|)^{-np}\|u_{\nu(k)}\|^p_{p,E_{\rho_k}(x)}\},$$

проинтегрировав которое по $y\in E_{\rho_k}(x)$, приходим к неравенству

$$\|u_k^{(s)}\|^p_{p,E_{\rho_k}(x)} \le \mathrm{const}\cdot(1+|\rho_k|)^{sp}\{\|u_k\|^p_{p,E_{\rho_k}(x)} + (1+|\rho_k|)^{-np}\|u_{\nu(k)}\|^p_{p,E_{\rho_k}(x)}\},$$

где const не зависит от точки $x\in\overline{G}$. Следовательно, справедливо неравенство $\|u_k^{(s)}\|_p^p \le$ $\le \mathrm{const}\cdot(1+|\rho_k|)^{sp}\{\|u_k\|_p^p + (1+|\rho_k|)^{-np}\|u_{\nu(k)}\|_p^p\}$, из которого вытекает оценка (16). Лемма 3 доказана.

Отметим, что оценка типа (15) доказана также в работе [22].

Обозначим через ω_j, $j=\overline{1,n}$, различные корни n-й степени числа $(-1)^n$ и введем функции

$$X_{kj}^{\pm}(x)=n^{-1}\sum_{s=0}^{n-1}\omega_j^{s+1}(\pm i\mu_k)^{s+1-n}u_k^{(n-s-1)}(x),\quad i=\sqrt{-1},$$

$$N(\xi,u_k)=n^{-1}\mu_k^{1-n}\left\{\sum_{r=1}^{n}P_r(\xi)u_k^{(n-r)}(\xi)-u_{\nu(k)}(\xi)\right\},\quad A_k^{\mp}(x)=u_k(x)-\sum_{\operatorname{Im}\omega_j<0}X_{kj}^{\mp}(x)-X_{k1}^{\mp}(x).$$

Зафиксируем точку $x\in\bar{G}$ и выберем число $R_0>0$ таким, чтобы $[x,x+R_0]\subset\bar{G}$ либо $[x-R_0,x]\subset\bar{G}$.

Лемма 4. *Пусть* $|\operatorname{Im}\mu_k|\le\mathrm{const}$, $k=1,2,\ldots$ *Тогда существуют достаточно малые положительные постоянные* $C(n)$, $\alpha(n)$ *такие, что при любом* $t\in[0,C(n)R_0]$ *для корневой функции* u_k *оператора* L *справедливы формулы:*

$$\begin{aligned}
u_k(x\pm t)={}&A_k^{\mp}(x)\exp(i\mu_k t)+X_{k1}^{\mp}(x)\exp(-i\mu_k t)+\sum_{\operatorname{Im}\omega_j<0}X_{kj}^{\mp}(x)\exp(-i\omega_j\mu_k t)-\\
&-(\mp i)^{1-n}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j\le 0}\omega_j\int\limits_x^{x\pm t}N(\xi,u_k)\exp(i\omega_j\mu_k(|\xi-x|-t))\,d\xi-\\
&-(\mp i)^{1-n}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j>0}\omega_j\int\limits_x^{x\pm t}N(\xi,u_k)\exp(i\mu_k(|\xi-x|\omega_j+t))\,d\xi+\\
&+(\mp i)^{1-n}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j>0}\omega_jO(1)\int\limits_{x\pm t}^{x\pm R_j}N(\xi,u_k)\{\exp(i\omega_j\mu_k(|\xi-x|-t))-\exp(i\mu_k(\omega_j|\xi-x|+t))\}\,d\xi+\\
&+(\mp i)^{1-n}\sum_{\substack{\operatorname{Im}\omega_j=\operatorname{Im}\omega_m>0\\ j\ne m}}\Bigg\{\omega_mO(1)\int\limits_{x\pm t}^{x\pm R_j}N(\xi,u_k)[\exp(i\mu_k(\omega_m|\xi-x|-\omega_j t))-\\
&-\exp(i\mu_k(\omega_m|\xi-x|+t))]\,d\xi+\\
&+\omega_jO(1)\int\limits_{x\pm t}^{x\pm R_j}N(\xi,u_k)[\exp(i\mu_k(\omega_j|\xi-x|-\omega_m t))-\exp(i\mu_k(\omega_j|\xi-x|+t))]\,d\xi\Bigg\}+\\
&+O(\exp(-\alpha|\mu_k|R_0))\{\|u_k\|_2+\|u_{\nu(k)}\|_2\},
\end{aligned}\tag{18}$$

где $\omega_1=1$, $\omega_{n/2+1}=-1$, $p\ge 1$, *если* n *четно,* $|\mu_k|\ge\mu_0$, μ_0 *– достаточно большое число;*

$$\begin{aligned}
u_k(x\pm t)={}&\Bigg(u_k(x)+\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j<0}X_{kj}^{-}(x)\Bigg)\exp(\pm i\mu_k t)-\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j<0}X_{kj}^{-}(x)\exp(\mp i\omega_j\mu_k t)+\\
&+\sigma_1\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j\le 0}\omega_j\int\limits_x^{x\pm t}N(\xi,u_k)\exp(\pm i\omega_j\mu_k(|\xi-x|-t))\,d\xi+\\
&+\sigma_2\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j>0}\omega_j\int\limits_x^{x\pm t}N(\xi,u_k)\exp(\pm i\mu_k(\omega_j|\xi-x|+t))\,d\xi+
\end{aligned}$$

$$+\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j>0}\omega_j O(1)\int\limits_{x\pm t}^{x\pm R_j} N(\xi,u_k)[\sigma_3\exp(\pm i\omega_j\mu_k(|\xi-x|-t))+$$
$$+\sigma_4\exp(\pm i\mu_k(\omega_j|\xi-x|+t))]\,d\xi+O(\exp(-\alpha|\mu_k|R_0))\{\|u_k\|_p+\|u_{\nu(k)}\|_p\},\tag{19}$$

если $n=4l-1$, $\operatorname{Im}\lambda_k\geq 0$ *либо* $n=4l+1$, $\operatorname{Im}\lambda_k<0$, $l=1,2,\ldots$; $|\mu_k|>\mu_0$, μ_0 – *достаточно большое число;*

$$u_k(x\pm t)=\Bigl(u_k(x)+\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j>0}X^+_{kj}(x)\Bigr)\exp(\mp i\mu_k t)-\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j>0}X^+_{kj}(x)\exp(\pm i\omega_j\mu_k t)+$$
$$+\sigma_1\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j\geq 0}\omega_j\int\limits_x^{x\pm t}N(\xi,u_k)\exp(\mp i\omega_j\mu_k(|\xi-x|-t))\,d\xi+$$
$$+\sigma_2\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j<0}\omega_j\int\limits_x^{x\pm t}N(\xi,u_k)\exp(\mp i\mu_k(\omega_j|\xi-x|+t))\,d\xi+$$
$$+\sum_{\pm\operatorname{Im}\omega_j<0}\omega_j O(1)\int\limits_{x\pm t}^{x\pm R_j}N(\xi,u_k)[\sigma_3\exp(\mp i\omega_j\mu_k(|\xi-x|-t))+\sigma_4\exp(\mp i\mu_k(\omega_j|\xi-x|+t))]\,d\xi+$$
$$+O(\exp(-\alpha|\mu_k|R_0))\{\|u_k\|_p+\|u_{\nu(k)}\|_p\},\tag{20}$$

если $n=4l-1$, $\operatorname{Im}\lambda_k<0$ *либо* $n=4l+1$, $\operatorname{Im}\lambda_k\geq 0$, $l=1,2,\ldots$; $|\mu_k|\geq\mu_0$, μ_0 – *достаточно большое число. В формулах (18)–(20) числа* R_j *принадлежат сегменту* $[C(n)R_0,R_0]$, *числа* σ_r, $r=\overline{1,4}$, *независимо друг от друга равны либо* 1, *либо* -1.

Формулы (18)–(20) являются односторонними аналогами формулы среднего значения Е.И. Моисеева [23]. Доказательство леммы 4 приведено во второй части работы.

Введем в рассмотрение функции

$$R_1(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^n\omega_j\exp(i\omega_j\mu_k g(\operatorname{Im}\lambda_k)z), & \text{если}\quad n=4q-1,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^n\omega_j\exp(-i\omega_j\mu_k g(\operatorname{Im}\lambda_k)z), & \text{если}\quad n=4q+1,\end{cases}$$

$$R_2(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^n\omega_j\exp(-i\omega_j\mu_k g(\operatorname{Im}\lambda_k)z), & \text{если}\quad n=4q-1,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^n\omega_j\exp(i\omega_j\mu_k g(\operatorname{Im}\lambda_k)z), & \text{если}\quad n=4q+1,\end{cases}$$

где $g(y)=1$, $y\geq 0$; $g(y)=-1$, $y<0$; $\omega_j=\sqrt[n]{-1}$, $j=\overline{1,n}$. Если n четно, то функции $R_1(z)$ и $R_2(z)$ определим формулой $R_1(z)=R_2(z)=\sum_{j=1}^n\omega_j\exp(i\omega_j\mu_k z)$, $\omega_j=\sqrt[n]{1}$, $j=\overline{1,n}$.

Для определенности рассмотрим случай $n=2q$, $q=1,2,3,\ldots$ Умножив обе части уравнения $Lu_k(\xi)+\lambda_k u_k(\xi)=u_{\nu(k)}(\xi)$ на функцию $R_1(\xi-x-t)$ и проинтегрировав по ξ от x до $x+t$, $t\leq R_0$, получим

$$u_k(x+t)=\sum_{j=1}^n X^-_{kj}(x)\exp(-i\omega_j\mu_k t)-(-i)^{1-n}\int\limits_x^{x+t}N(\xi,u_k)R_1(\xi-x-t)\,d\xi.\tag{21}$$

5. Доказательство результатов. Докажем теорему 2. Рассмотрим множество индексов $J_{\tau 1} = \{k : 1 \le |\rho_k| \le \tau, \ \tau \ge 1\}$ и $J_{\tau 2} = \{k : \tau/2 \le |\rho_k| \le \tau, \ \tau \ge 2\}$. Обозначим через R_1 число $(C_0 neS\tau)^{-1}$, где $S \ge 1$ выбирается так, чтобы выполнялись неравенства $R_1 \le \operatorname{mes} G/(2n)$ и

$$\alpha(R_1) = \sup\{\|P_1\|_{2,E}, \ \|P_l\|_{1,E}, \ l = \overline{2,n}\} \le L_1^{-1} \tag{22}$$

для любого множества $E \subset \bar{G}$, $\operatorname{mes} E \le nR_1$. Здесь L_1 – натуральное число, выбор которого будет определен ниже.

Пусть $x \in [a, (a+b)/2]$; $k \in J_\tau$, где J_τ – одно из множеств $J_{\tau 1}$ и $J_{\tau 2}$. Запишем формулу (13) при $t \le R_1$ в виде

$$u_k(x) = \sum_{h=1}^n f_h(0) u_k(x+ht) + \sum_{h=1}^n [f_h(\rho_k t) - f_h(0)] u_k(x+ht) +$$

$$+ \sum_{h=1}^n f_h(\rho_k t) \Biggl[\sum_{l=1}^n \int_x^{x+ht} (x+ht-\eta)^{n-1} g(\rho_k(x+ht-\eta)) P_l(\eta) u_k^{(n-l)}(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_x^{x+ht} (x+ht-\eta)^{n-1} g(\rho_k(x+ht-\eta)) u_{\nu(k)}(\eta)\, d\eta \Biggr].$$

Проинтегрируем последнее соотношение по t от 0 до R_1:

$$u_k(x) = R_1^{-1}(u_k, v) + R_1^{-1} \sum_{h=1}^n \int_0^{R_1} [f_h(\rho_k t) - f_h(0)] u_k(x+ht)\, dt +$$

$$+ R_1^{-1} \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^n \int_0^{R_1} f_h(\rho_k t) \int_x^{x+ht} (x+ht-\eta)^{n-1} g(\rho_k(x+ht-\eta)) P_l(\tau) u_k^{(n-l)}(\eta)\, d\eta\, dt +$$

$$+ \sum_{h=1}^n \int_0^{R_1} f_h(\rho_k t) \int_x^{x+ht} (x+ht-\eta)^{n-1} g(\rho_k(x+ht-\eta)) u_{\nu(k)}(\eta)\, d\eta\, dt = R_1^{-1}(u_k, v) + I_1 + I_2 + I_3,$$

где $v(y) = \sum_{h=1}^n h^{-1}\overline{f(0)} \chi\{y : \ x \le y \le x + hR_1\}$, $\chi(A)$ – характеристическая функция множества A.

Для определенности рассмотрим оператор (1) с четным порядком n и оценим слагаемые I_r, $r = \overline{1,3}$. В силу оценки (14) имеем

$$|I_1| \le C_0 R_1^{-1} \tau \sum_{h=1}^n \int_0^{R_1} t |u_k(x+ht)|\, dt.$$

Учитывая формулу (21) в правой части последнего неравенства, находим

$$|I_1| \le C_0 R_1^{-1} \tau \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n |X_{kj}^-(x)| \int_0^{R_1} t |\exp(-i\omega_j \mu_k h t)|\, dt +$$

$$+ C_0 R_1^{-1} \tau \sum_{h=1}^n \int_0^{R_1} t \int_x^{x+ht} |N(\xi, u_k)|\, |R_1(\xi - x - ht)|\, d\xi\, dt \le \frac{C_0 R_1 en\tau}{2} \sum_{j=1}^n |X_{kj}^-(x)| +$$

$$+\frac{C_0R_1^{-1}ne\tau}{|\rho_k|^{n-1}}\sum_{r=1}^{n}\int\limits_0^{R_1}t\int\limits_x^{x+nR_1}|P_r(\xi)|\,|u_k^{(n-r)}(\xi)|\,d\xi\,dt+\frac{C_0R_1ne\tau}{|\rho_k|^{n-1}}\int\limits_x^{x+nR_1}|u_{\nu(k)}(\xi)|\,d\xi\le$$

$$\le S^{-1}\sum_{j=1}^{n}|X_{kj}^-(x)|+S^{-1}\alpha(R_1)|\rho_k|^{1-n}\left\{\|u_k^{(n-1)}\|_2+\sum_{r=2}^{n}\|u_k^{(n-r)}\|_\infty\right\}+S^{-1}|\rho_k|^{1-n}\sqrt{nR_1}\|u_{\nu(k)}\|_2.$$

Применяя оценки (15), (16) при $p=p'=2$, антиаприорную оценку (3) и учитывая определение числа R_1, $\alpha(R_1)$ и неравенство $\tau^{-1}\le|\rho_k|^{-1}$ при $k\in J_\tau$, из последнего неравенства имеем

$$|I_1|\le S^{-1}\sum_{j=1}^{n}|X_{kj}^-(x)|+C_4[(L_1S)^{-1}+S^{-1}]\|u_k\|_2\le S^{-1}\sum_{j=1}^{n}|X_{kj}^-(x)|+C_5S^{-1}\|u_k\|_2,$$

где $C_5>0$ не зависит от x, S, L_1 и порядка присоединенной функции.

Поскольку функции $f_h(z)$ аналитичны в круге $|z|\le1$ и $g(x)$ – целая функция, то существует постоянная $M>0$ такая, что $|f_h(z)|\le M$ при $|z|\le1$ и $|g(z)|\le M$ при $|z|\le n$. Учитывая эти неравенства, применяя неравенство Гёльдера и оценки (15), (16), (3), находим, что

$$|I_2|\le M^2(nR_1)^{n-1/2}n\|P_1\|_{2,[x,x+nR_1]}\|u_k^{(n-1)}\|_2+M^2\sum_{h=1}^{n}\sum_{l=2}^{n}(nR_1)^{n-1}\|P_l\|_{1,[x,x+nR_1]}\|u_k^{(n-l)}\|_\infty\le$$

$$\le M^2\alpha(R_1)n\left[(nR_1)^{n-1/2}\|u_k^{(n-1)}\|_2+(nR_1)^{n-1}\sum_{l=2}^{n}\|u_k^{(n-l)}\|_\infty\right]\le$$

$$\le M^2\alpha(R_1)n\left[(nR_1)^{n-1/2}C_2(1+|\rho_k|)^{n-1/2}+(nR_1)^{n-1}C_1\sum_{l=2}^{n}(1+|\rho_k|)^{n-l+1/2}\right]\times$$

$$\times\{\|u_k\|_2+(1+|\rho_k|)^{-n}\|u_{\nu(k)}\|_2\}\le$$

$$\le M^2n\alpha(R_1)\left[\mathrm{const}\cdot(nR_1(1+|\rho_k|))^{n-1/2}+\mathrm{const}\cdot\left(\sum_{l=2}^{n}(nR_1(1+|\rho_k|))^{n-l+1/2}(nR_1)^{l-3/2}\right)\right]\|u_k\|_2.$$

Учитывая неравенство $\tau^{-1}\le|\rho_k|^{-1}$ при $k\in J_\tau$, $nR_1\le1$ и $\alpha(R_1)\le L_1^{-1}$, из последнего соотношения получаем $|I_2|\le C_6L_1^{-1}\|u_k\|_2$, где $C_6>0$ не зависит от x, S, L_1 и порядка присоединенной функции. Аналогично оценивается слагаемое $|I_3|\le C_7S^{-1}\|u_k\|_2$. Следовательно, при $k\in J_\tau$ справедливо неравенство

$$|u_k(x)|\,\|u_k\|_2^{-1}\le R_1^{-1}|(u_k\|u_k\|_2^{-1},v)|+S^{-1}\sum_{j=1}^{n}|X_{kj}^-(x)|\,\|u_k\|_2^{-1}+C_8\{L_1^{-1}+S^{-1}\}.$$

Возводя в квадрат каждую часть последнего неравенства, применяем неравенство Бесселя и, учитывая равенство $\|v\|_2^2=O(R_1)$, получаем

$$\sum_{k\in J_\tau}|u_k(x)|^2\|u_k\|_2^{-2}\le O(R_1^{-1})+C_9S^{-2}\sum_{k\in J_\tau}\sum_{j=1}^{n}|X_{kj}^-(x)|^2\|u_k\|_2^{-2}+C_{10}\{L_1^{-2}+S^{-2}\}\sum_{k\in J_\tau}1. \quad (23)$$

В силу симметрии оценка (23) будет верна и для всех $x\in[(a+b)/2,b]$.

Интегрируя соотношение (23) по x от a до b, используя выражение для $X_{kj}^-(x)$ и оценки (16), (3), приходим к неравенству $\sum_{k\in J_\tau}1\le O(R_1^{-1})+C_{11}\{L_1^{-2}+S^{-2}\}\sum_{k\in J_\tau}1$. Выбирая числа

S и L_1 так, чтобы выполнялось условие $C_{11}\{L_1^{-2}+S^{-2}\}\le 1/2$, из последнего соотношения с учетом определения числа R_1 получаем

$$\sum_{k\in J_\tau} 1 \le \mathrm{const}\cdot(1+\tau). \tag{24}$$

Эта оценка верна и в случае $|\rho_k|<1$. Для этого достаточно рассмотреть уравнение $Lu_k - -2u_k+\lambda'_k u_k = u_{\nu(k)}$, где $\lambda'_k=\lambda_k+2$, $|\lambda_k|<1$, с учетом того, что числа ρ'_k будут удовлетворять условию $|\rho'_k|\ge 1$. Таким образом, при $J_\tau = J_{\tau 1}$ из (24) получим неравенство (4).

Пусть $x\in\overline{G}$, $k\in J_{\tau 2}$. Обозначим через G_{ρ_k} произвольный сегмент длины $|\rho_k|^{-1}$, содержащий точку x и принадлежащий $\overline{G}$ (см. [6]). Так как $k\in J_{\tau 2}$, то $|\rho_k|^{-1}\le 2\tau^{-1}$. Следовательно, сегмент G_{ρ_k} можно покрыть сегментом G_τ длины $2\tau^{-1}$, принадлежащим $\overline{G}$. Используя сначала оценку (15) при $p=\infty$, $p'=2$, затем оценки (3) и (24) при $J_\tau = J_{\tau 2}$, имеем

$$\sum_{k\in J_{\tau 2}}\sum_{j=1}^{n}|X_{kj}^{-}(x)|^2\|u_k\|_2^{-2}\le$$

$$\le \mathrm{const}\cdot\sum_{k\in J_{\tau 2}}\sum_{j=1}^{n}\|u_k\|_{C(G_\tau)}^2\|u_k\|_2^{-2}+\mathrm{const}\cdot\sum_{k\in J_{\tau 2}}|\rho_k|^{1-2n}\|u_{\nu(k)}\|_2^2\|u_k\|_2^{-2}\le$$

$$\le \mathrm{const}\cdot\sum_{k\in J_{\tau 2}}\|u_k\|_{C(G_\tau)}^2\|u_k\|_2^{-2}+\mathrm{const}\cdot\sum_{k\in J_\tau}1\le \mathrm{const}\cdot\sum_{k\in J_{\tau 2}}\|u_k\|_{C(G_\tau)}^2\|u_k\|_2^{-2}+\mathrm{const}\cdot\tau. \tag{25}$$

Пусть $\|u_k\|_{C(G_\tau)}=|u_k(x_k)|$. Разобьем сегмент G_τ точками ξ_i, $i=\overline{1,L_2}$, на L_2 равных частей, где L_2 достаточно велико, но фиксировано (выбор будет уточнен ниже). Пусть ξ_{i_k} – точка, ближайшая к x_k. В силу неравенств (15) при $p=\infty$, $p'=2$, (3) и условия $|\rho_k|\tau^{-1}\le 1$ получаем оценку

$$|u_k(x_k)-u_k(\xi_{ik})|\le\|u'_k\|_{C(G_\tau)}|x_k-\xi_{ik}|\le 2\,\mathrm{const}\cdot|\rho_k|\{\|u_k\|_{C(G_\tau)}+|\rho_k|^{(1-2n)/2}\|u_{\nu(k)}\|_2\}(\tau L_2)^{-1}\le$$

$$\le 2L_2^{-1}\,\mathrm{const}\cdot\{|u_k(x_k)|+\|u_k\|_2\}.$$

Выбирая L_2 так, чтобы $2L_2^{-1}\mathrm{const}\le 1/2$, находим, что $|u_k(x_k)|\le 2|u_k(\xi_{ik})|+\|u_k\|_2$. С учетом этого неравенства из (25) имеем

$$\sum_{k\in J_{\tau 2}}\sum_{j=1}^{n}|X_{kj}^{-}(x)|^2\|u_k\|_2^{-2}\le \mathrm{const}\cdot\sum_{k\in J_{\tau 2}}|u_k(\xi_{ik})|^2\|u_k\|_2^{-2}+\mathrm{const}\cdot\tau\le$$

$$\le \mathrm{const}\cdot\sum_{k\in J_{\tau 2}}\sum_{i=1}^{L_2}|u_k(\xi_i)|^2\|u_k\|_2^{-2}+\mathrm{const}\cdot\tau\le \mathrm{const}\cdot\sum_{i=1}^{L_2}\sum_{k\in J_{\tau 2}}|u_k(\xi_i)|^2\|u_k\|_2^{-2}+\mathrm{const}\cdot\tau. \tag{26}$$

Учитывая оценки (24) и (26) в неравенстве (23), получаем

$$\sum_{k\in J_{\tau 2}}|u_k(x)|^2\|u_k\|_2^{-2}\le C_{13}S\tau+C_{14}S^{-2}\sum_{i=1}^{L_2}\sum_{k\in J_{\tau 2}}|u_k(\xi_i)|^2\|u_k\|_2^{-2}. \tag{27}$$

Полагая в (27) $x=\xi_i$, $i=\overline{1,L_2}$, и суммируя по i, имеем

$$(1-C_{14}S^{-2}L_2)\sum_{i=1}^{L_2}\sum_{k\in J_{\tau 2}}|u_k(\xi_i)|^2\|u_k\|_2^{-2}\le L_2C_{13}S\tau.$$

Выбирая S так, чтобы $C_{14}S^{-2}L_2 \le 1/2$, в силу чего двойная сумма в (27) имеет порядок $O(\tau)$ и, следовательно, выполняется оценка $\sum_{k\in J_{\tau 2}} |u_k(x)|^2\|u_k\|_2^{-2} \le \mathrm{const}\cdot\tau$, из которой в свою очередь следует, что

$$\sum_{1\le|\rho_k|\le\tau} |u_k(x)|^2\|u_k\|_2^{-2} \le \mathrm{const}\cdot\tau, \quad x\in\overline{G}.$$

С другой стороны, в силу неравенств (15) при $p=p'=2$ и (3) выполняется оценка

$$\sum_{0\le|\rho_k|\le 1} |u_k(x)|^2\|u_k\|_2^{-2} \le \mathrm{const}, \quad x\in\overline{G}.$$

Теорема 2 доказана.

Отметим, что из неравенства (26) следует и оценка

$$\sum_{1\le|\rho_k|\le\tau}\sum_{j=1}^{n} |X_{jk}^{-}(x)|^2\|u_k\|_2^{-2} \le \mathrm{const}\cdot\tau. \tag{28}$$

Пусть выполнены условия теоремы 1. Рассмотрим состоящую только из нормированных собственных функций подсистему $\{u_{k_r}(x)\,\|u_{k_r}\|_2^{-1}\}$ системы $\{u_k(x)\,\|u_k\|_2^{-1}\}$. Тогда эта подсистема будет удовлетворять условиям теоремы 2. Поэтому для системы $\{u_{k_r}(x)\,\|u_{k_r}\|_2^{-1}\}$ выполняется оценка (2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Неравенство (7) следует из доказанной теоремы 2. Остается доказать оценку (6). Для этого, не ограничивая общности, рассмотрим случай $n=2q$, $q=1,2,\ldots$ Пусть $|\mu_k|\ge\mu_0$, $Q_\tau=\{k:\ \tau\le\operatorname{Re}\mu_k\le\tau+1,\ \tau\ge\tau_0\ge\mu_0,\ |\operatorname{Im}\mu_k|\le d=\mathrm{const}\}$, где $\tau_0=S_1(1+d)$, $R_0\ge R^*=\tau_0^{-1}$, а выбор числа $S_1\ge\max\{(C(n)\,R_0)^{-1},1\}$ будет определен ниже. При этом $C(n)$ и $R_0\le\operatorname{mes}G/2$ берутся из леммы 4. От числа R_0 дополнительно потребуем, чтобы для любого множества $E\subset\overline{G}$, $\operatorname{mes}E\le R_0$, выполнялось неравенство $\alpha(R_0)\le L_3^{-1}$, где $L_3>0$ – достаточно большое число, выбор которого будет определен позднее, а $\alpha(R_0)$ определено в доказательстве теоремы 2.

Записав формулу (18) с учетом $\omega_1=1$, $\omega_{n/2+1}=-1$, уединив выражение $A_k^{-}(x)$ и проинтегрировав полученное равенство по t от 0 до R^*, находим

$$R^*|A_k^{-}(x)|\le\left|\int_0^{R^*}u_k(x+t)\exp(-i\mu_k t)\,dt\right|+\left|\sum_{\operatorname{Im}\omega_j<0}\frac{\exp(-i\mu_k(\omega_j+1)R^*)-1}{-i\mu_k(\omega_j+1)}X_{k,j}^{-}(x)\right|+$$

$$+|X_{k1}^{-}(x)|\frac{|\exp(-2i\mu_k R^*)-1|}{2|\mu_k|}+\mathrm{const}\cdot\int_0^{R^*}\int_x^{x+t}|N(\xi,u_k)|\,d\xi\,dt+\mathrm{const}\cdot\int_0^{R^*}\int_{x+t}^{x+R_0}|N(\xi,u_k)|\,d\xi\,dt+$$

$$+R^*O(\exp(-\delta|\mu_k|R_0))\|u_k\|_2,\quad x\in[a,(a+b)/2],\quad \delta>0.$$

Пусть $k\in Q_\tau$. Сначала добавим и вычтем под знаком первого интеграла выражение $\exp(-i\tau t)$, а затем, используя неравенство Гёльдера, оценки (15), (16) и (5), оценим правую часть полученного неравенства

$$R^*|A_k^{-}(x)|\le\left|\int_0^{R^*}u_k(x+t)\exp(-i\tau t)\,dt\right|+\left|\int_0^{R^*}u_k(x+t)[\exp(-i\mu_k t)-\exp(-i\tau t)]\,dt\right|+$$

$$+\frac{\mathrm{const}}{|\mu_k|}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j\le 0}|X_{kj}^{-}(x)|+\mathrm{const}\cdot\{R^*\alpha(R^*)+(R^*)^{3/2}+R^*\alpha(R_0)+R^*|\mu_k|^{-1/2}\}\|u_k\|_2+$$

$$+O(\exp(-\delta|\mu_k|R_0))R^*\|u_k\|_2=|(u_k,w)|+A_1+\frac{\mathrm{const}}{|\mu_k|}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j\le 0}|X^-_{kj}(x)|+\mathrm{const}\cdot R^*A_{2k}\|u_k\|_2, \quad (29)$$

где $w(y)=\exp(i\tau(y-x))\chi\{y:\ x\le y\le x+R^*\}$.

Оценим слагаемое A_1. Для этого еще раз используем формулу (18) для $u_k(x+t)$

$$A_1\le\left|\sum_{\operatorname{Im}\omega_j<0}X^-_{kj}(x)\int\limits_0^{R^*}\exp(-i\mu_k\omega_j t)[\exp(-i\mu_k t)-\exp(-i\tau t)]\,dt\right|+$$

$$+\left|\int\limits_0^{R^*}\exp(i\mu_k t)[\exp(-i\mu_k t)-\exp(-i\tau t)]\,dt\right||A^-_k(x)|+$$

$$+\left|\int\limits_0^{R^*}\exp(-i\mu_k t)[\exp(-i\mu_k t)-\exp(-i\tau t)]\,dt\right||X^-_{k1}(x)|+$$

$$+\mathrm{const}\cdot\left\{\int\limits_0^{R^*}\int\limits_x^{x+t}|N(\xi,u_k)|\,d\xi\,dt+\int\limits_0^{R^*}\int\limits_{x+t}^{x+R_0}|N(\xi,u_k)|\,d\xi\,dt\right\}+R^*O(\exp(-\delta|\mu_k|R_0))\|u_k\|_2.$$

Используя неравенство Гёльдера, оценки (15), (16), (5) и

$$\left|\int\limits_0^{R^*}\exp(-i\mu_k\omega_j t)[\exp(-i\mu_k t)-\exp(-i\tau t)]\,dt\right|\le\frac{\mathrm{const}}{|\mu_k|},$$

при $\operatorname{Im}\omega_j<0$ и $\omega_1=1$ для A_1 получим оценку

$$A_1\le\left|\int\limits_0^{R^*}(1-\exp(i(\mu_k-\tau)t))\,dt\right||A^-_k(x)|+\frac{\mathrm{const}}{|\mu_k|}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j\le 0}|X^-_{kj}(x)|+\mathrm{const}\cdot R^*A_{2k}\|u_k\|_2.$$

Так как $|\mu_k-\tau|\le 1+d$, $|1-\exp(i(\mu_k-\tau)t)|\le 2(1+d)t$ при $t\in[0,R^*]$ и $R^*(1+d)=S_1^{-1}$, то

$$A_1\le R^*S_1^{-1}|A^-_k(x)|+\frac{\mathrm{const}}{|\mu_k|}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j\le 0}|X^-_{kj}(x)|+\mathrm{const}\cdot R^*A_{2k}\|u_k\|_2.$$

С учетом этой оценки из (29) находим, что

$$|A^-_k(x)|\le(R^*)^{-1}|(u_k,w)|+S_1^{-1}|A^-_k(x)|+\frac{\mathrm{const}}{|\mu_kR^*|}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j\le 0}|X^-_{kj}(x)|+\mathrm{const}\cdot A_{2k}\|u_k\|_2.$$

Выбрав $S_1\ge 2$, запишем последнее неравенство в виде

$$|A^-_k(x)|\le 2(R^*)^{-1}|(u_k,w)|+\frac{\mathrm{const}}{|\mu_kR^*|}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j\le 0}|X^-_{kj}(x)|+\mathrm{const}\cdot A_{2k}\|u_k\|_2.$$

В силу $\|w\|_2^2=O(R^*)$, неравенства Бесселя и оценок (15), (28) получим

$$\sum_{k\in Q_\tau}|A^-_k(x)|^2\|u_k\|_2^{-2}\le O((R^*)^{-1})+\frac{\mathrm{const}}{(R^*)^2}\sum_{k\in Q_\tau}|\mu_k|^{-2}\sum_{\operatorname{Im}\omega_j\le 0}|X^-_{kj}(x)|^2\|u_k\|_2^{-2}+\mathrm{const}\cdot\sum_{k\in Q_\tau}A_{2k}^2\le$$

$$\leq O((R^*)^{-1}) + \frac{\text{const}}{(R^*)^2\tau^2}(\tau + d + 1) + \text{const} \cdot \sum_{k \in Q_\tau} A_{2k}^2. \tag{30}$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\sum_{k \in Q_\tau} |X_{k1}^-(x)|^2 \|u_k\|_2^{-2} \leq O((R^*)^{-1}) + \frac{\text{const}}{(R^*)^2\tau^2}(\tau + d + 1) + \text{const} \cdot \sum_{k \in Q_\tau} A_{2k}^2. \tag{31}$$

Пусть $x_0 = a$, $x_s = x_0 + sR^*$, $s = \overline{0, [(b-a)/(2R^*)] + 1}$. Из формулы (18) с учетом неравенства $|\operatorname{Re}(-i\omega_j\mu_k)|^{-1} \leq \text{const} \cdot |\mu_k|^{-1}$, $\operatorname{Im}\omega_j < 0$, $k \in Q_\tau$, находим

$$\sum_{k \in Q_\tau} \int_0^{R^*} |u_k(x_s + t)|^2 \, dt \|u_k\|_2^{-2} \leq \text{const} \cdot R^* \left\{ \sum_{k \in Q_\tau} |A_k^-(x_s)|^2 \|u_k\|_2^{-2} + \sum_{k \in Q_\tau} |X_{k1}^-(x_s)|^2 \|u_k\|_2^{-2} \right\} +$$

$$+ \text{const} \cdot \sum_{k \in Q_\tau} |\mu_k|^{-1} \sum_{\operatorname{Im}\omega_j \leq 0} |X_{kj}^-(x_s)|^2 \|u_k\|_2^{-2} + \text{const} \cdot R^* \sum_{k \in Q_\tau} A_{2k}^2.$$

Суммируя по s от 0 до $[(b-a)/(2R^*)] + 1$ и используя оценки (30), (31), (15), (28) и (24), получаем оценку

$$\sum_{k \in Q_\tau} \|u_k\|_{2,[a,(a+b)/2]}^2 \|u_k\|_2^{-2} \leq \text{const} \cdot \left\{ O((R^*)^{-1}) + O\left(\frac{\tau + d + 1}{(R^*\tau)^2}\right) + \sum_{k \in Q_\tau} A_{2k}^2 \right\} + \text{const} \, \frac{\tau + d + 1}{R^*\tau} \leq$$

$$\leq \frac{\text{const}}{R^*} \left\{ 1 + \frac{\tau + d + 1}{R^*\tau^2} \right\} + \text{const} \cdot \{L_3^{-2} + R^* + \tau^{-1} + O(\exp(-\delta\tau R_0))\} \sum_{k \in Q_\tau} 1 + \text{const} \cdot \frac{\tau + d + 1}{R^*\tau}.$$

В силу симметрии точно такая же оценка верна на сегменте $[(a+b)/2, b]$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\sum_{k \in Q_\tau} 1 \leq \frac{\text{const}}{R^*} \left\{ 1 + \frac{1}{\tau R^*} \left(1 + \frac{1+d}{\tau} \right) \right\} + \text{const} \cdot \{L_3^{-2} + R^* + \tau^{-1} + O(\exp(-\delta\tau R_0))\} \sum_{k \in Q_\tau} 1 +$$

$$+ \text{const} \cdot \frac{\tau + d + 1}{R^*\tau} \leq \text{const} \cdot S_1(1+d) \left\{ 1 + \frac{S_1(1+d)}{\tau_0} \left(1 + \frac{1+d}{\tau_0} \right) \right\} +$$

$$+ \text{const} \cdot \{L_3^{-2} + S_1^{-1} + \tau_0^{-1} + O(\exp(-\delta\tau_0 R_0))\} \sum_{k \in Q_\tau} 1 + \text{const} \cdot S_1(1+d) \left(1 + \frac{1+d}{\tau_0} \right) \leq$$

$$\leq \text{const} \cdot (S_1 + 1)(1+d) + \text{const} \cdot \{L_3^{-2} + 2S_1^{-1} + O(\exp(-\delta S_1 R_0))\} \sum_{k \in Q_\tau} 1.$$

Сначала фиксируя R_0 так, чтобы $\text{const} \cdot L_3^{-2} \leq 1/4$, а затем выбирая S_1 настолько большим, чтобы $\text{const} \cdot (2S_1^{-1} + O(\exp(-\delta S_1 R_0))) \leq 1/4$, из последнего соотношения получаем

$$\sum_{k \in Q_\tau} 1 \leq \text{const} \cdot (S_1 + 1)(1+d), \quad \tau \geq \tau_0 = S_1(1+d).$$

С другой стороны, из следствия 1 при $\tau = \tau_1 = (S_1 + 1)(1+d)$ получим $\sum_{|\mu_k| \leq \tau_1} 1 \leq \text{const} \cdot (S_1 + 1)(1+d)$. Теорема 3 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность В.А. Ильину за обсуждение полученных результатов и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1048–1053.
2. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2059–2071.
3. *Komornik V.* // Acta Math. Hungar. 1983. V. 42. № 1–2. P. 171–175.
4. *Керимов Н.Б.* // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 4. С. 803–808.
5. *Крицков Л.В.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 7. С. 1121–1129.
6. *Будаев В.Д.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2033–2044.
7. *Ломов И.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 5. С. 42–52.
8. *Курбанов В.М.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 358–367.
9. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 5. С. 771–794.
10. *Керимов Н.Б.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 317–322.
11. *Будаев В.Д.* // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 396–399.
12. *Komornik V.* // Studia Sci. Math. Hung. 1982. V. 17. P. 403–408.
13. *Komornik V.* // Acta Math. Hung. 1983. V. 42. № 1–2. P. 171–175.
14. *Михайлов В.П.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981–984.
15. *Кесельман Г.М.* // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82–93.
16. *Шкаликов А.А.* // Вестн. МГУ. Сер. мат. 1982. № 6. С. 12–21.
17. *Гомилко А.М., Радзиевский Г.В.* // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 1. С. 47–55.
18. *Радзиевский Г.В.* // Функц. анализ и его приложения. 1995. Т. 29. Вып. 3. С. 87–90.
19. *Рыхлов В.С.* // Вычислит. методы и программирование. Саратов, 1983. № 3. С. 54–59.
20. *Benzinger H.E.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 174. № 447. P. 333–344.
21. *Komornik V.* // Acta Sci. Math. (Szeged). 1983. V. 45. P. 261–271.
22. *Керимов Н.Б.* Базисность и равномерная минимальность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1996.
23. *Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 5. С. 827–844.

Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку

Поступила в редакцию
23.04.2004 г.