М. И. Вишик, А. И. Комеч, А. В. Фурсиков, Некоторые математические задачи статистической гидромеханики,
УМН, 1979, том 34, выпуск 5, 135–210

https://www.mathnet.ru/rm4122

1979 г. сентябрь—октябрь *т. 34, вып. 5(209)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

М. И. Вишик, А. И. Комеч, А. В. Фурсиков

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье — Стокса. Имеется большое число работ, посвященных изучению краевых задач для этой системы (см., например, [38], [39], [53], [37], [40]). Однако исследование только лишь индивидуальных решений системы Навье — Стокса с физической точки зрения не всегда оправдано. При больших числах Рейнольдса (т. е., грубо говоря, при больших скоростях и при малой вязкости) поток жидкости становится турбулентным, и поэтому в математической физике принято описывать его статистически по аналогии с кинетической теорией газов (см. [3]). Одна из возможных статистических постановок задачи состоит в следующем.

Пусть на пространстве $\mathscr{H}$ начальных векторных полей $u_0(x)$ задана мера $\mu(\omega_0)$, определяющая вероятность, с которой $u_0(x)$ принадлежит борелевскому подмножеству $\omega_0 \subset \mathscr{H}$. Ищется мера $P(\omega)$, сосредоточенная на множестве $\{u(t, x)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ решений системы Навье — Стокса, $P(\{u(t, x)\}) = 1$, такая, что ее сужéние при $t = 0$ совпадает с мерой μ, т. е. $P(\{u: u(0, \cdot) \in \omega_0\}) \equiv \mu(\omega_0)$. Мера P определяет вероятностное распределение на множестве решений, соответствующее начальному распределению μ, и называется пространственно-временны́м статистическим решением системы Навье — Стокса.

Пусть $\mu(t, \omega_0) \equiv P(\{u: u(t, \cdot) \in \omega_0\})$ — сужéние меры $P(\omega)$ при фиксированном $t \in [0, T]$. Семейство мер $\mu(t, \omega_0)$, $t \in [0, T]$, называется пространственным статистическим решением системы Навье — Стокса. Характеристические функционалы $\chi(t, v_0)$ мер $\mu(t, \omega_0)$ удовлетворяют уравнению в вариационных производных, полученному Э. Хопфом в [54] и названному впоследствии уравнением Хопфа.

Впервые решение задачи Коши для уравнения Хопфа, соответствующего системе Навье — Стокса в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, было построено Ч. Фояшем и Г. Проди [48], [49] с помощью галёркинских аппроксимаций уравнения Хопфа (ср. § 1 главы III). В случае $n = 2$, а также для малых чисел Рейнольдса Ч. Фояшем была доказана теорема о единственности решения задачи Коши для уравнения Хопфа (см. § 1 главы III). Решение задачи Коши в случае неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а также решение соответствующей цепочки моментных уравнений были построены в [18], [19].

Одна из основных трудностей, которая встречается при построении статистических решений системы Навье — Стокса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ заключается в том, что в этом случае в нашем распоряжении нет однозначного оператора $S(t)$ сдвига по траекториям: $S(t)\,(u(0, \cdot)) = u(t, \cdot)$. Действительно, до сих пор не доказана теорема о единственности решения основных задач для этой системы. Указанную трудность удается обойти или с помощью галёркинской аппроксимации системы Навье — Стокса, для которой имеется однозначный оператор $S_m(t)$ сдвига по траекториям, или с помощью измеримого выбора представителей из каждого класса решений $u(t, x)$, отвечающих одним и тем же начальным данным $u(0, x)$.

А. Бенсуссан и Р. Темам [4] построили пространственно-временнóе статистическое решение стохастической системы Навье — Стокса, т. е. системы, содержащей внешние силы в виде белого шума, в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Точнее, они построили индивидуальные решения системы Навье — Стокса с такими внешними силами, а затем с помощью теоремы Дж. фон Неймана об измеримом выборе построили измеримое отображение, сопоставляющее начальному условию и траектории белого шума соответствующее решение. Аналогичная идея лежит в основе работы А. М. Вершика и О. А. Ладыженской [5], где решена задача Коши для уравнения Хопфа (см. также работу А. А. Арсеньева [1]). М. Вио [6], используя аппарат теории мартингалов, построил пространственно-временнóе статистическое решение стохастической системы Навье — Стокса для случая более общего белого шума, чем в [4].

Настоящая статья посвящена последовательному изложению некоторых математических результатов о статистических решениях системы Навье — Стокса, полученных в последние годы рядом авторов. Как правило, приводятся основные идеи доказательств и лишь в некоторых случаях даются детальные доказательства.

В первой главе построено пространственно-временнóе статистическое решение системы Навье — Стокса в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. При этом построении система Навье — Стокса заменяется ее галёркинским приближением, для которого легко строится пространственно-временнóе статистическое решение $P_m(\omega)$ — мера на пространстве галёркинских траекторий. Устанавливается, что осреднение по мере P_m энергии потока, величины диссипации энергии и $\sup\limits_t \left\| \frac{\partial u(t, \cdot)}{\partial t} \right\|_{-s}$, $s > \frac{n}{2} + 1$, оцениваются сверху равномерно по $m \geqslant 1$. С помощью этих оценок на основании теоремы Прохорова [46] доказывается компактность семейства мер $\{P_m\}$, $m \geqslant 1$. Любая предельная точка этого семейства является статистическим решением.

Вторая глава посвящена построению пространственно-временнóго статистического решения стохастической системы Навье — Стокса. Галеркинской аппроксимацией такой системы является конечная система стохастических уравнений Ито. Разрешимость задачи Коши для нее доказывается с использованием теоремы Хасьминского [51]. Для полученного решения с помощью формулы Ито выводятся равномерные энергетические оценки, а также равномерная оценка среднего значения модуля непрерывности по t траекторий $u(t, \cdot)$. При выводе последнего неравенства важную роль играет оценка Леви модуля непрерывности броуновского движения. Далее, на основе этих оценок и теоремы Прохорова совершается предельный переход. Эта глава содержит изложение результатов Вио [6] и их обобщений. Однако здесь применяются методы, более простые, чем в [6], не использующие теории мартингалов.

В главе VI построено трансляционно-однородное статистическое решение системы Навье — Стокса в $\mathbb{R}^n$ в предположении, что начальная мера трансляционно-однородна и обладает конечной средней плотностью энергии (см. § 1). Белый шум, если он имеется в правой части системы, также предполагается однородным по x.

Однородная по x начальная мера μ не может быть сосредоточена на пространстве $[L_2(\mathbb{R}^n)]^n$, если только она не сосредоточена в нуле. Поэтому при построении однородного статистического решения мы встречаемся со следующим осложнением: с помощью классических методов не удается доказать разрешимость системы Навье — Стокса при начальных условиях достаточно общего вида, не принадлежащих $L_2(\mathbb{R}^n)$. Эту трудность удается обойти, используя однородные по x аппроксимации начальной меры и распределения белого шума, сосредоточенные на периодических по x функциях (см. § 3). Соответствующие им галёркинские аппроксимации P_m статистического решения также оказываются однородными по x. Основную роль при изучении семейства мер $\{P_m\}$ играет введенное в [20] понятие средней плотности энергии и средней плотности диссипации энергии однородного по x статистического решения (см. § 1). Эти величины оказываются равномерно ограниченными по $m \geqslant 1$ для семейства $\{P_m\}$ [21]. Наряду с этими оценками весьма существенна оценка среднего значения вариации по t степени $q > 2$ от траекторий $u(t, x)|_{x\in\Omega}$ в метрике соболевского пространства $[H^{-s}(\Omega)]^n$, где $s > \max\left(\frac{n}{2}+3,\ n+1\right)$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая ограниченная область [12]. Для ее вывода используется равномерная по $m \geqslant 1$ оценка среднего значения нормы в $[H^{-s}(\Omega)]^n$ от производной по t решения галёркинской системы без белого шума [21]. Эти нового типа оценки средней плотности энергии, диссипации энергии и вариации по t в области Ω существенно опираются на свойство однородности по x мер P_m, по которым производится осреднение. Отметим, что эти оценки не имеют аналога для индивидуальных решений. Предельная мера P последовательности галёркинских аппроксимаций P_m строится по той же схеме, что и в главах I, II, однако соответствующие построения требуют бо́льших усилий, так же как и проверка того, что P является статистическим решением.

Из упомянутых результатов глав I, II, VI выводятся теоремы о существовании индивидуальных решений системы Навье — Стокса. Например, из теоремы главы VI о существовании однородного по x статистического решения следует новая теорема о существовании решения задачи Коши для системы Навье — Стокса в $\mathbb{R}^n$ при μ-почти всех начальных данных $u_0(x)$ и почти всех по мере Винера $\Lambda(dw)$ траекториях белого шума $\frac{\partial w(t, x)}{\partial t}$ в правой части системы. Отметим, что эти исходные данные имеют с вероятностью единица бесконечную энергию, например, $\| u_0(x) \|_{[L_2(\mathbb{R}^n)]^n} = +\infty$, если начальная мера μ не имеет компоненты, сосредоточенной в нуле. Аналогичным свойством относительно статистического решения $P(du)$ обладает и решение $u(t, x)$ рассматриваемой задачи Коши. Таким образом, вероятностные методы, использованные в главах II, VI, приводят к новым теоремам о существовании индивидуальных решений, которые с помощью других методов пока не удалось получить.

В главе VI доказано, что построенное трансляционно-однородное статистическое решение $P^\nu(\omega)$, соответствующее вязкости $\nu > 0$, для некоторой последовательности $\nu = \nu_k \to 0+$ слабо сходится на соболевском пространстве $H^{-\varepsilon}$ $(\forall\varepsilon > 0)$ к некоторой предельной мере $P(\omega)$, обладающей конечной плотностью энергии. Это дает ответ на один из вопросов А. Н. Колмогорова, поставленных им в его докладе [34]. Отметим, что до сих пор не выяснено, сосредоточена ли предельная мера $P(\omega)$ на решениях системы уравнений Эйлера, понимаемых в достаточно широком смысле.

В главе VI изложены некоторые результаты работ [21], [22], [12].

В главе III, как следствие результатов главы I, получена разрешимость задачи Коши для уравнения Хопфа. Аналогично, с помощью результатов главы II построено решение задачи Коши для прямого уравнения Колмогорова, соответствующего стохастической системе Навье — Стокса [8]. Это — бесконечномерное параболическое уравнение. Разрешимость задачи Коши для него и для более общих уравнений другими методами доказана в [10], [11]. В случае отсутствия белого шума уравнение Колмогорова совпадает с уравнением Хопфа.

В главе IV с помощью метода Н. Н. Боголюбова [35] построено стационарное по t статистическое пространственно-временно́е решение стохастической системы Навье — Стокса в ограниченной области. Кроме того, доказано, что в случае $n = 2$ средняя скорость диссипации энергии построенного стационарного решения не зависит от вязкости $\nu > 0$ и, следовательно, не стремится к нулю при $\nu \to 0$. Это дает некоторый ответ на вопрос А. Н. Колмогорова, поставленный им в более общей форме в его докладе [34].

Отметим, что в приложениях, как правило, используются не сами статистические решения, а их моменты (см., например, книги А. С. Монина и А. М. Яглома [42], [43]). В главе V дано точное определение моментов пространственного статистического решения. Моменты удовлетворяют бесконечной цепочке уравнений Фридмана — Келлера, которой также придается точный смысл (§ 1). С помощью результатов предыдущих глав доказана разрешимость задачи Коши для этой цепочки моментных уравнений при любых числах Рейнольдса. Кроме того, установлено, что моменты галёркинских приближений статистического решения сходятся к решениям бесконечной цепочки моментных уравнений. В случае малых чисел Рейнольдса получены разложения моментов статистических решений в ряды по моментам начальной меры. Оказалось, что вопрос о возможности разложения моментов в такие сходящиеся ряды тесно связан с разложением индивидуальных решений системы Навье — Стокса в функционально-аналитические ряды по начальным данным [15], [36]. Доказано также, что при малых числах Рейнольдса можно получить аппроксимацию решений бесконечной цепочки моментных уравнений для системы Навье — Стокса, если отбросить все уравнения, начиная с некоторого номера, и решить оставшуюся конечную цепочку уравнений. Этот результат дает, таким образом, некоторое решение проблемы замыкания цепочки моментных уравнений при малых числах Рейнольдса (по поводу проблемы замыкания см. [43]). В пятой главе рассмотрен также вопрос об асимптотике при $t \to +\infty$ коэффициентов Фурье индивидуальных решений, а также моментов статистических решений двумерной системы Навье — Стокса. Впервые подобная асимптотика была получена М. Розенблаттом [47] в случае уравнения Бюргерса. При этом М. Розенблатт использовал известную явную формулу для решений данного уравнения. Для более общих уравнений аналогичная асимптотика была получена в [16] с помощью построения первых интегралов ([14], [15]) без использования явных формул, поскольку они неизвестны. Для двумерной системы Навье — Стокса эта асимптотика установлена Л. А. Белоусовым [2].

Отметим в заключение, что вопрос о единственности статистических решений системы Навье — Стокса в трехмерном случае остается открытым.

ГЛАВА I

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ—СТОКСА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

§ 1. Система Навье — Стокса. Функциональные пространства

1. Краевая задача для системы Навье — Стокса. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ рассматривается система Навье — Стокса

$$\text{(I. 1.1)} \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + (u, \nabla) u = -\nabla p(t, x) + \nu \Delta u + f(t, x), \; (\nabla, u(t, x)) = 0,$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $u(t, x) = (u^1(t, x), \ldots, u^n(t, x))$ — скорость течения жидкости в точке x в момент времени t, $p(t, x)$ — давление, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости, $f(t, x) = (f^1(t, x), \ldots, f^n(t, x))$ — плотность внешних сил. Здесь используются следующие обозначения:

$$(u, v) \equiv uv \equiv \sum_{j=1}^{n} u^j v^j \text{ для } u, v \in \mathbb{R}^n,$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

и, соответственно,

$$(\nabla,\ u(t,\ x)) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u^j(t,x)}{\partial x^j} = \operatorname{div} u(t,\ x), \quad (u,\ \nabla) \equiv \sum_{j=1}^{n} u^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\nabla p(t,\ x) \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial p}{\partial x^n}\right) = \operatorname{grad} p(t,\ x).$$

Производные здесь и всюду в дальнейшем понимаются в смысле теории обобщенных функций.

При $t = 0$ задается начальное условие

$$\text{(I.1.2)} \qquad u\,|_{t=0} \equiv u(0,\ x) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

а на $\partial\Omega$ — граничное условие прилипания

$$\text{(I.1.3)} \qquad u(t,\ x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega \quad \text{и} \quad t \in (0,\ T).$$

Исключим из системы (I.1.1) давление $p(t, x)$ и придадим этой системе при граничных условиях (I.1.3) форму операторного уравнения, рассматриваемого в некотором функциональном пространстве.

2. Функциональные пространства. Для любого множества X будем обозначать через $[X]^n$ декартову степень $X \times \ldots \times X$ (n раз). Обозначим через H^s, $s \in \mathbb{N}$, пространство Соболева $[H^s(\Omega)]^n$ вектор-функций $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^n(x))$, заданных в Ω, для которых конечна норма, определяемая соотношением

$$\text{(I.1.4)} \qquad \|u\|^2_{H^s} \equiv \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant s} \sum_{j=1}^{n} |D^\alpha u^j(x)|^2\, dx < +\infty,$$

$$\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n), \qquad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n}},$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Очевидно, $H^0 = [L_2(\Omega)]^n \equiv H$.

Через $\overset{\circ}{H}{}^s$ обозначается замыкание пространства $[C_0^\infty(\Omega)]^n$ по метрике (I.1.4). Положим

$$\text{(I.1.5)} \qquad D = [C_0^\infty(\Omega)]^n, \qquad V = \{u(x) \in D\colon\ (\nabla,\ u(x)) = 0\},$$

$$\text{(I.1.6)} \qquad \mathscr{H} \equiv \mathscr{H}^0 \equiv \text{замыканию } V \text{ в } H, \qquad \mathscr{H}^1 \equiv \text{замыканию } V \text{ в } H^1,$$

$$\mathscr{H}^2 \equiv \mathscr{H}^1 \cap H^2.$$

В пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим симметрический оператор $A = -\Delta$ с областью определения $D(A) = \mathscr{H}^2$. Оператор A — самосопряженный и положительно определенный, а обратный к нему оператор A^{-1} вполне непрерывен. Поэтому оператор A имеет полную, ортонормированную в $\mathscr{H}$ систему собственных функций $e_1(x)$, $e_2(x)$, ..., где $e_k(x) \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^n$, с соответствующими собственными значениями $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Определение 1.1. Пространство $\mathscr{H}^s$, $s \in \mathbb{R}$ — это множество всех обобщенных функций $u(x)$ в Ω вида

$$\text{(I.1.7)} \qquad u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k(x), \text{ для которых } \|u\|_s^2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s |u_k|^2 < +\infty,$$

где $\|\cdot\|_s$ — норма пространства $\mathscr{H}^s$.

Очевидно, $\mathscr{H}^s \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}^{-s}$ при $s>0$, причем между элементами из $\mathscr{H}^s$ и $\mathscr{H}^{-s}$ имеется соотношение двойственности

$$\text{(I.1.8)} \qquad \langle u, v\rangle \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k, \quad u \in \mathscr{H}^s, \quad v \in \mathscr{H}^{-s},$$

если u имеет вид (I.1.7), а $v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k(x)$. Поскольку $e_k(x)$ ортонормированы в $\mathscr{H}$, то $\langle u, v\rangle$ для $u, v \in \mathscr{H}$ совпадает со скалярным произведением в H. В дальнейшем символом $\langle\cdot, \cdot\rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $\mathscr{H}$, двойственность (I.1.8) между $\mathscr{H}^s$ и $\mathscr{H}^{-s}$ при любом $s \in \mathbb{R}$, а также скалярное произведение в H и соотношения двойственности, порождаемые этим скалярным произведением.

Легко видеть, что пространство $\mathscr{H}^s$, определенное выше (см. (I.1.7)), при $s = 0, 1, 2$ совпадает соответственно с пространствами (I.1.6). Кроме того, на $\mathscr{H}^s$ при целом неотрицательном s нормы $\| u \|_s$ и $\| u \|_{H^s}$, определенные соответственно соотношениями (I.1.7) и (I.1.4), эквивалентны. Очевидно, оператор A непрерывно действует из $\mathscr{H}^s$ в $\mathscr{H}^{s-2}$, $s \in \mathbb{R}$, и $\langle Au, u\rangle = \| u \|_1^2$ $\forall u \in \mathscr{H}^1$.

3. Оператор, отвечающий нелинейным членам в (I.1.1.). Пусть $s > \frac{n}{2} + 1$, $n = \dim \Omega$. Положим

$$\text{(I.1.9)} \qquad b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u^i(x) \frac{\partial v^j(x)}{\partial x^i} w^j(x)\, dx, \qquad u, v \in \mathscr{H}^1, \quad w \in \mathscr{H}^s.$$

В силу теоремы вложения Соболева при $s - 1 > n/2$

$$\text{(I.1.10)} \qquad \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial w^j(x)}{\partial x^i} \right| \leqslant C \| w \|_s, \qquad C = C(\Omega),$$

поэтому, учитывая, что $(\nabla, u) = 0$, получим из (I.1.10):

$$\text{(I.1.10}'\text{)} \quad |b(u, v, w)| = \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} u^i(x) v^j(x) \frac{\partial w^j(x)}{\partial x^i} dx \right| \leqslant C \| u \|_0 \| v \|_0 \| w \|_s.$$

Отсюда следует, что существует непрерывный билинейный оператор $\widetilde{B}(\cdot, \cdot)$: $\mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}^{-s}$ такой, что

$$\text{(I.1.11)} \qquad \langle \widetilde{B}(u, v), w\rangle = b(u, v, w) \qquad \forall u, v \in \mathscr{H}, \quad w \in \mathscr{H}^s.$$

Так как $(\nabla, u) = 0$ для $u \in \mathscr{H}$, то

$$\text{(I.1.12)} \qquad \langle \widetilde{B}(u, v), v\rangle = 0 \qquad \forall u \in \mathscr{H}, \quad \forall v \in \mathscr{H}^s.$$

Положим

$$\text{(I.1.13)} \qquad B(u) \equiv \widetilde{B}(u, u), \qquad u \in \mathscr{H}.$$

4. Сведение системы (I.1.1) к операторному уравнению. Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство. Через $L_p(0, T; X)$, где $1 \leqslant p < +\infty$, обозначается пространство слабо измеримых функций $t \to u(t) \in X$, $t \in [0, T]$, для которых

$$\| u \|_{L_p(0, T; X)} \equiv \left(\int_0^T \| u(t) \|_X^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty.$$

Известно, что $L_p(0, T; X)$ — банахово пространство. Аналогично определяется банахово пространство $L_\infty(0, T; X)$.

Пусть $\mathscr{L}_p^s \equiv L_p(0,\ T;\ \mathscr{H}^s)$ при $s \in \mathbb{R}$; $\mathscr{L}_p \equiv \mathscr{L}_p^0$. Положим

$$U \equiv U^{(1)} \equiv \left\{ u(t,\ x) \in \mathscr{L}_2^1 \cap \mathscr{L}_\infty^0 :\ \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathscr{L}_\infty^{-s} \right\}, \tag{I.1.14}$$
$$\|u\|_U \equiv \|u\|_{\mathscr{L}_2^1} + \|u\|_{\mathscr{L}_\infty^0} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{\mathscr{L}_\infty^{-s}}.$$

Очевидно, можно считать, что всякая функция $u(t,\ x) \in U$, как отображение $[0,\ T]$ в $\mathscr{H}^{-s}$, удовлетворяет условию Липшица и, в частности, непрерывна.

Замечание 1.1. Из (I.1.14) следует, что для любого $u \in U$ существует такое множество $\mathscr{T} \subset [0,\ T]$ лебеговой меры нуль, для которого множество

$$\mathscr{K} \equiv \{u(t)\},\ t \in [0,\ T] \setminus \mathscr{T},$$

ограничено в $\mathscr{H}$ и, следовательно, слабо компактно в $\mathscr{H}$. Но из (I.1.14) вытекает, что

$$u(\cdot) \in C(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s}),$$

поэтому $u(t) \in \mathscr{H}$ $\forall t \in [0,\ T]$ и $u(\cdot)$ непрерывно отображает $[0,\ T]$ в пространство $\mathscr{H}$ со слабой топологией.

Положим $\Omega_T = (0,\ T) \times \Omega$; $D'(\Omega_T)$ — пространство обобщенных функций в Ω_T. Уточним постановку задачи (I.1.1) — (I.1.3). Пусть заданы $u_0(x) \in \mathscr{H}$ и $f(t,\ x) \in L_\infty^{-1} \equiv L_\infty(0,\ T;\ H^{-1})$, где H^{-1} — двойственное к $\overset{\circ}{H}{}^1$. Требуется найти функции $u(t,\ x) \in U$ и $p(t,\ x) \in D'(\Omega_T)$, удовлетворяющие соотношениям (I.1.1) — (I.1.2). Отметим, что краевое условие (I.1.3) выполняется автоматически, поскольку $u(t,\ \cdot) \in \mathscr{H}^1$ при почти всех $t \in [0,\ T]$. Равенства в (I.1.1) понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Обозначим через $g(t,\ x)$ функцию из $L_\infty(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-1})$, удовлетворяющую при почти всех t соотношению

$$\langle g(t,\ \cdot),\ v\rangle = \langle f(t,\ \cdot),\ v\rangle \quad \forall v \in \mathscr{H}^1. \tag{I.1.15}$$

Пусть $(u(t,\ x),\ p(t,\ x)) \in U \times D'(\Omega_T)$ — решение задачи (I.1.1) — (I.1.3). Тогда в силу (I.1.9), (I.1.11), (I.1.13) и (I.1.15) при почти всех $t \in [0,\ T]$

$$\left\langle \frac{\partial u(t,\ \cdot)}{\partial t},\ v \right\rangle + \langle \nu A u(t,\ \cdot),\ v\rangle + \langle B(u(t,\ \cdot)),\ v\rangle = \langle g(t,\ \cdot),\ v\rangle \tag{I.1.16}$$

$\forall v \in V$, так как $\langle \nabla p(t,\ \cdot),\ v\rangle = 0$ (в смысле $D'(0,\ T)$).

Обратно, если $u(t,\ x) \in U$ удовлетворяет соотношению (I.1.16), то u является решением задачи (I.1.1) — (I.1.3) при некотором $p \in D'(\Omega_T)$.

Отметим, что тождество (I.1.16), в котором v пробегает пространство $\mathscr{H}^s$, $s > \frac{n}{2} + 1$, более широкое, чем V, эквивалентно операторному уравнению

$$\frac{du(t)}{dt} + \nu A u(t) + B(u(t)) = g(t), \tag{I.1.17}$$

где $u(t) = u(t,\ \cdot)$, $g(t) = g(t,\ \cdot)$ и обе части уравнения при почти всех $t \in [0,\ T]$ принадлежат $\mathscr{H}^{-s}$. Таким образом, любое решение $u(t,\ x) \in U$ задачи (I.1.17), (I.1.2) является решением задачи (I.1.1) — (I.1.3) с некоторым $p \in D'(\Omega_T)$. Ниже изучается задача Коши (I.1.17), (I.1.2). Отметим, что на классе функций $u \in U$ задача (I.1.17), (I.1.2) эквивалентна интегральному тождеству

$$(\mathrm{I}.1.18)\quad L_t(u,\ v)\equiv\langle u(t),\ v\rangle-\langle u_0,\ v\rangle+\int_0^t(\nu\langle Au(\tau),\ v\rangle+$$
$$+\langle B(u(\tau)),\ v\rangle)\,d\tau-\int_0^t\langle g(\tau),\ v\rangle\,d\tau=0\qquad\forall v\in\mathscr{H}^1,\ t\in[0,\ T].$$

§ 2. Пространственно-временные статистические решения

Введем пространство

$$(\mathrm{I}.2.1)\qquad Z\equiv Z_T\equiv L_2(0,\ T;\ \mathscr{H})\cap C(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s}),$$
$$\|u\|_{Z_T}\equiv\|u\|_{L_2(0,\ T;\ \mathscr{H})}+\|u\|_{C(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s})}.$$

Ниже через $\mathfrak{B}(X)$ обозначается σ-алгебра борелевских множеств топологического пространства X. Легко доказать, что $U\in\mathfrak{B}(Z)$, где U — пространство (I.1.14).

Пусть на $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ задана вероятностная мера $\mu(\omega_0)$, для которой конечна средняя энергия, т. е.

$$(\mathrm{I}.2.2)\qquad \overline{E}_0\equiv\int\|u\|^2\mu(du)<+\infty,^{1)}\quad\text{где}\quad\|.\|\equiv\|\cdot\|_0.$$

Определение 2.1. Пространственно-временным статистическим решением задачи (I.1.1) — (I.1.3), соответствующим начальной мере $\mu(\omega_0)$, называется вероятностная мера $P(\omega)$, $\omega\in\mathfrak{B}(Z)$, обладающая следующими свойствами:

1) Мера P сосредоточена на пространстве U: $P(U)=1$.

2) Существует такое множество $W\subset U$, замкнутое в U, что а) $W\in\in\mathfrak{B}(Z)$, б) $P(W)=1$, в) W состоит из решений уравнения (I.1.17).

3) Сужение меры P при $t=0$ совпадает с μ:

$$(\mathrm{I}.2.3)\quad \gamma_0^*P(\omega_0)\equiv P(\gamma_0\ \omega_0)\equiv P(\{u(t,\ x)\in Z\colon\ u(0,\ \cdot)\in\omega_0\})=$$
$$=\mu(\omega_0)\quad\forall\omega_0\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s}),$$

где γ_0 — оператор $u(t,\ \cdot)\to u(0,\ \cdot)$, непрерывно действующий из Z в $\mathscr{H}^{-s}$.

4) Справедливо энергетическое неравенство: при любом $\varepsilon>0$ для $t\in[0,\ T]$

$$(\mathrm{I}.2.4)\quad \int\left(\int_\Omega|u(t,\ x)|^2dx+(2\nu-\varepsilon)\int_0^t\int_\Omega|\nabla u(\tau,\ x)|^2dx\,d\tau\right)P(du)\leqslant$$
$$\leqslant\overline{E}_0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\|f(\tau,\ \cdot)\|^2_{H^{-1}}d\tau,$$

где

$$|u(t,\ x)|^2\equiv\sum_{j=1}^n|u^j(t,\ x)|^2,\qquad|\nabla u(\tau,\ x)|^2\equiv\sum_{i,\ j=1}^n\left|\frac{\partial u^j(\tau,\ x)}{\partial x^i}\right|^2.$$

---

[1]) Если не указана область интегрирования, то интеграл берется по множеству, на котором сосредоточена мера.

5) Имеет место оценка

$$(\mathrm{I}.2.5)\qquad \int \left(\|u\|^2_{\mathscr{L}^0_\infty}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{\mathscr{L}^{-s}_\infty}\right)P(du)\leqslant$$

$$\leqslant C(1+\overline{E}_0+\|f\|^2_{L^{-1}_\infty})<+\infty,\quad s>\frac{n}{2}+1.$$

Замечание 2.1. Мера μ продолжается с $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ до борелевской меры на $\mathscr{H}^{-s}$ по формуле $\mu(\omega_0)=\mu(\omega_0\cap\mathscr{H})$ для $\omega_0\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s})$. Именно в этом смысле понимается правая часть (I.2.3).

Замечание 2.2. Так как вложение $Z\subset\mathscr{C}^{-s}\equiv C(0, T; \mathscr{H}^{-s})$ непрерывно, то $\forall t\in[0, T]$ оператор γ_t: $u\to u(t, \cdot)$ непрерывно действует из Z в $\mathscr{H}^{-s}$. Поэтому $\forall t\in[0, T]$ на Z определен функционал $u\to\|u(t, \cdot)\|\leqslant\leqslant+\infty$ и этот функционал измерим по Борелю. Следовательно, интеграл в левой части (I.2.4) имеет смысл.

Ниже будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Если для начальной меры* $\mu(\omega_0)$ *выполнено условие* (I.2.2), *то существует отвечающее* μ *пространственно-временнóе статистическое решение* $P(du)$ *задачи* (I.1.1) — (I.1.3).

Теорема 2.2. *Если* $n\equiv\dim\Omega=2$, *то пространственно-временнóе решение* $P(du)$ *системы* (I.1.1), *отвечающее заданной начальной мере* $\mu(\omega_0)$, *единственно.*

Пространственно-временнóе статистическое решение часто будет называться просто статистическим решением.

§ 3. Галёркинские приближения статистического решения

1. Галёркинские приближения и энергетические оценки. Обозначим через V_m линейную оболочку функций $e_1(x), \ldots, e_m(x)$ и через π_m — оператор ортогонального проектирования в $\mathscr{H}^{-s}$ на V_m: $V_m=\pi_m\mathscr{H}^{-s}$. Под галёркинским приближением системы (I.1.1) (см. также (I.1.17)) понимается следующая динамическая система в V_m:

$$(\mathrm{I}.3.1)\qquad \frac{\partial u_m(t)}{\partial t}+\pi_m[\nu Au_m(t)+B(u_m(t))]=\pi_m g(t, \cdot),\quad t\in[0, T],$$

где

$$u_m(t, x)=\sum_{k=1}^m u_{mk}(t)e_k(x),\quad x\in\Omega,\quad u_m(t)\equiv u_m(t, \cdot).$$

При $t=0$ задается начальное условие

$$(\mathrm{I}.3.2)\qquad \gamma_0 u_m\equiv u_m(0)=\pi_m u_0\in V_m.$$

Лемма 3.1. *Решение* $u_m(t)$ *задачи* (I.3.1) — (I.3.2) *существует и единственно при* $0\leqslant t\leqslant T$; $u_m\in U$, *причем для любого* $\varepsilon>0$

$$(\mathrm{I}.3.3)\qquad \|u_m(t)\|^2+(2\nu-\varepsilon)\int_0^t\|u_m(\tau)\|_1^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\|u_m(0)\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\|f(\tau)\|^2_{H^{-1}}\,d\tau,\quad t\in[0, T].$$

Действительно, умножим скалярно обе части (I.3.1) на $u_m(t)$ и проинтегрируем по t. Тогда получим:

$$\text{(I.3.4)}\quad \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2+\int_0^t [\nu\langle Au_m(\tau),\ u_m(\tau)\rangle+\langle B(u_m(\tau)),\ u_m(\tau)\rangle]\,d\tau=$$

$$=\int_0^t \langle g(\tau),\ u_m(\tau)\rangle\,d\tau+\frac{1}{2}\,\|u_m(0)\|^2.$$

Второе слагаемое под знаком интеграла в левой части равно нулю в силу (I.1.12), а первое слагаемое согласно (I.1.7) равно $\nu\,\|u_m(\tau)\|_1^2$. Учитывая, что для любого $\varepsilon>0$

$$|\langle g(\tau),\ u_m(\tau)\rangle|\leqslant\|f(\tau)\|_{H^{-1}}\|u_m(\tau)\|_1\leqslant\frac{1}{2}\left(\varepsilon\|u_m(\tau)\|_1^2+\frac{1}{\varepsilon}\|f(\tau)\|_{H^{-1}}^2\right),$$

из (I.3.4) получим (I.3.3). Из априорной оценки (I.3.3) вытекает существование решения $u_m(t)$ задачи (I.3.1) — (I.3.2) на всем интервале $[0, T]$. ■

Через S_m обозначим оператор, сопоставляющий начальному значению $u_m(0)\in V_m$ соответствующее решение $u_m(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, задачи (I.3.1) — (I.3.2).

Галёркинское приближение μ_m начальной меры μ определяется формулой

$$\text{(I.3.5)}\qquad \mu_m(\omega_0)=\mu(\pi_m^{-1}(\omega_0\cap V_m))\qquad \forall\omega_0\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}).$$

Легко показать, используя условие (I.2.2), что меры μ_m на $\mathscr{H}$ слабо сходятся к μ при $m\to\infty$.

Статистическое решение P_m задачи (I.3.1) — (I.3.2), соответствующее начальной мере μ_m, определяется формулой

$$\text{(I.3.6)}\qquad P_m(\omega)=\mu_m(S_m^{-1}\omega)\qquad \forall\omega\in\mathfrak{B}(Z),$$

где Z — пространство (I.2.1), $S_m^{-1}\omega$ — полный прообраз множества ω при отображении S_m: $V_m\to Z$. Так как $\mathfrak{B}(\mathscr{H})\subset\mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s})$, то для $\omega_0\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ множество $\gamma_0^{-1}\omega_0\in\mathfrak{B}(Z)$, где γ_0 — оператор $u\to u\,|_{t=0}$, переводящий Z в $\mathscr{H}^{-s}$. Поэтому в силу (I.3.6)

$$\text{(I.3.7)}\qquad P_m(\gamma_0^{-1}\omega_0)=\mu_m(\omega_0)\qquad \forall\omega_0\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}).$$

Из (I.3.7) и (I.3.5) следует, что для любого μ_m-интегрируемого функционала $\varphi(u)$, измеримого по Борелю на $\mathscr{H}$,

$$\text{(I.3.8)}\qquad \int\varphi(\gamma_0u_m)\,P_m(du_m)=\int\varphi(u_0)\,\mu_m(du_0)=\int\varphi(\pi_mu_0)\,\mu(du_0).$$

2. Равномерные по m оценки. Докажем, что для мер P_m имеют место равномерные по m оценки вида (I.2.4) — (I.2.5). В самом деле, так как в силу (I.3.6) мера P_m сосредоточена на решениях уравнений (I.3.1), то, интегрируя обе части (I.3.3) по мере $P_m(du_m)$, получим, используя (I.3.8) и (I.2.2), что аналогично (I.2.4)

$$\text{(I.3.9)}\qquad \int\left(\|u_m(t)\|^2+(2\nu-\varepsilon)\int_0^t\|u_m(\tau)\|_1^2\,d\tau\right)P_m(du_m)\leqslant$$

$$\leqslant\int\left(\|\pi_mu_0\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\|f(\tau)\|_{H^{-1}}^2\,d\tau\right)\mu(du_0)\leqslant\bar{E}_0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\|f(\tau)\|_{H^{-1}}^2\,d\tau.$$

Далее, умножая скалярно обе части (I.3.1) на функцию $v\in\mathcal{H}^s$ и используя свойства операторов A и B, выводим

$$\text{(I.3.10)}\quad \left|\left\langle\frac{\partial u_m(t)}{\partial t},\ v\right\rangle\right|\leqslant|\langle u_m(t),\ A\pi_m v\rangle|+|\langle B(u_m(t)),\ \pi_m v\rangle|+ \\ +|\langle g(t),\ \pi_m v\rangle|\leqslant C(\|u_m(t)\|+\|u_m(t)\|^2+\|f(t)\|_{H^{-1}})\|v\|_s,$$

поскольку π_m: $\mathcal{H}^s\to V_m$ — ортогональный проектор в $\mathcal{H}^s$ согласно (I.1.7). Отметим, что в силу (I.3.3)

$$\|u_m\|^2_{\mathcal{L}^0_\infty}\leqslant\|u_m(0)\|^2+C\|f\|^2_{L^{-1}_\infty}.$$

Поэтому из (I.3.10) имеем оценку

$$\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|_{\mathcal{L}^{-s}_\infty}\leqslant C(1+\|u_m(0)\|^2+\|f\|^2_{L^{-1}_\infty}).$$

Интегрируя обе части двух последних неравенств по мере $P_m(du_m)$, получим, используя (I.3.8) и (I.2.2), оценку, аналогичную (I.2.5):

$$\text{(I.3.11)}\quad \int\left(\|u_m\|^2_{\mathcal{L}^0_\infty}+\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|_{\mathcal{L}^{-s}_\infty}\right)P_m(du_m)\leqslant \\ \leqslant C(1+\bar{E}_0+\|f\|^2_{L^{-1}_\infty})<+\infty,\qquad m\geqslant 1,$$

где C не зависит от m. ■

Из (I.3.9) и (I.3.11) следует, что меры P_m удовлетворяют условиям, аналогичным 4) и 5) определения 2.1 с константой C, не зависящей от m. Очевидно, P_m удовлетворяют также условиям, аналогичным 1)—3) этого определения. Следовательно, P_m является пространственно-временным статистическим решением системы (I.3.1).

§ 4. Слабая компактность статистических решений галёркинских уравнений

1. Теорема вложения Дубинского. Пусть X_{-1}, X_0, X_1 — абстрактные гильбертовы пространства, для которых вложения

(I.4.1) $X_1\subset X_0\subset X_{-1}$ непрерывны, а $X_1\subset X_0$ вполне непрерывно.

Тогда справедлива следующая теорема Ю. А. Дубинского [30].

Теорема 4.1. *Пусть $1<p<+\infty$ и $\mathcal{M}$ — ограниченное множество в $L_p(0,\ T;\ X_1)$, состоящее из функций $u(t)$, равностепенно непрерывных в $C(0,\ T;\ X_{-1})$. Тогда $\mathcal{M}$ относительно компактно в $L_p(0,\ T;\ X_0)$ и в $C(0,\ T;\ X_{-1})$.*

Из этой теоремы вытекает следующая лемма (см. (I.1.14) и (I.2.1)).

Лемма 4.1. *Вложение $U\subset Z$ вполне непрерывно.*

Для доказательства достаточно проверить, что $\forall\rho>0$ шар

$$K_\rho(U)\equiv\left\{u\in U:\ \|u\|_U\equiv\|u\|_{\mathcal{L}^1_2}+\|u\|_{\mathcal{L}^0_\infty}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{\mathcal{L}^{-s}_\infty}\leqslant\rho\right\}$$

предкомпактен в $\mathcal{L}_2\equiv L_2(0,\ T;\ \mathcal{H})$ и в $\mathcal{C}^{-s}\equiv C(0,\ T;\ \mathcal{H}^{-s})$. С этой целью применим теорему 4.1 в случае, когда $p=2$,

$$X_1=\mathcal{H}^1,\quad X_0=\mathcal{H},\quad X_{-1}=\mathcal{H}^{-s}\ \text{и}\ \mathcal{M}=K_\rho(U).$$

Условие (I.4.1) при этом выполняется и ограниченность $\mathcal{M}$ в $\mathcal{L}^1_2\equiv L_2(0,\ T;\ \mathcal{H}^1)$ очевидна, поэтому остается доказать равностепенную непрерывность в $C(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s})$ функций из $\mathscr{M}$, которая вытекает из оценки

$$\|u(t_1)-u(t_2)\|_{-s}=\left\|\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial\tau}\,d\tau\right\|_{-s}\leqslant|t_1-t_2|\cdot\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{\mathscr{L}_\infty^{-s}}\leqslant\rho\,|t_1-t_2|$$

для любых $t_1,\ t_2\in[0,\ T]$. ■

2. Компактность семейства мер $\{P_m\}$. Из оценок (I.3.9) — (I.3.11) следует (при $\varepsilon<2\nu$): для $m\in\mathbb{N}$

(I.4.2) $$\int\|u\|_U\,P_m(du)\leqslant C<+\infty,\ C \text{ не зависит от } m.$$

Теорема 4.2. *Семейство мер $\{P_m\}$, $m\in\mathbb{N}$, определенных соотношением* (I.3.6), *слабо компактно на пространстве Z.*

Доказательство. Проверим, что семейство $\{P_m\}$ удовлетворяет условиям теоремы Прохорова: а) $\sup\limits_m\{P_m(Z)\}<+\infty$ и б) для любого $\varepsilon>0$ существует такой предкомпакт $\mathscr{K}$ в Z, что $\sup\limits_m P_m(Z\setminus\mathscr{K})<\varepsilon$. Условие а) выполняется, так как P_m — вероятностные меры: $P_m(Z)=1$. В качестве предкомпакта $\mathscr{K}$ возьмем шар $K_\rho=K_\rho(U)$ достаточно большого радиуса ρ (K_ρ — предкомпакт в Z по лемме 4.1). По неравенству Чебышева из (I.4.2) выводим:

$$P_m(Z\setminus K_\rho)=\int\limits_{Z\setminus K_\rho}P_m(du)\leqslant\frac{1}{\rho}\int\limits_Z\|u\|_U\,P_m(du)\leqslant\frac{C}{\rho}.$$

Отсюда следует справедливость условия б). ■

В силу теоремы 4.2 из последовательности мер $P_m(du)$ можно выбрать подпоследовательность $P_k(du)$, слабо сходящуюся на Z к некоторой мере $P(du)$:

(I.4.3) $$\int f(u)\,P_k(du)\to\int f(u)\,P(du)\qquad\forall f(\cdot)\in C_b(Z)\,^{1)}.$$

Положив здесь $f(u)\equiv1$, получаем, что $P(du)$ — вероятностная мера.

§ 5. Мера P — статистическое решение. Свойства меры P

1. Мера P удовлетворяет условиям 1), 4), 5) определения 2.1. Из (I.4.2) следует выполнение аналогичной оценки для предельной меры:

(I.5.1) $$\int\|u\|_U\,P(du)<+\infty.$$

Действительно, в силу (I.1.7)

$$\|\pi_r u\|_1^2\leqslant\lambda_r\|u\|^2\qquad\forall r\in\mathbb{N},$$

и, следовательно, для любого $t\in[0,\ T]$ функционал

$$u\to\int_0^t\|\pi_r u(\tau)\|_1^2\,d\tau=\|\pi_r u\|^2_{L_2(0,\ t;\ \mathscr{H}^1)}$$

непрерывен на Z. Для любого функционала $f(u)\geqslant0$ положим

(I.5.2) $\{f(u)\}_R=f(u)$ для $f(u)\leqslant R$, $\{f(u)\}_R=R$ для $f(u)>R$.

---

[1]) Через $C_b(X)$ обозначается множество непрерывных, ограниченных функций, заданных на топологическом пространстве X.

Тогда из (I.3.9) вытекает: при $r\leqslant k$ и $0<\varepsilon<2\nu$

$$\text{(I.5.3)}\qquad \int \{\|\pi_r u(t)\|^2+(2\nu-\varepsilon)\|\pi_r u\|_{L_2(0,\,t;\,\mathscr{H}^1)}\}_R\, P_k(du)\leqslant \leqslant \bar{E}_0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|f(\tau)\|^2_{H^{-1}}\,d\tau.$$

Переходя в (I.5.3) к пределу при $k\to\infty$, получим такую же оценку, в которой P_k заменено на P. Переходя в этой оценке к пределу при $R,\ r\to\infty$, с помоощью теоремы Б. Леви получаем оценку (I.2.4).

Аналогично доказывается оценка (I.2.5). Из (I.2.4) и (I.2.5) вытекает (I.5.1). Следовательно, мера P сосредоточена на U: $P(U)=1$.

2. Мера P удовлетворяет условию 2) определения 2.1 Решение u_m задачи (I.3.1) — (I.3.2) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\text{(I.5.4)}\quad L_t(u_m,\ v_r)=0\quad \forall v_r\in V_r,\quad r\leqslant m,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где $L_t(\cdot,\ \cdot)$ определено в (I.1.18). Обозначим через $C_{b,0}(Z)$ множество непрерывных, ограниченных функционалов φ на Z, обращающихся в нуль вне некоторого ограниченного в Z множества, зависящего от φ. Умножим (I.5.4) на $\varphi(u_m)\in C_{b,0}(Z)$ и проинтегрируем по мере $P_m(du_m)$, которая сосредоточена на решениях задачи (I.3.1) — (I.3.2). Заменяя u_m на u, получим при этом

$$\text{(I.5.5)}\qquad \int L_t(u,\ v_r)\,\varphi(u)\,P_m(du)=0\qquad \forall m\geqslant r.$$

Функционал $L_t(\cdot,v_r)$ непрерывен на Z. Действительно, непрерывность функционала

$$u\to\langle u(t),\ v_r\rangle-\langle u(0),\ v_r\rangle$$

на Z очевидна, поскольку $Z\subset C(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s})$, а непрерывность на Z функционала

$$u\to\int_0^t(\nu\langle Au(\tau),\ v_r\rangle+\langle B(u(\tau)),\ v_r\rangle)\,d\tau$$

вытекает из (I.1.7) и (I.1.10′), поскольку $v_r\in V_r\subset\mathscr{H}^s$, и из вложения $Z\subset\mathscr{L}_2$; поэтому из (I.5.5) при $m=k\to\infty$ в силу (I.4.3) получаем, что для любого $t\in[0,\ T]$

$$\int L_t(u,\ v_r)\,\varphi(u)\,P(du)=0\quad \forall\varphi(u)\in C_{b,0}(Z),\quad \forall v_r\in V_r,\quad r\in\mathbb{N}.$$

Отсюда выводится существование такого $\mathfrak{B}(Z)$-измеримого множества $W\subset\subset U$ полной меры $P(W)=1$, что для любого $u\in W$ справедливо тождество (I.1.18).

3. Мера P удовлетворяет условию 3) определения 2.1. Обозначим через $\mu_*(\omega_0)$ меру γ_0^*P (см. (I.2.3)), а через $\tilde{\mu}_*$ — характеристический функционал меры μ_*. Тогда, положив в (I.4.3)

$$f(u)\equiv\exp\,(i\langle\gamma_0 u,\ v\rangle),\ v\in\mathscr{H}^s,$$

получим

$$\tilde{\mu}_*(v)\equiv\int e^{i\langle u_0,\,v\rangle}\mu_*(du_0)=\int e^{i\langle\gamma_0 u,\,v\rangle}P(du)=\lim_{k\to\infty}\int e^{i\langle\gamma_0 u,\,v\rangle}P_k(du);$$

поэтому согласно (I.3.8)

$$\tilde{\mu}_*(v)=\lim_{k\to\infty}\tilde{\mu}_k(v)=\lim_{k\to\infty}\tilde{\mu}(\pi_k v)=\tilde{\mu}(v),$$

где $\widetilde{\mu}_k$ и $\widetilde{\mu}$ — характеристические функционалы соответственно мер μ_k и μ. Следовательно, меры μ_* и μ совпадают на цилиндрических множествах $\omega_0 \subset \mathscr{H}^{-s}$, а потому и на всех $\omega_0 \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s})$, так как $\mathscr{H}^{-s}$ сепарабельно (см. [24]). ■

Таким образом, построенная мера P удовлетворяет всем условиям определения 2.1 и, следовательно, является пространственно-временным статистическим решением системы Навье — Стокса (I.1.1), отвечающим начальной мере μ. Теорема 2.1 доказана.

4. Обобщение энергетического неравенства. Теорема 5.1. *Пусть начальная мера* $\mu(\omega_0)$ *удовлетворяет оценке*

$$\overline{E}_0^\alpha \equiv \int \|u_0\|^{2+2\alpha} \mu(du_0) < +\infty \tag{I.5.6}$$

с $\alpha > 0$. *Тогда для статистического решения* $P(du)$, *построенного выше, справедливы оценки*

$$\int \Big(\operatorname*{sup\,ess}_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|^{2+2\alpha} + \int_0^T \|u(\tau)\|_1^2 \|u(\tau)\|^{2\alpha} d\tau \Big) P(du) \leqslant \leqslant C \int \Big(\|u_0\|^2 + \int_0^T \|g(\tau)\|_{-1}^2 d\tau \Big)^{1+\alpha} \mu(du_0), \tag{I.5.7}$$

$$\int \|u(t)\|^{2+2\alpha} P(du) \leqslant \leqslant C \int \Big(\|u_0\|^2 + \int_0^T \|g(\tau)\|_{-1}^2 d\tau \Big)^{1+\alpha} \mu(du_0) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{I.5.8}$$

Доказательство. Из неравенства (I.3.3) вытекает, что для решения $u_m(t)$ задачи (I.3.1), (I.3.2) имеет место оценка

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_m(t)\|^r \leqslant C_1 \Big(\|u_m(0)\|^2 + \int_0^T \|g(\tau)\|_{-1}^2 d\tau \Big)^{r/2} \qquad \forall r > 0,$$

где C_1 зависит лишь от r и ν. Отсюда и снова из неравенства (I.3.3) следует, что при $\alpha > 0$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_m(t)\|^{2+2\alpha} + \int_0^T \|u_m(\tau)\|_1^2 \|u_m(\tau)\|^{2\alpha} d\tau \leqslant \leqslant C \Big(\|u_m(0)\|^2 + \int_0^T \|g(\tau)\|_{-1}^2 d\tau \Big)^{1+\alpha}. \tag{I.5.9}$$

Интегрируя обе части (I.5.9) по $\mu(du_0)$ и устремляя $m \to \infty$, мы получим аналогично п. 1 этого параграфа неравенства (I.5.7) и (I.5.8). ■

5. Существование индивидуальных решений задачи (I.1.1), (I.1.2), (I.1.3). Обозначим: $W_0 = \gamma_0 W \cap \mathscr{H}$, где W введено в п. 2, $P(W) = 1$. Легко установить, что $\mu(W_0) = 1$, $W_0 \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Для любой функции $u_0(x) \in W_0$ существует такое $u(t, x) \in W$, что $\gamma_0 u = u_0$. Так как W состоит из решений (I.1.1), удовлетворяющих (I.1.3), то $u(t, x)$ есть решение задачи (I.1.1) — (I.1.3) при начальном условии u_0.

Пусть задана функция $u_0(x) \in \mathscr{H}$ в (I.1.2). Докажем разрешимость задачи (I.1.1) — (I.1.3).

Обозначим через $\delta_{u_0}(\omega_0)$ δ-меру на $\mathscr{H}$, сосредоточенную в u_0, т.е. $\delta_{u_0}(\omega_0) = 1$, если $u_0 \in \omega_0$, и $\delta_{u_0}(\omega_0) = 0$, если $u_0 \notin \omega_0$. Очевидно, мера $\mu(\omega_0) \equiv \delta_{u_0}(\omega_0)$ удовлетворяет условию (I.2.2), поэтому в силу теоремы 2.1 существует такое пространственно-временнóе статистическое решение P, что $\gamma_0^* P = \delta_{u_0}$. Легко видеть, что для $\mu = \delta_{u_0}$ множество W_0 содержит u_0, поскольку $\mu(W_0) = \delta_{u_0}(W_0) = 1$; следовательно, из сказанного выше вытекает существование такой функции $u(t, x) \in W$, что $\gamma_0 u = u_0$. Функция $u(t, x)$ есть решение задачи (I.1.1) — (I.1.3) в смысле (I.1.18). Таким образом, из разрешимости статистической задачи $\mu \to P$ вытекает, как частный случай, разрешимость индивидуальной задачи $u_0(x) \to u(t, x)$ (ср. [19]).

§ 6. Теорема единственности статистических решений

В этом параграфе будет показано, что в тех случаях, когда задача (I.1.1) — (I.1.3) однозначно разрешима, пространственно-временнóе статистическое решение P однозначно определяется начальной мерой μ.

Предложение 6.1. *Для любого множества* $Q \in \mathfrak{B}(Z)$

$$P(Q) \leqslant \mu(\gamma_0 Q). \tag{I.6.1}$$

Для доказательства сначала устанавливается, что $\gamma_0 Q \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s})$. Это вытекает из того, что $\gamma_0 Q$ открыто в $\mathscr{H}^{-s}$, если Q открыто в Z. Затем из (I.2.3) получаем

$$\mu(\gamma_0 Q) = P(\gamma_0^{-1}(\gamma_0 Q)) \geqslant P(Q),$$

так как $\gamma_0^{-1}(\gamma_0 Q) \supset Q$. ■

Теорема 6.1. *Пусть задача Коши* (I.1.1) — (I.1.2) *имеет единственное решение* $u(t, x)$ *в классе* U (*в смысле* (I.1.18)) *при любом начальном данном* $u_0 \in \mathscr{H}$. *Тогда пространственно-временнóе статистическое решение* $P(du)$ (*в смысле определения* 2.1) *однозначно определяется начальной мерой* $\mu(\omega_0)$, *удовлетворяющей условию* (I.2.2):

$$P(Q) = \mu(\gamma_0 Q) \quad \forall Q \in \mathfrak{B}(Z). \tag{I.6.2}$$

Действительно, по условию теоремы для любого элемента $u_0 \in \mathscr{H}$ в множестве $\gamma_0^{-1}u_0$ существует не более одного элемента из W, так как $W \subset U$. Поэтому

$$Q \cap W = [\gamma_0^{-1}(\gamma_0(Q \cap W))] \cap W,$$

поскольку $\gamma_0(Q \cap W) \subset \gamma_0 U \subset \mathscr{H}$ согласно замечанию 1.1. Следовательно, в силу (I.2.3) и соотношения $P(W) = 1$ получаем (I.6.2):

$$P(Q) = P(Q \cap W) = P(\gamma_0^{-1}(\gamma_0(Q \cap W))) = \mu(\gamma_0(Q \cap W)) = \mu(\gamma_0(Q)).$$

Последнее равенство вытекает из того, что

$$\gamma_0(Q \cap W) = \gamma_0 Q \cap \gamma_0 W \quad \text{и} \quad \mu(\gamma_0 W) = 1.$$

Действительно, вследствие (I.6.1) и $W \in \mathfrak{B}(Z)$ имеем $\mu(\gamma_0 W) \geqslant P(W) = 1$. ■

Из доказанной теоремы 6.1 вытекает теорема 2.2. Действительно, по теореме единственности О. А. Ладыженской ([37], [40]) в двумерном случае, т. е. когда $n \equiv \dim \Omega = 2$, задача (I.1.1) — (I.1.3) имеет единственное решение в классе U. ■

ГЛАВА II
СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

§ 1. Стохастическая система Навье — Стокса. Функциональные пространства

1. Краевая задача для стохастической системы Навье — Стокса. В правую часть системы (I.1.1) добавим флуктуации внешних сил типа белого шума

$$\text{(II.1.1)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}+(u,\ \nabla)u=-\nabla p+\nu\Delta u+f+\frac{\partial w(t,\ x)}{\partial t}, \qquad (\nabla,\ u)=0,$$

где $f(t,\ x)\in L_\infty^{-1}\equiv L_\infty(0,\ T;\ H^{-1})$, как и в главе I, а

$$w(t,\ x)\in\mathscr{C}\equiv C(0,\ T;\ H),$$

$w(t,\ x)$ — винеровский процесс со значениями в $H\equiv[L_2(\Omega)]^n$ (см. ниже). Начальное и краевое условия (I.1.2) — (I.1.3) оставим без изменений:

$$\text{(II.1.2)} \qquad u|_{t=0}=u_0(x),\quad x\in\Omega;\quad u|_{\partial\Omega}=0,\quad 0<t<T,$$

где $u_0(x)\in\mathscr{H}$ — случайная функция с распределением μ, как и в главе I. Предполагается, что случайные функции w и u_0 независимы (см. ниже п. 4) определения 2.1).

2. Функциональные пространства. Обозначим через

$$\mathscr{C}^{(\varkappa),\ -s}\equiv C^{(\varkappa)}(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s})$$

при $0<\varkappa<1$ и $s>\frac{n}{2}+1$ пространство функций

$$u(t,\ x)\equiv u(t)\in\mathscr{C}^{-s}\equiv C(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s}),$$

для которых конечна гёльдеровская полунорма

$$\|u\|_{\mathscr{C}^{(\varkappa),\ -s}}\equiv\sup_{0\leqslant t_1<t_2\leqslant T}\frac{\|u(t_1)-u(t_2)\|_{-s}}{|t_1-t_2|^{\varkappa}}.$$

Определим пространство $U^{(\varkappa)}$ траекторий системы (II.1.1):

$$\text{(II.1.3)} \qquad U^{(\varkappa)}=\mathscr{L}_2^1\cap\mathscr{C}^{(\varkappa),\ -s},\qquad \|u\|_{U^{(\varkappa)}}=\|u\|_{\mathscr{L}_2^1}+\|u\|_{\mathscr{C}^{(\varkappa),\ -s}}.$$

Обозначим через

$$h_T(\rho)=\left(|\rho|\ln\frac{2T}{|\rho|}\right)^{1/2}$$

модуль непрерывности Леви [41]. Определим пространство UL, аналогичное $U^{(\varkappa)}$:

$$\text{(II.1.3}'\text{)} \qquad UL=\mathscr{L}_2^1\cap\mathscr{C}L^{-s},\qquad \|u\|_{UL}=\|u\|_{\mathscr{L}_2^1}+\|u\|_{\mathscr{C}L^{-s}}.$$

Здесь $\mathscr{C}L^{-s}$ — пространство функций $u(t,x)\in\mathscr{C}^{-s}$, для которых конечна полунорма

$$\text{(II.1.3}''\text{)} \qquad \|u\|_{\mathscr{C}L^{-s}}\equiv\sup_{0\leqslant t_1<t_2\leqslant T}\frac{\|u(t_1)-u(t_2)\|_{-s}}{h_T(t_1-t_2)}.$$

3. Сведение системы (II.1.1) к операторному уравнению. Задача (II.1.1), (II.1.2) понимается следующим образом: даны $u_0(x)\in\mathscr{H}$, $f(t,\ x)\in L_\infty^{-1}$ и $w(t,\ x)\in\mathscr{C}$; требуется найти функции $u(t,\ x)\in Z$ и $p(t,\ x)\in D'(\Omega_T)$, где $\Omega_T=(0,\ T)\times\Omega$, удовлетворяющие системе (II.1.1) в смысле обобщенных функций на Ω_T и начальному условию (II.1.2). Отметим, что краевое условие $u|_{\partial\Omega}$ из (II.1.2) выполняется автоматически для любой функции $u\in Z$.

Исключим давление $p(t, x)$ из (II.1.1). Для этого обозначим через $\{\cdot, \cdot\}$ скалярное произведение в $L_2 \equiv L_2(0, T; H) = [L_2(\Omega_T)]^n$:

$$(\text{II.1.4}) \qquad \{u, v\} = \int_0^T \langle u(t, \cdot), v(t, \cdot)\rangle\, dt \qquad \forall u, v \in L_2.$$

Так же будем обозначать скалярное произведение в $L_2(0, T; \mathscr{H})$ и различные расширения этих скалярных произведений. Пусть $\mathscr{D}_0' \equiv D'(0, T; \mathscr{H}^{-s})$ — двойственное пространство к $\mathscr{D}_0 \equiv C_0^\infty(0, T; \mathscr{H}^s)$ относительно соотношения двойственности (II.1.4). Обозначим при $u(t, x) \in Z$ через $\mathscr{A}u$ обобщенную функцию

$$(\text{II.1.5}) \qquad \mathscr{A}u \equiv \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \nu A u(t) + B(u(t)) - g(t, x) \in \mathscr{D}_0',$$

где приняты те же обозначения, что в (I.1.17). Тогда система (II.1.1) для $u \in Z$ и $p \in D'(\Omega_T)$, $f \in L_\infty^{-1}$, $w \in \mathscr{C}$ эквивалентна следующему интегральному тождеству (ср. (I.1.16)): $\forall v \in C_0^\infty(0, T; V)$

$$(\text{II.1.6}) \qquad \{\mathscr{A}u, v\} = \left\{\frac{\partial \pi w}{\partial t}, v\right\},$$

где π: $H \to \mathscr{H}$ — ортопроектор в H на $\mathscr{H}$.

Действительно, (II.1.6) вытекает из (II.1.1), поскольку $\{\nabla p, v\} = 0$. Обратно, из (II.1.6) следует, что существует $p(t, x) \in D'(\Omega_T)$, удовлетворяющая (II.1.1) вместе с $u(t, x)$.

Мы будем в дальнейшем (как и в главе I) пользоваться более сильным определением решения системы (II.1.1), чем просто в смысле обобщенных функций на Ω_T. А именно, потребуем, чтобы тождество (II.1.6) выполнялось для всех пробных функций v из класса $\mathscr{D}_0 \equiv C_0^\infty(0, T; \mathscr{H}^s)$, более широкого, чем $C_0^\infty(0, T; V)$. Такое требование эквивалентно операторному уравнению в $\mathscr{H}^{-s}$ (ср. (I.1.17)) вида

$$(\text{II.1.7}) \qquad \mathscr{A}u = \frac{\partial \pi w}{\partial t},$$

где равенство понимается как равенство в $\mathscr{D}_0'$.

Построим гильбертово пространство $\mathscr{V}^{-s} \subset \mathscr{D}_0'$. Для этого сначала определим пространство пробных функций $\mathring{\mathscr{V}}^s \equiv \mathring{H}^1(0, T; \mathscr{H}^s)$, где $s > \frac{n}{2} + 1$, как пространство Соболева функций $t \to v(t) \in \mathscr{H}^s$, полученное замыканием $C_0^\infty(0, T; \mathscr{H}^s)$ в метрике

$$\|v\|^2_{\mathring{\mathscr{V}}^s} \equiv \|v\|^2_{\mathscr{L}_2^s} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{\mathscr{L}_2^s}$$

(обозначения $\mathscr{L}_2^s$ и $\mathscr{H}^s$ см. в § 1 главы I). Очевидно, $\mathring{\mathscr{V}}^s$ непрерывно вкладывается в пространство $\mathscr{C}^{(0),s} \equiv C(0, T; \mathscr{H}^s)$ непрерывных функций от $t \in [0, T]$ со значениями в $\mathscr{H}^s$. Обозначим через $\mathscr{V}^{-s}$ пространство, сопряженное к $\mathring{\mathscr{V}}^s$ относительно соотношения двойственности, порожденного скалярным произведением в $\mathscr{L}_2 \equiv L_2(0, T; \mathscr{H})$. Очевидно, можно считать, что $\mathscr{V}^{-s} \subset \mathscr{D}_0'$.

Предложение 1.1. *Оператор $\mathscr{A}$ непрерывно действует из Z в пространство $\mathscr{V}^{-s}$, если $s > \frac{n}{2} + 1$.*

Для доказательства достаточно установить оценку

$$\text{(II.1.8)} \qquad |\{\mathcal{A}u, v\}| \leqslant C(1 + \|u\|_{\mathrm{Z}}^2)\|v\|_{\mathring{\mathscr{V}}^s}.$$

Например, для нелинейного оператора $B(u)$, входящего в $\mathcal{A}u$, такая оценка вытекает из (I.1.10′), (I.1.11), (I.1.13) и вложения $\mathring{\mathscr{V}}^s \subset \mathscr{C}^{(0),s}$. ■

§ 2. Статистические решения стохастической системы Навье — Стокса

Пусть $\Lambda(dw)$ — фиксированная винеровская мера на $\mathscr{C} \equiv C(0, T; H)$, заданная на $\mathfrak{B}(\mathscr{C})$. Это означает, по определению, что [1])

$$\text{(II.2.1)} \qquad \widetilde{\Lambda}(v) \equiv \int e^{i\{w,\, v\}} \Lambda(dw) = e^{-\frac{1}{2}B(v,\, v)} \quad \forall v \in \mathscr{D} \equiv [C_0^\infty((0, T) \times \Omega)]^n,$$

где

$$\text{(II.2.2)} \qquad B(v, v) = \int_0^T \int_0^T \min(t, s) \langle Qv(t, \cdot), v(s, \cdot)\rangle \, dt\, ds,$$

а Q — самосопряженный неотрицательный ядерный оператор в H (он называется корреляционным оператором винеровской меры Λ)

$$\text{(II.2.3)} \qquad Q' = Q \geqslant 0, \quad \overline{S} \equiv \operatorname{Sp} Q < +\infty.$$

Из (II.2.1)—(II.2.3) вытекает

$$\text{(II.2.4)} \qquad \int \left(\int_\Omega |w(t, x)|^2 dx \right) \Lambda(dw) = t \cdot \overline{S} < +\infty,$$

где

$$|w(t, x)|^2 = \sum_{k=1}^n |w^k(t, x)|^2.$$

Отметим, что для любого оператора Q со свойствами (II.2.3) существует борелевская мера $\Lambda(dw)$ на $\mathscr{C}$, удовлетворяющая (II.2.1), (II.2.2).

На вероятностном пространстве $(\mathscr{C}, \mathfrak{B}(\mathscr{C}), \Lambda(dw))$ определим случайную функцию

$$w \to \xi(w) = \frac{\partial \pi w}{\partial t} \in \mathscr{V}^{-s}, \qquad s > \frac{n}{2} + 1.$$

Обозначим через $\mathscr{N}$ борелевскую меру на $\mathscr{V}^{-s}$, являющуюся распределением случайной функции ξ,

$$\text{(II.2.5)} \qquad \mathscr{N} = G^*\Lambda, \text{ где } G\colon w \to \frac{\partial \pi w}{\partial t} \in \mathscr{V}^{-s};$$

$$G^*\Lambda(B) \equiv \Lambda(G^{-1}B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathscr{V}^{-s}).$$

Тогда ввиду (II.2.1) для $v \in \mathring{\mathscr{V}}^s$

$$\text{(II.2.6)} \qquad \widetilde{\mathscr{N}}(v) \equiv \int_{\mathscr{V}^{-s}} e^{i\{\xi,\, v\}} \mathscr{N}(d\xi) = \int_{\mathscr{C}} e^{i\left\{\frac{\partial w}{\partial t},\, v\right\}} \Lambda(dw) = \widetilde{\Lambda}\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Далее, пусть на $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ задана начальная вероятностная мера μ, удовлетворяющая условию (I.5.6) с некоторым $\alpha > 0$.

[1]) Здесь, как и везде ниже, принято следующее обозначение: если $m(\cdot)$ — мера, то $\widetilde{m}(\cdot)$ — ее характеристический функционал.

Предполагается, что случайное поле $w(t, x)$, входящее в (II.1.1), имеет распределение $\Lambda(dw)$, а начальное поле $u_0(x)$ в (II.1.2) имеет распределение $\mu(du_0)$, причем поля w и u_0 независимы (см. п. 2)—4) следующего определения).

Определение 2.1. Пространственно-временны́м статистическим решением стохастической задачи Коши (II.1.1), (II.1.2), соответствующим заданным мерам $\mu(du_0)$ и $\Lambda(dw)$, называется вероятностная мера $P(\omega)$, $\omega \in \in \mathfrak{B}(Z)$, обладающая следующими свойствами:

1) Если в (I.5.6) $\alpha < 1$, то мера P сосредоточена на $U^{(\varkappa)} \in \mathfrak{B}(Z)$, где $\varkappa = \frac{\alpha}{\alpha+1}$. Если же $\alpha \geqslant 1$, то мера P сосредочена на $UL \in \mathfrak{B}(Z)$. (В дальнейшем, для краткости, $U^{(\varkappa)}$ и UL в обоих случаях будем обозначать просто через U.)

2) Случайная функция $\gamma_0 u$, определенная на пространстве $(U, \mathfrak{B}(U), P)$, со значениями в $\mathscr{H}^{-s}$, имеет распределение μ, т. е. $\gamma_0^* P = \mu$ (см. (I.2.3)).

3) Случайная функция $\mathscr{A}u$ со значениями в $\mathscr{V}^{-s}$, определенная на $(U, \mathfrak{B}(U), P)$, имеет распределение $\mathscr{N}$, заданное соотношением (II.2.5): $\mathscr{A}^* P = \mathscr{N}$, т. е.

$$P(\{u \in U\colon \mathscr{A}u \in B\}) = \mathscr{N}(B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathscr{V}^{-s}).$$

4) Случайные функции $\gamma_0 u$ и $\mathscr{A}u$ независимы:

$$P(\{u \in U\colon \gamma_0 u \in B_1,\ \mathscr{A}u \in B_2\}) = \mu(B_1)\,\mathscr{N}(B_2)$$
$$\forall B_1 \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s}), \qquad \forall B_2 \in \mathfrak{B}(\mathscr{V}^{-s}).$$

5) Справедливо энергетическое неравенство

$$\text{(II.2.7)} \qquad \int \left(\| u(t) \|^{2+2\alpha} + \int_0^t \| u(\tau) \|_1^2 \| u(\tau) \|^{2\alpha} d\tau \right) P(du) \leqslant$$
$$\leqslant a_\alpha + b_\alpha t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где a_α и b_α — константы, зависящие от $\overline{E}_0^\alpha$ (см. (I.5.6)), $\overline{S}$, $\| f \|_{L_\infty^{-1}}$ и не зависящие от $T > 0$.

6) При $\alpha < 1$ справедлива оценка средней нормы Гёльдера с показателем $\varkappa = \alpha/(1+\alpha)$

$$\text{(II.2.8)} \qquad \int \| u \|^{1+\alpha}_{\mathscr{C}^{(\varkappa)}, -s} P(du) \leqslant C_{\alpha, T} < +\infty.$$

Если же $\alpha \geqslant 1$, то имеет место оценка среднего модуля непрерывности Леви:

$$\text{(II.2.9)} \qquad \int \| u \|^{1+\alpha}_{\mathscr{C}L^{-s}} P(du) \leqslant C_{\alpha, T} < +\infty.$$

Отметим, что условия 2) — 4) можно объединить в одно:
Мера P удовлетворяет интегральному тождеству

$$\text{(II.2.10)} \qquad \int \exp\left(i\left[\langle \gamma_0 u, v_0 \rangle + \{\mathscr{A}u, v\}\right]\right) P(du) \equiv$$
$$\equiv \tilde{\mu}(v_0)\,\tilde{\Lambda}\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right) \qquad \forall v_0 \in \mathscr{H}^s, \quad \forall v \in \mathring{\mathscr{V}}^s.$$

Ниже будет доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть для начальной меры* μ *выполнено условие* (I.5.6) *с некоторым* $\alpha > 0$, *а* Λ — *винеровская мера на* $\mathscr{C}$ *(т. е. выполнены условия* (II.2.1) — (II.2.4)). *Тогда существует пространственно-временно́е статистическое решение стохастической задачи Коши* (II.1.1), (II.1.2), *отвечающее этим мерам* μ *и* Λ.

§ 3. Галёркинские приближения статистического решения

1. Галёркинская система Ито и энергетическая оценка. Будем использовать обозначения V_m, π_m и так далее из § 3 главы I. Положим $(\pi_m u)(t) \equiv \pi_m(u(t))$. Введем меры

$$(\text{II}.3.1)\qquad \Lambda_m \equiv \pi_m^* \Lambda, \quad \text{откуда} \quad \widetilde{\Lambda}_m(v) = \widetilde{\Lambda}(\pi_m v) \quad \text{при} \quad v \in \mathring{\mathscr{V}}^s.$$

Очевидно, что Λ_m — винеровская мера на $\mathscr{C}_m \equiv C(0,\ T;\ V_m)$, построенная по корреляционному оператору $Q_m = \pi_m Q \pi_m$. Аналогично (I.3.5) положим

$$(\text{II}.3.2)\qquad \mu_m = \pi_m^* \mu, \quad \text{откуда} \quad \widetilde{\mu}_m(v_0) = \widetilde{\mu}(\pi_m v_0) \quad \text{при} \quad v_0 \in \mathscr{H}.$$

Ясно, что мера μ определена на $\mathfrak{B}(V_m)$ и сосредоточена на V_m.

Рассмотрим вероятностное пространство

$$(\text{II}.3.3)\qquad (V_m \times \mathscr{C}_m,\ \mathfrak{B}(V_m \times \mathscr{C}_m),\ \mu_m \times \Lambda_m)$$

и определим на этом пространстве случайные функции $u_{0,m}$ и w_m формулами

$$(\text{II}.3.4)\qquad u_{0,m}(x;\ \omega) \equiv u_{0,m}(x), \quad w_m(t,\ x;\ \omega) \equiv w_m(t,\ x)$$
$$\forall \omega = (u_{0,m},\ w_m) \in V_m \times \mathscr{C}_m.$$

Очевидно, $u_{0,m}$ и w_m — независимые случайные функции. Через $\mathscr{E}_m \eta$ обозначается математическое ожидание случайной величины η, заданной на пространстве (II.3.3).

Галёркинским приближением системы (II.1.1) (см. также (II.1.7)) назовем следующую систему Ито в V_m $(w_m(t) \equiv w_m(t,\ \cdot) \in V_m)$:

$$(\text{II}.3.5)\qquad du_m(t) + \pi_m(\nu A u_m(t) + B(u_m(t)) - g(t))dt = dw_m(t),$$
$$u_m(t) \in V_m,\quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В качестве начального значения возьмем случайную функцию $u_{0,m}$ на пространстве (II.3.3):

$$(\text{II}.3.6)\qquad u_m(t)|_{t=0} = u_{0,m} \in V_m.$$

Напомним, что операторы A и B и функция $g(t)$, входящие в (II.3.5), были определены в п.2 и 4 из § 1 главы I.

Теорема 3.1. 1) *Решение $u_m(t)$ задачи* (II.3.5) — (II.3.6) *существует при всех $(u_{0,m},\ w_m) \in V_m \times \mathscr{C}_m$, кроме множества $\mu_m \times \Lambda_m$-меры нуль.*

2) *Отображение $(u_{0,m},\ w_m) \to u_m$ измеримо по Борелю (после модификации), как отображение $V_m \times \mathscr{C}_m$ в Z, так что можно определить борелевскую меру P_m на Z, как распределение u_m.*

3) *Мера P_m удовлетворяет интегральному тождеству, аналогичному* (II.2.10)

$$(\text{II}.3.7)\qquad \int \exp\left(i\left[\langle \gamma_0 u,\ v_0\rangle + \{\mathscr{A}u,\ v\}\right]\right) P_m(du) = \widetilde{\mu}(v_0)\, \widetilde{\Lambda}\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$
$$\forall v_0 \in V_m,\quad v \in \mathring{\mathscr{V}}^s_m \equiv \pi_m \mathring{\mathscr{V}}^s.$$

4) *Справедливо энергетическое неравенство, равномерное по $m \geqslant 1$:*

$$(\text{II}.3.8)\qquad \int \left(\|u(t)\|^{2+2\alpha} + \int_0^t \|u(\tau)\|_1^2 \|u(\tau)\|^{2\alpha} d\tau\right) P_m(du) \leqslant a + bt,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

где a и b — константы, зависящие от $\overline{E_0^\alpha}$, $\overline{S}$ и $\|f\|_{L_\infty^{-1}}$, но не зависящие от m и $T > 0$.

5) *Справедлива равномерная по* $m\geqslant 1$ *оценка*

$$\text{(II.3.9)}\qquad \int \|u\|^{1+\alpha}_{\mathscr{C}^{(\varkappa)},\,-s} P_m(du)\leqslant C_{\alpha,T}<+\infty,\quad \varkappa=\frac{\alpha}{1+\alpha},\quad m\geqslant 1,$$

если $\alpha<1$. *Если же* $\alpha\geqslant 1$, *то*

$$\text{(II.3.10)}\qquad \int \|u\|^{1+\alpha}_{\mathscr{C}L^{-s}} P_m(du)\leqslant C_{\alpha,T}<+\infty,\quad m\geqslant 1.$$

Константа $C_{\alpha,T}$ *в* (II.3.9) *и* (II.3.10) *не зависит от* m.

Доказательство. Предполагая априори существование процесса $u_m(t, x)$, удовлетворяющего (II.3.5) — (II.3.6), докажем оценку (II.3.8). По формуле Ито [51]

$$\text{(II.3.11)}\qquad d\|u_m(t)\|^{2+2\alpha}=(2+2\alpha)\|u_m(t)\|^{2\alpha}\langle u_m(t),\ du_m(t)\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}(2+2\alpha)\left[2\alpha\|u_m(t)\|^{2\alpha-2}\langle Qu_m(t),\ u_m(t)\rangle+\|u_m(t)\|^{2\alpha}\operatorname{Sp}\pi_m Q\pi_m\right]dt.$$

Но в силу (II.3.5) и (I.1.12) имеем

$$\langle u_m(t),\ du_m(t)\rangle = -\nu\langle u_m(t),\ Au_m(t)\rangle + \langle u_m(t),\ g(t) + dw_m(t)\rangle.$$

Подставим это выражение в (II.3.11), проинтегрируем полученное тождество по t от 0 до $t_N=t_N(u_m)\equiv\min(t,\tau_N)$, где $\tau_N=\sup\{\tau>0\colon \|u_m(\tau)\|<N\}$ и возьмем математическое ожидание $\mathscr{E}_m$ от обеих частей полученного равенства. Так как

$$\langle u_m(t),\ Au_m(t)\rangle = \|u_m(t)\|_1^2$$

(см. (I.1.7)), а математическое ожидание стохастического интеграла равно нулю, то в результате получаем тождество

$$\text{(II.3.12)}\qquad \mathscr{E}_m\|u_m(t_N)\|^{2+2\alpha}+(2+2\alpha)\nu\mathscr{E}_m\int_0^{t_N}\|u_m(\tau)\|^{2\alpha}\|u_m(\tau)\|_1^2\,d\tau=$$
$$=\mathscr{E}_m\|u_{0,m}\|^{2+2\alpha}+(1+\alpha)\mathscr{E}_m\Bigg[\int_0^{t_N}\{\|u_m(\tau)\|^{2\alpha}(2\langle u_m(\tau),g(\tau)\rangle+\operatorname{Sp}\pi_m Q\pi_m)+$$
$$+2\alpha\|u_m(\tau)\|^{2\alpha-2}\langle Qu_m(\tau),\ u_m(\tau)\rangle\}\,d\tau\Bigg].$$

Справедливы неравенства:

$$\operatorname{Sp}\pi_m Q\pi_m\leqslant\overline{S},\qquad \mathscr{E}_m\|u_{0,m}\|^{2+2\alpha}\leqslant\overline{E}_0^{\alpha},$$

$$\left|\mathscr{E}_m\int_0^{t_N}\|u_m(\tau)\|^{2\alpha}2\langle u_m(\tau),\ g(\tau)\rangle\,d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant\mathscr{E}_m\int_0^{t_N}\|u_m(\tau)\|^{2\alpha}\left(\nu\|u_m(\tau)\|_1^2+\frac{1}{\nu}\|g(\tau)\|_{-1}^2\right)d\tau$$

и

$$\|u_m(\tau)\|^{2\alpha-2}|\langle Qu_m(\tau),\ u_m(\tau)\rangle|\leqslant\overline{S}\|u_m(\tau)\|^{2\alpha}.$$

Из этих неравенств и (II.3.12) выводим

$$(\text{II.3.13})\qquad \mathscr{E}_m \|u_m(t_N)\|^{2+2\alpha} + (1+\alpha)\,\nu\mathscr{E}_m \int_0^{t_N} \|u_m(\tau)\|^{2\alpha} \|u_m(\tau)\|_1^2\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \bar{E}_0^{\alpha} + C_\alpha \left(\bar{S} + \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L_\infty^{-1}}\right) \mathscr{E}_m \int_0^{t_N} \|u_m(\tau)\|^{2\alpha}\, d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что $\|u\|^2 \leqslant C(\Omega)\|u\|_1^2$, получаем индукцией по $k=0, 1, \ldots$

$$(\text{II.3.14})\qquad \mathscr{E}_m \int_0^{t_N} \|u_m(\tau)\|^{2\alpha}\, d\tau \leqslant C(\Omega)\, \mathscr{E}_m \int_0^{t_N} \|u_m(\tau)\|^{2\alpha-2} \|u_m(\tau)\|_1^2\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + b_1\mathscr{E}_m \int_0^{t_N} \|u_m(\tau)\|^{2\alpha-2}\, d\tau \leqslant \ldots \leqslant a_k + b_k\mathscr{E}_m \int_0^{t_N} \|u_m(\tau)\|^{2\alpha-2k}\, d\tau,$$

a_k и b_k не зависят от $m \geqslant 1$.

Возьмем $k=[\alpha]$. Тогда если $\alpha = k$, то правая часть (II.3.14) $\leqslant a_k + b_k t$. Если же $\alpha > k$, то (пользуясь (II.3.14) при $\alpha = k = 1$) получаем, поскольку $0 \leqslant 2\alpha - 2k < 2$:

$$(\text{II.3.15})\qquad \mathscr{E}_m \int_0^{t_N} \|u_m(\tau)\|^{2\alpha-2k}\, d\tau \leqslant C_1 + \mathscr{E}_m \int_0^{t_N} \|u_m(\tau)\|^2\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C_2 + C_3 t, \quad m \geqslant 1,$$

где C_2 и C_3 не зависят от m. Наконец, из (II.3.13) — (II.3.15) получаем оценку

$$(\text{II.3.16})\qquad \mathscr{E}_m \left(\|u_m(t_N)\|^{2+2\alpha} + \int_0^{t_N} \|u_m(\tau)\|_1^2 \|u_m(\tau)\|^{2\alpha}\, d\tau\right) \leqslant$$
$$\leqslant a_\alpha + b_\alpha t, \quad m \geqslant 1.$$

Из доказанной априорной оценки (II.3.16), как известно (см. [51]), следует существование с вероятностью 1 решения $u_m(t)$ стохастической задачи (II.3.5) — (II.3.6). Измеримость отображения $(u_{0,m}, w_m) \to u_m \in Z$ вытекает из построения u_m методом итераций [51]. Поэтому можно определить меру P_m на Z — распределение случайной функции u_m. Аналогично [51] устремляя $N \to \infty$, из (II.3.16) выводим, что $t_N \uparrow t$, поэтому из (II.3.16) следует (II.3.8). Далее, в силу (II.3.5)

$$\{\mathscr{A}u_m, v\} = \left\{\frac{\partial w_m}{\partial t}, v\right\} \quad \forall v \in \mathring{\mathscr{V}}^s_m,$$

где $\mathscr{A}$ — оператор (II.1.5), а вследствие (II.3.6)

$$\langle \gamma_0 u_m, v_0\rangle = \langle u_{0,m}, v_0\rangle \quad \forall v_0 \in V_m.$$

Так как $u_{0,m}$ и w_m — независимые случайные функции, то

$$(\text{II.3.17})\qquad \mathscr{E}_m \exp\left(i\left[\langle\gamma_0 u_m, v_0\rangle + \{\mathscr{A}u_m, v\}\right]\right) =$$
$$= \tilde{\mu}_m(v_0)\,\tilde{\Lambda}_m\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right) \qquad \forall v_0 \in V_m,\ \forall v \in \mathring{\mathscr{V}}^s_m.$$

Учитывая (II.3.1), (II.3.2) и соотношения $\pi_m v = v$, $\pi_m v_0 = v_0$ для $v \in \mathring{\mathscr{V}}^s_m$ и $v_0 \in V_m$, получим, что из (II.3.17) вытекает (II.3.7).

2. Доказательство оценок (II.3.9) — (II.3.10). На пространстве (II.3.3) определим процесс $z_m = u_m - w_m$. Очевидно,

$$\text{(II.3.18)} \qquad \|u_m\|_{\mathscr{C}^{(\varkappa)},\,-s} \leqslant \|z_m\|_{\mathscr{C}^{(\varkappa)},\,-s} + \|w_m\|_{\mathscr{C}^{(\varkappa)},\,-s},$$
$$\|u_m\|_{\mathscr{C}L^{-s}} \leqslant \|z_m\|_{\mathscr{C}L^{-s}} + \|w_m\|_{\mathscr{C}L^{-s}}.$$

Лемма 3.1. *Если* $\varkappa = \alpha/(1+\alpha)$, *где* α — *константа из* (I.5.6), *то*

$$\text{(II.3.19)} \qquad \mathscr{E}_m \|z_m\|^{1+\alpha}_{\mathscr{C}^{(\varkappa)},\,-s} \leqslant C_{\alpha,\,T} < +\infty \qquad \forall m \geqslant 1,$$

$C_{\alpha,\,T}$ *не зависит от* m.

Доказательство. В силу уравнения (II.3.5)

$$\frac{\partial z_m(t)}{\partial t} = -\pi_m(\nu A u_m(t) + B(u_m(t)) - g(t)).$$

Поэтому аналогично (I.3.10) получаем при $s > \frac{n}{2} + 1$

$$\text{(II.3.20)} \qquad \left\| \frac{\partial z_m(t)}{\partial t} \right\|^{1+\alpha}_{-s} \leqslant C(1 + \|u_m(t)\|^{2+2\alpha} + \|g(t)\|^{1+\alpha}_{-1}).$$

Поскольку $\varkappa \equiv \frac{\alpha}{1+\alpha} = 1 - \frac{1}{1+\alpha}$, то по неравенству Гёльдера и ввиду оценки (II.3.20) при любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$

$$\text{(II.3.21)} \qquad \frac{\|z_m(t_1) - z_m(t_2)\|_{-s}}{|t-t_2|^{\varkappa}} \leqslant \frac{1}{|t_1 - t_2|^{\varkappa}} \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\partial z_m(\tau)}{\partial \tau} \right\|_{-s} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\partial z_m(\tau)}{\partial \tau} \right\|^{1+\alpha}_{-s} d\tau \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \leqslant C \left(\int_0^T (1 + \|u_m(\tau)\|^{2+2\alpha} + \|g(\tau)\|^{1+\alpha}_{-1})\, d\tau \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Взяв в левой части (II.3.21) верхнюю грань по t_1 и t_2, возведя в степень $1+\alpha$ и применив к полученному неравенству оператор математического ожидания $\mathscr{E}_m$, заключаем в силу (II.3.16), что справедливо неравенство (II.3.19). ■

Лемма 3.2. *Для любого* $p > 0$ *имеет место неравенство*

$$\text{(II.3.22)} \qquad \mathscr{E}_m \|w_m\|^p_{\mathscr{C}L^{-s}} \leqslant C_{p,\,T} < +\infty, \quad m \geqslant 1, \quad C_{p,\,T} \textit{ не зависит от } m.$$

Доказательство. Применим к винеровскому процессу $w_m(t)$ в V_m метод Леви оценки модуля непрерывности [41]. Для этого разложим $w_m(t)$ по ортонормированному (в $\mathscr{H}$) базису $\{e_k(x)\}$, составленному из собственных векторов оператора $A = -\Delta$ (см. п. 2 § 1 главы I): $w_m(t, x) = \sum_{k=1}^{m} w^k_m(t) e_k(x)$. Здесь $w^k_m(t)$ — скалярные винеровские процессы. Из ортонормальности $e_k(x)$ вытекает

$$\text{(II.3.23)} \qquad \mathscr{E}_m \|w_m(t)\|^2 = \mathscr{E}_m \sum_{k=1}^{m} |w^k_m(t)|^2 = t\overline{S}_m \leqslant t\overline{S}$$

(так как $\overline{S}_m \equiv \operatorname{Sp} \pi_m Q \pi_m \leqslant \overline{S} \equiv \operatorname{Sp} Q$), откуда $\mathscr{E}_m |w^k_m(t)|^2 \leqslant t\overline{S}$ при любых k, m. Отсюда методом Леви ([41], с. 27—28) получаем, что для любого $a_k > C(\overline{S})^{1/2}$, где $C > 0$ — некоторая постоянная, существуют такие положительные константы C_1, C_2, δ, не зависящие от m и k, что

(II.3.24) $\Lambda_{m,\,a_k} \equiv$

$$\equiv \Lambda_m\left(\left\{w_m \in \mathscr{C}_m\colon \sup_{t_1<t_2} \frac{|w_m^k(t_1)-w_m^k(t_2)|}{h_T(t_1-t_2)} > C_1 a_k\right\}\right) < \frac{C_2}{a_k}\,2^{-\delta\frac{a_k^2}{\overline{S}}}.$$

Положим $a_k^2 = C^2\overline{S}(1+k^{2/n})M$, где $M \geqslant 1$. Тогда в силу (II.3.24)

(II.3.25) $$\Lambda_m\left(\left\{w_m \in \mathscr{C}_m\colon \sup_{\substack{t_1<t_2\\ k\geqslant 1}} \frac{|w_m^k(t_1)-w_m^k(t_2)|^2}{h_T^2(t_1-t_2)(1+k^{2/n})} > C'M\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{m,\,a_k} \leqslant C_3 2^{-\delta C^2 M} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\delta C^2 k^{2/n} M} \leqslant C_4 2^{-\delta C^2 M}, \quad \text{где } C' = C_1^2 C^2 \overline{S}.$$

Вследствие (I.1.7

$$\| w_m(t_1) - w_m(t_2)\|_{-s}^2 \leqslant \sup_k \frac{|w_m^k(t_1)-w_m^k(t_2)|^2}{1+k^{2/n}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}(1+k^{2/n}),$$

поэтому из (II.3.25) следует

(II.3.26) $$p_{m,\,M} \equiv \Lambda_m\left(\left\{w_m \in \mathscr{C}_m\colon \sup_{t_1<t_2} \frac{\|w_m(t_1)-w_m(t_2)\|_{-s}^2}{h_T^2(t_1-t_2)} >\right.\right.$$

$$\left.\left. > C'M \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}(1+k^{2/n})\right\}\right) \leqslant C_4 2^{-\delta C^2 M}, \quad M \geqslant 1.$$

Так как собственные значения λ_k оператора $A \equiv -\Delta$ имеют асимптотику $\lambda_k \sim Ck^{2/n}$ при $k \to +\infty$ [55], то ряд в (II.3.26) сходится:

$$\sigma \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}(1+k^{2/n}) \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2s/n}(1+k^{2/n}) < +\infty, \quad s > \frac{n}{2}+1,$$

поэтому из (II.3.26) выводим, учитывая определение $\|\cdot\|_{\mathscr{C}L^{-s}}$ (см. (II.1.3″))

(II.3.27) $$\mathscr{E}_m \| w_m \|_{\mathscr{C}L^{-s}}^p \leqslant (C'\sigma)^{p/2} + \sum_{M=1}^{\infty} (C'(M+1)\sigma)^{p/2} p_{m,\,M} \leqslant$$

$$\leqslant (C'\sigma)^{p/2} + \sum_{M=1}^{\infty} (C'(M+1)\sigma)^{p/2} C_4 2^{-\delta C^2 M} \leqslant C_{p,\,T} < +\infty. \quad \blacksquare$$

Закончим доказательство оценок (II.3.9)—(II.3.10). Пусть сначала $\alpha < 1$. Тогда $\varkappa \equiv \alpha/(1+\alpha) < 1/2$, поэтому

$$\| u \|_{\mathscr{C}^{(\varkappa)},\,-s} \leqslant C \| u \|_{\mathscr{C}L^{-s}},$$

где C не зависит от $u \in \mathscr{C}L^{-s}$. Следовательно, из (II.3.22) при $p = 1+\alpha$ выводим

(II.3.28) $\mathscr{E}_m \| w_m \|_{\mathscr{C}^{(\varkappa)},\,-s}^{1+\alpha} \leqslant C_{\alpha,\,T} < +\infty$, $C_{\alpha,T}$ не зависит от $m \geqslant 1$.

Поэтому из (II.3.19) и первого из неравенств (II.3.18) следует (II.3.9).

Теперь разберем случай, когда $\alpha \geqslant 1$; при этом $\varkappa \equiv \alpha/(1+\alpha) \geqslant 1/2$, поэтому

$$\|u\|_{\mathscr{C}L^{-s}} \leqslant C\|u\|_{\mathscr{C}^{(\varkappa)},\,-s}.$$

Отсюда вследствие (II.3.19) получаем

$$\mathscr{E}_m \|z_m\|^{1+\alpha}_{\mathscr{C}L^{-s}} \leqslant CC_{\alpha,\,T} < +\infty.$$

Из этого неравенства, из (II.3.22) при $p = 1+\alpha$ и из (II.3.18) следует (II.3.10). Теорема 3.1 доказана. ■

§ 4. Построение статистического решения

1. Компактность семейства мер P_m. Лемма 4.1. *При любом* $0 < \varkappa < 1$ *вложение* $U^{(\varkappa)} \subset Z$ *вполне непрерывно (здесь* $U^{(\varkappa)}$ *— пространство* (II.1.3), *а* Z — (I.2.1)).

Для доказательства леммы воспользуемся теоремой 4.1 гл. I с $p = 2$, $X_1 = \mathscr{H}^1$, $X_0 = \mathscr{H}$, $X_{-1} = \mathscr{H}^{-s}$ и $\mathscr{M} = K_\rho(U^{(\varkappa)})$ — шаром радиуса ρ с центром в нуле в пространстве $U^{(\varkappa)}$. Условия (I.4.2), очевидно, выполняются; ограниченность $\mathscr{M}$ в $L_2(0, T; \mathscr{H}^1) \equiv \mathscr{L}^1_2$ вытекает из (II.1.3). Опять-таки из (II.1.3) получаем, что для любого $u \in \mathscr{M}$ и любых $t_1, t_2 \in [0, T]$

$$\|u(t_1) - u(t_2)\|_{-s} \leqslant \|u\|_{\mathscr{C}^{(\varkappa)},\,-s} |t_1 - t_2|^{\varkappa} \leqslant \rho\, |t_1 - t_2|^{\varkappa},$$

что доказывает равностепенную непрерывность в $C(0, T; \mathscr{H}^{-s})$ функций из $\mathscr{M}$. Поэтому лемма 4.1 вытекает из теоремы 4.1 гл. I. ■

Далее, из оценок (II.3.8) и (II.3.9) — (II.3.10) следует, что при любом $\bar{\varkappa}$, $0 < \bar{\varkappa} < \min(1/2, \alpha/(1+\alpha))$ имеем:

$$\text{(II.4.1)} \qquad \int \|u\|^{1+\alpha}_{U(\bar{\varkappa})} P_m(du) \leqslant C_{\bar{\varkappa}} < +\infty, \qquad m \geqslant 1,$$

где $C_{\bar{\varkappa}}$ не зависит от m. Отсюда при помощи леммы 4.1 аналогично теореме 4.2 гл. I выводится следующая теорема.

Теорема 4.1. *Семейство мер* $\{P_m\}$, *определенных в теореме* 3.1 *и заданных на* $\mathfrak{B}(Z)$, *слабо компактно на пространстве* Z.

В силу этой теоремы из последовательности мер P_m можно выбрать подпоследовательность P_k, слабо сходящуюся на Z к некоторой вероятностной мере P. Это значит, что выполняется соотношение (I.4.3). Покажем, что мера P является статистическим решением стохастической задачи (II.1.1), (II.1.2).

2. Мера P удовлетворяет условиям 1), 5) и 6) определения 2.1. Действительно, методами п. 1 § 5 главы I из оценок (II.3.8) — (II.3.10) выводится, что мера P сосредоточена на $U \in \mathfrak{B}(Z)$. Теми же методами из оценок (II.3.8)—(II.3.10) получаются оценки (II.2.7)—(II.2.9).

3. Мера P удовлетворяет условиям 2)—4) определения 2.1. Достаточно доказать тождество (II.2.10). Пусть в (II.3.7) $v_0 \in V_r$ и $v \in \mathring{\mathscr{V}}^s_r \equiv \pi_r \mathring{\mathscr{V}}^s$, где $r \leqslant m$. Переходя в (II.3.7) к пределу при $m = k \to \infty$, получим в силу сходимости $P_k \to P$ (см. (I.4.3)), тождество $\langle$II.2.10$\rangle$ для $v_0 \in V_r$ и $v \in \mathring{\mathscr{V}}^s_r$. Это вытекает из того, что функционал $u \to \langle u(0), v_0\rangle$ непрерывен на Z ввиду (I.2.1), а функционал $u \to \{\mathscr{A}u, v\}$ также непрерывен на Z в силу предложения 1.1. Наконец, из плотности $\bigcup\limits_1^\infty V_r$ в $\mathscr{H}^s$ и $\bigcup\limits_{r=1}^\infty \mathring{\mathscr{V}}^s_r$ в $\mathring{\mathscr{V}}^s$ получаем (II.2.10) для всех $v \in \mathscr{H}^s$ и $v \in \mathring{\mathscr{V}}^s$. Итак, теорема 2.1 доказана. ■

4. О существовании индивидуальных решений стохастической системы Навье — Стокса. Существование индивидуальных решений задачи Коши (II.1.1), (II.1.2) доказано в [4] для случая, когда $w(t, x) \in C(0, T; H^s)$, где $s > \frac{n}{2} + 2$. Это условие выполняется с вероятностью 1, лишь если оператор Q из (II.2.2) является ядерным оператором в H^s.

Из основной теоремы 2.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть в* (I.5.6) $\alpha \geqslant 1$. *Тогда задача Коши* (II.1.1), (II.1.2) *имеет решение* $u(t, x) \in UL$ *при всех* $(u_0, w) \in \mathscr{H}^{-s} \times \mathscr{C}$, *кроме множества* $\mu \times \Lambda$*-меры нуль.*

Эта теорема выводится из следующей леммы.

Лемма 4.2. *Пусть в* (I.5.6) $\alpha \geqslant 1$. *Существует такое множество* $B \subset \mathscr{H}^{-s} \times \mathscr{V}^{-s}$, *что*

$$B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s} \times \mathscr{V}^{-s}),\ B \subset \mathfrak{A}(UL) \ \text{и}\ (\mu \times \mathscr{N})(B) = 1,$$

где $\mathfrak{A} = (\gamma_0, \mathscr{A})$ *— оператор, действующий из* UL *в* $\mathscr{H}^{-s} \times \mathscr{V}^{-s}$.

Аналогичные утверждения справедливы и в случае $0 < \alpha < 1$.

Теорема 4.2 и лемма 4.2 приводятся без доказательства. Доказательства аналогичных утверждений в случае трансляционно-однородных мер P приведено в главе VI.

В заключение отметим, что теорема о существовании статистических решений стохастической задачи (II.1.1), (II.1.2) справедлива и в случае, когда в (I.5.6) $\alpha = 0$, т. е. мера μ удовлетворяет условию (I.2.2), как и в теореме 2.1 гл. I. Однако при этом вместо пространств $U^{(\varkappa)}$ приходится использовать пространства функций $t \to u(t) \in \mathscr{H}^{-s}$ ограниченной вариации степени $q > 2$ (см. главу VI), имеющих, вообще говоря, разрывы первого рода на счетном множестве $t \in [0, T]$. Тем не менее и при $\alpha = 0$ удается доказать, что статистическое решение P стохастической задачи для системы Навье — Стокса сосредоточено на непрерывных функциях $t \to u(t) \in \mathscr{H}^{-s}$, т. е. на $\mathscr{C}^{-s} \equiv C(0, T; \mathscr{H}^{-s})$.

Замечание 4.1. В главах I и II условие $f \in L_\infty(0, T; H^{-1})$ на внешние силы можно заменить условием $f \in L_2(0, T; H^{-1})$ с соответствующими изменениями формулировок теорем и определений. Кроме того, методами глав I, II легко построить пространственно-временное статистическое решение системы Навье — Стокса (I.1.1) с начальной мерой μ, удовлетворяющей (I.2.2), при случайных внешних силах $f(t, x) \in L_2(0, T; H^{-1})$. Для этого достаточно предположить, что для распределения $\lambda(df)$ случайной функции $f(t, x)$ конечен интеграл

$$\int \|f\|^2_{L_2(0,\,T;\,H^{-1})}\lambda(df) < +\infty.$$

ГЛАВА III
УРАВНЕНИЕ ХОПФА И ПРЯМОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛМОГОРОВА

§ 1. Уравнение Хопфа

1. Вывод уравнения Хопфа. Пусть P — пространственно-временно́е статистическое решение системы (I.1.1), построенное в главе I по начальной мере μ, удовлетворяющей условию (I.2.2). Мера P сосредоточена на Z. Так как $Z \subset C(0, T; \mathscr{H}^{-s})$, то на Z определен оператор γ_t сужения функции при $t = \text{const}$: $\gamma_t u = u(t, \cdot)$ $\forall t \in [0, T]$, $\forall u \in Z$; $\gamma_t\colon Z \to \mathscr{H}^{-s}$ — непрерывный оператор. Рассмотрим семейство мер $\mu(t, \cdot) \equiv \gamma_t^* P$ на $\mathscr{H}^{-s}$, зависящих от параметра t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\text{(III.1.1)}\qquad \mu(t, \omega) \equiv P(\gamma_t^{-1}\omega) \equiv P(\{u \in Z\colon u(t, \cdot) \in \omega\})\ \forall \omega \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s}).$$

Лемма 1.1. *Для любого t, $0\leqslant t\leqslant T$, мера $\mu(t,\omega)$ сосредоточена на $\mathscr{H}$; при почти всех $t\in[0,T]$ она сосредоточена на $\mathscr{H}^1$. Для любого $t\in$ $\in[0,T]$ справедлива оценка*

$$\text{(III.1.2)}\qquad \int\|w\|^2\mu(t,dw)+\int_0^t\left(\int\|w\|_1^2\mu(\tau,dw)\right)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant C\int(1+\|u_0\|^2)\mu(du_0).$$

Доказательство вытекает из оценки (I.2.4). В самом деле, с помощью замены $u(t)=w$ для первого слагаемого в (I.2.4) получаем

$$\int\|u(t)\|^2P(du)=\int\|w\|^2\mu(t,dw).$$

Аналогично, по теореме Фубини имеем для второго слагаемого в (I.2.4)

$$\int\left(\int_0^t\|u(\tau)\|_1^2d\tau\right)P(du)=\int_0^t d\tau\left(\int\|u(\tau)\|_1^2P(du)\right)=$$
$$=\int_0^t d\tau\int\|w\|_1^2\mu(\tau,dw).\quad\blacksquare$$

С помощью теоремы 5.1 из главы I аналогично лемме 1.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть для начальной меры μ справедливо неравенство*

$$\int\|u_0\|^k\mu(du_0)<+\infty\qquad\forall k\in\mathbb{N}.$$

Тогда мера $\mu(t,dw)$ удовлетворяет оценке ($\forall t\in[0,T]$)

$$\text{(III.1.2}')\qquad \int\|w\|^k\mu(t,dw)+\int_0^t\left(\int\|w\|_1^2\|w\|^{k-2}\mu(\tau,dw)\right)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant C_k\int(1+\|u_0\|^k)\mu(du_0)\qquad\forall k\geqslant 2.$$

Лемма 1.2 будет использована в главе V.

Обозначим через $\chi(t,v)$ характеристический функционал меры $\mu(t,\cdot)$:

$$\text{(III.1.3)}\qquad \chi(t,v)=\tilde\mu(t,v)\equiv\int e^{i\langle w,v\rangle}\mu(t,dw)\qquad\forall v\in\mathscr{H},\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

Теорема 1.1. *Пусть $\mu(t,\omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$,— семейство мер, определенное соотношением* (III.1.1), *и $\chi(t,v)$ — характеристические функционалы этих мер. Тогда справедливо уравнение Хопфа: при любом $v\in\mathscr{H}^s$, где $s>\frac{n}{2}+1$, функция $t\to\chi(t,v)$ абсолютно непрерывна и при почти всех $t\in[0,T]$*

$$\text{(III.1.4)}\qquad \frac{\partial\chi(t,v)}{\partial t}+i\int e^{i\langle w,v\rangle}H(t,v,w)\mu(t,dw)=0$$

или, в интегральной форме,

$$\text{(III.1.5)}\qquad \chi(t,v)-\chi(0,v)+$$
$$+i\int_0^t d\tau\left(\int e^{i\langle w,v\rangle}H(\tau,v,w)\mu(\tau,dw)\right)=0\qquad\forall t\in[0,T].$$

Здесь

$$H(t, v, w) = \nu \langle Aw, v\rangle + \langle B(w), v\rangle - \langle g(t), v\rangle,$$

где A и B — операторы из (I.1.17).

Доказательство. Пусть W — множество из п. 2) определения 2.1 главы I. Так как любая функция $u(t) \in W$ есть решение уравнения (I.1.18), то

$$\text{(III.1.6)} \qquad \frac{de^{i\langle u(t),\, v\rangle}}{dt} = -ie^{i\langle u(t),\, v\rangle} H(t, v, u(t)) \qquad \forall v \in \mathscr{H}^s.$$

Интегрируя обе части (III.1.6) по t, а затем по $P(du)$, получим, поскольку мера P сосредоточена на W:

$$\text{(III.1.7)} \qquad \int \left(e^{i\langle u(t),\, v\rangle} - e^{i\langle u(0),\, v\rangle}\right) P(du) + \\ + i \int \left(\int_0^t e^{i\langle u(\tau),\, v\rangle} H(\tau, v, u(\tau))\, d\tau\right) P(du) = 0.$$

Сделав замены $u(t) = w$, $u(0) = w$ в первом интеграле в (III.1.7), установим, что он равен $\chi(t, v) - \chi(0, v)$. Далее, из (I.2.4) следует по теореме Фубини, что в последнем интеграле в (III.1.7) можно изменить порядок интегрирования, поэтому, производя в нем замену $u(\tau) = w$, получим интегральный член из (III.1.5), Из (III.1.5) следует (III.1.4). ■

Определение 1.1. Семейство мер $\mu(t, \omega)$, $\omega \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих уравнению Хопфа (III.1.4) и неравенству (III.1.2), называется пространственным статистическим решением системы Навье — Стокса (I.1.1).

Отметим, что уравнение (III.1.4) можно записать, как уравнение в вариационных производных относительно характеристического функционала $\chi(t, v)$, но псевдодифференциальная форма (III.1.4) представляется в дальнейшем более предпочтительной.

2. Разрешимость задачи Коши для уравнения Хопфа. Задача Коши для уравнения (III.1.4) состоит в нахождении его решения $\chi(t, v)$, являющегося характеристическим функционалом семейства вероятностных мер $\mu(t, \omega)$ и удовлетворяющего начальному условию

$$\text{(III.1.8)} \qquad \chi(0, v) = \chi_0(v) = \int e^{i(w,\, v)} \mu(dw),$$

где $\mu(\omega_0)$ — заданная начальная мера на $\mathscr{H}$.

Теорема 1.2. *Если начальная мера $\mu(\omega_0)$ удовлетворяет условию* (I.2.2), *то существует решение $\mu(t, \cdot)$ задачи Коши* (III.1.4), (III.1.8).

Доказательство. Пусть P — пространственно-временное статистическое решение уравнения (I.1.1), соответствующее начальной мере $\mu(\omega_0)$, которое было построено в главе I. Его сужения $\mu(t, \cdot)$ при $t \in [0, T]$ удовлетворяют уравнению Хопфа (III.1.4) и оценке (III.1.2) согласно теореме 1.1 и лемме 1.1. Кроме того, выполняется начальное условие (III.1.8): из (III.1.3) ввиду (III.1.1) получаем, что

$$\chi(0, v) = \int \exp(i\langle \gamma_0 u, v\rangle)\, P(du) = \int \exp(i\langle u_0, v\rangle)\, \mu(du_0),$$

причем последнее равенство справедливо в силу (I.2.3). ■

3. Теорема единственности решения задачи Коши. Ч. Фояш [48] доказал единственность решения задачи Коши для уравнения Хопфа, соответствующего двумерной ($n = 2$) системе Навье — Стокса (I.1.1). Точнее, им доказана следующая теорема. Пусть, для простоты, $g(t) \equiv g$ не зависит от t.

Теорема 1.3. *Пусть $\mu(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, — пространственное статистическое решение двумерной системы Навье — Стокса, удовлетворяющее неравенству*

$$\int_0^T \left(\int \|u\|^2 e^{C_B\|u\|^4} \mu(t, du) \right) dt < +\infty, \tag{III.1.9}$$

а C_B — константа, зависящая лишь от оператора B в (I.1.13), *от T и $\|g\|_{-1}$. Тогда $\mu(t, \omega)$ однозначно определяется начальной мерой $\mu(\omega_0)$ $\forall t \in \in [0, T]$.*

Доказательство этой теоремы приведено в [48].

Замечание 1.1. Существует такая константа C'_B, что если начальная мера $\mu(\omega_0)$ удовлетворяет оценке $\int \|u_0\|^2 \exp(C'_B\|u_0\|^4)\mu(du_0) < +\infty$, то отвечающее $\mu(\omega_0)$ пространственное статистическое решение, построенное с помощью галёркинских аппроксимаций в [19], удовлетворяет оценке (III.1.9). То же справедливо и для решений, построенных в теореме 1.2.

Замечание 1.2. Отметим, что в теореме 6.1 главы I о единственности пространственно-временны́х статистических решений двумерной системы Навье — Стокса никаких дополнительных условий типа условия (III.1.9) не накладывалось.

§ 2. Прямое уравнение Колмогорова

1. Вывод прямого уравнения Колмогорова. Пусть $\mu(du_0)$ — вероятностная мера на $\mathscr{H}$, удовлетворяющая условию (I.5.6) при некотором $\alpha > 0$, а P — пространственно-временно́е статистическое решение стохастической системы (II.1.1), соответствующее начальной мере $\mu(du_0)$ и винеровской мере $\Lambda(dw)$. Мера P сосредоточена на пространстве Z, поэтому с помощью формулы (III.1.1) можно определить семейство мер $\mu(t, dw)$ на $\mathscr{H}^{-s}$. Используя оценки (II.2.7), аналогично лемме 1.1 можно доказать следующую лемму.

Лемма 2.1. *При каждом $t \in [0, T]$ мера $\mu(t, dw)$ сосредоточена на $\mathscr{H}$ и при почти всех $t \in [0, T]$ — на $\mathscr{H}^1$. Существуют такие константы a и b, что при $0 \leqslant t \leqslant T$*

$$\int \|w\|^{2+2\alpha} \mu(t, dw) + \int_0^t \left(\int \|w\|_1^2 \|w\|^{2\alpha} \mu(\tau, dw) \right) d\tau \leqslant a + bt. \tag{III.2.1}$$

Пусть, как и в § 1, $\chi(t, v)$ — характеристический функционал меры $\mu(t, dw)$, определенный формулой (III.1.3).

Теорема 2.1. *Семейство мер $\mu(t, dw)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова: при любом $v \in \mathscr{H}^s$*

$$\frac{\partial \chi(t, v)}{\partial t} + \int e^{i\langle v, w\rangle} K(t, v, w) \mu(t, dw) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{III.2.2}$$

где

$$K(t, v, w) = iH(t, v, w) + \frac{1}{2}\langle Qv, v\rangle,$$

причем символ $H(t, v, w)$ имеет то же значение, что и в (III.1.5), *а Q — то же, что в* (II.2.2).

Доказательство. Покажем, что семейство $\mu(t, dw)$ удовлетворяет уравнению (III.2.2), записанному в интегральной форме:

$$\chi(t, v) - \chi(0, v) + \int_0^t \left(\int e^{i\langle w, v\rangle} K(\tau, v, w) \mu(\tau, dw) \right) d\tau = 0. \tag{III.2.3}$$

Пусть P_m — галёркинская аппроксимация меры P (см. § 3 главы II), а $\mu_m(t, \cdot) = \gamma_t^* P_m$. Из (II.3.5) с помощью формулы Ито [25] выводится равенство (ср. с (III.1.6))

$$\text{(III.2.4)} \qquad de^{i\langle u_m(t),\, v\rangle} = e^{i\langle u_m(t),\, v\rangle}\,[-K(t,\, v,\, u_m(t))\,dt + i\,\langle dw_m(t),\, v\rangle],$$

где $v \in V_m$, а $w_m(t)$ — винеровский процесс с распределением (II.3.1). Интегрируя обе части (III.2.4) по t, а затем по $P_m(du_m)$, получим

$$\text{(III.2.5)} \qquad \int (e^{i\langle \gamma_t u,\, v\rangle} - e^{i\langle \gamma_0 u,\, v\rangle})\, P_m(du) + \int \left(\int_0^t e^{i\langle u(\tau),\, v\rangle} K(\tau,\, v,\, u(\tau))\, d\tau \right) P_m(du) = 0,$$

так как математическое ожидание от интеграла Ито равно нулю. Чтобы получить (III.2.3), перейдем в (III.2.5) к пределу при $m = k \to \infty$, используя (I.4.3). Имеем

$$\text{(III.2.6)} \qquad \int (e^{i\langle \gamma_t u,\, v\rangle} - e^{i\langle \gamma_0 u,\, v\rangle})\, P_k(du) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int (e^{i\langle \gamma_t u,\, v\rangle} - e^{i\langle \gamma_0 u,\, v\rangle})\, P(du).$$

Далее, для любых $t \in [0,\, T]$ и $v \in V_r$ функционал

$$\text{(III.2.7)} \qquad I(u) = \int_0^t e^{i\langle u(\tau),\, v\rangle} K(\tau,\, v,\, u(\tau))\, d\tau$$

определен на Z и непрерывен:

$$\text{(III.2.8)} \qquad I(u) \in C(Z), \quad |I(u)| \leqslant C(1 + \|u\|^2_{\mathcal{L}_2^0}), \quad u \in Z.$$

Пусть $\varphi_R(u) = \varphi\left(\frac{\|u\|_{\mathcal{L}_2^0}}{R}\right)$, где $\varphi(\rho) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(\rho) = 1$ при $\rho \leqslant 1$. Так как в неравенстве (II.3.8) $\alpha > 0$, то вследствие (III.2.8) и неравенства Чебышёва получаем

$$\left| \int I(u)\, P_k(du) - \int I(u)\, P(du) \right| \leqslant \left| \int \varphi_R(u)\, I(u)\, (P_k(du) - P(du)) \right| + \left| \int (1 - \varphi_R(u))\, I(u)\, P_k(du) \right| + \left| \int (1 - \varphi_R(u))\, I(u)\, P(du) \right| \leqslant \left| \int \varphi_R(u)\, I(u)\, (P_k(du) - P(du)) \right| + C/(1 + R^2)^\alpha,$$

где C не зависит от $R > 0$; поэтому в силу (I.4.3)

$$\text{(III.2.9)} \qquad \int I(u)\, P_k(du) \to \int I(u)\, P(du) \quad \text{при } k \to \infty.$$

Следовательно, переходя к пределу в (III.2.5) при $m = k \to \infty$ и учитывая (III.2.6) и (III.2.9), получим тождество (III.2.5) для меры P вместо P_m. Меняя во втором интеграле из выведенного тождества порядок интегрирования по $d\tau$ и $P(du)$, получим прямое уравнение Колмогорова (III.2.3), если сделаем замены $u(t)$, $u(0)$, $u(\tau) \to w$ и учтем (III.1.1) и определение (III.1.3) характеристического функционала $\chi(t,\, v)$. ■

Определение 2.1. Семейство мер $\mu(t,\, \omega)$, $\omega \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, удовлетворяющих оценке (III.2.1) и уравнению (III.2.2), называется пространственным статистическим решением стохастической системы Навье — Стокса (II.1.1).

Отметим, что формально можно записать прямое уравнение Колмогорова (III.2.2) как параболическое дифференциальное уравнение второго порядка с бесконечным числом переменных для мер $\mu(t, \omega)$ (см. [10]).

2. Разрешимость задачи Коши для прямого уравнения Колмогорова. Поставим для уравнения (III.2.2) задачу Коши с начальным условием

$$\chi(t, v)\Big|_{t=0} = \int e^{i\langle v, u_0\rangle}\mu(du_0), \qquad v \in \mathscr{H}, \tag{III.2.10}$$

где $\mu(du_0)$ — заданная вероятностная мера на $\mathscr{H}$.

Теорема 2.2. *Если начальная мера* μ *удовлетворяет условию* (I.5.6) *при некотором* $\alpha > 0$, *то задача Коши* (III.2.2), (III.2.10) *имеет решение* $\mu(t, dw)$, *удовлетворяющее оценке* (III.2.1).

Доказательство. Пусть P — пространственно-временнóе статистическое решение системы (II.1.1) с начальной мерой μ, построенное в главе II. Согласно теореме 2.1 семейство мер $\mu(t, \cdot) \equiv \gamma_t^* P$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяет уравнению (III.2.2). Начальное условие (III.2.10) выполнено в силу п. 2) определения 2.1 из главы II, а оценка (III.2.1) справедлива вследствие леммы 2.1. ■

В заключение отметим, что разрешимость задачи Коши для прямого уравнения Колмогорова можно доказать непосредственно, не используя пространственно-временнóго статистического решения P (см. [10]). То же относится к уравнению Хопфа (см. [48]—[50], [18], [19], [5]).

ГЛАВА IV
СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА

§ 1. Стационарные статистические решения стохастической системы

Будем в данной главе обозначать через $\mathscr{C}L_T^{-s}$ пространство $\mathscr{C}L^{-s}$ из главы II и через $\|\cdot\|_{\mathscr{C}L_T^{-s}}$ — полунорму (II.1.3″) в этом пространстве. Пусть

$$\mathscr{C}L_\infty^{-s} = \mathscr{C}L(0.\ \infty;\ \mathscr{H}^{-s}) = \lim_{T\to\infty} \operatorname{proj} \mathscr{C}L_T^{-s}$$

— пространство функций $t \to u(t, \cdot) \in \mathscr{H}^{-s}$, $t \in [0, \infty)$, для которых сужения на $0 \leqslant t \leqslant T$ принадлежат

$$\mathscr{C}L(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s}) \equiv \mathscr{C}L_T^{-s}$$

при любом $T > 0$; топология в $\mathscr{C}L_\infty^{-s}$ задается полунормами $\|\cdot\|_{\mathscr{C}L_T^{-s}}$, $T > 0$. Положим

$$UL_\infty \equiv L_2^{\mathrm{loc}}(0,\ \infty;\ \mathscr{H}^1) \cap \mathscr{C}L_\infty^{-s};$$

топология в UL_∞ задается полунормами (II.1.3′), которые будем обозначать через $\|\cdot\|_{UL_T}$ $\forall T > 0$. Введем также пространство

$$Z_\infty = \lim_{T\to\infty} \operatorname{proj} Z_T,$$

где Z_T — пространство (I.2.1); топология в Z_∞ определяется полунормами (I.2.1). Очевидно, $\mathscr{C}L_\infty^{-s}$, UL_∞, Z_∞ — сепарабельные пространства Фреше.

Рассмотрим стохастическую систему Навье — Стокса (II.1.1) со стационарными неслучайными внешними силами $f(t, x) \equiv f(x) \in H^{-1}$. Отметим, что $\dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t}$ — обобщенный стационарный процесс, поскольку $w(t, x)$ — винеровский процесс в H.

Определение 1.1. Пространственно-временны́м статистическим решением системы (II.1.1) называется вероятностная борелевская мера $P(\omega)$, $\omega \in \mathfrak{B}(Z_\infty)$, сосредоточенная на UL_∞ и удовлетворяющая условию 3) определения 2.1 из главы II и оценкам (II.2.7) и (II.2.9) при любом $T \in (0, \infty)$ [1].

Определение 1.2. Мера P называется стационарной, если она инвариантна относительно сдвигов по t: $\hat{\tau}^* P = P$ $\forall \tau > 0$, где $\hat{\tau} u(t, x) = u(t + \tau, x)$.

Очевидно, для стационарной меры P ее сечение $\mu(t, \cdot) = \gamma_t^* P$ не зависит от $t > 0$.

Пусть, как и в главах I—III, $s > \frac{n}{2} + 1$. Сформулируем основные результаты этой главы.

Теорема 1.1 [13]. *При $n \geqslant 2$ и любом $\nu > 0$ система* (II.1.1) *с $f(t, x) \equiv f(x) \in H^{-1}$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет стационарное пространственно-временно́е статистическое решение $\overline{P}$, для которого имеют место $\forall \alpha > 0$ и $\forall p > 0$ оценки*

$$\text{(IV. 1.1)} \qquad \int \| u(t, \cdot) \|_1^2 \| u(t, \cdot) \|^{2\alpha} \overline{P}(du) \leqslant \overline{C}_\alpha = \text{const} < +\infty, \quad t \geqslant 0,$$

$$\text{(IV. 1.2)} \qquad \int \| u \|^p_{\mathscr{C} L_T^{-s}} \overline{P}(du) \leqslant \overline{C}_{p, T} < +\infty \quad \forall T > 0.$$

Мера $\overline{\mu} = \gamma_t^* \overline{P}$ на $\mathscr{H}^{-s}$ не зависит от $t \geqslant 0$, и при любом $\alpha > 0$ для нее справедлива оценка

$$\text{(IV. 1.1}'\text{)} \qquad \int \| w \|_1^2 \| w \|^{2\alpha} \overline{\mu}(dw) \leqslant \overline{C}_\alpha < +\infty;$$

мера $\overline{\mu}$ сосредоточена на $\mathscr{H}^1$ и удовлетворяет стационарному прямому уравнению Колмогорова (см. (III.2.3))

$$\text{(IV. 1.3)} \qquad 0 = \int e^{i\langle w, v \rangle} K(v, w) \overline{\mu}(dw) \quad \forall v \in \mathscr{H}^s,$$

где

$$K(v, w) = i \langle \nu A w + B(w) - g, v \rangle + \frac{1}{2} \langle Q v, v \rangle$$

для $w \in \mathscr{H}$ и $v \in \mathscr{H}^s$. (Операторы A, B и функция g определены в § 1 *гл.* I).

Эта теорема будет доказана ниже, в § 2.

Теорема 1.2. *Пусть $f \equiv 0$. Тогда при $n = 2$ мера $\overline{P}$, построенная в теореме* 1.1, *удовлеворяет тождеству*

$$\text{(IV. 1.4)} \qquad \nu \int \| u(t, \cdot) \|_1^2 \overline{P}(du) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \pi Q \pi, \qquad t \geqslant 0.$$

Если же $n \geqslant 3$, то левая часть (IV.1.4) *не превосходит правой.*

Эта теорема будет доказана в § 3.

Замечание 1.1. Пусть $n = 2$ и $\overline{P}$ — стационарное статистическое решение системы (II.1.1), построенное в теореме 1.1. Интеграл в левой части (IV.1.4) имеет физический смысл средней скорости $\overline{a}(t)$ диссипации энергии в момент времени t для статистического решения $\overline{P}$. Эта скорость $\overline{a}$ диссипации энергии не зависит от $t > 0$, поскольку мера $\overline{P}$ стационарна. Из тожде-

[1]) В этом определении зафиксированы лишь те свойства статистического решения P, которые используются в дальнейшем. Поэтому определение 1.1 в некотором смысле слабее определения 2.1 из главы II.

ства (IV.1.4) следует, что в случае $f(t, x) \equiv 0$ при $n = 2$ для решений $\bar{P} = \bar{P}^{\nu}$, построенных в теореме 1.1, величина $\bar{a}$ не зависит от $\nu > 0$, если оператор Q фиксирован. Если при этом $\pi Q \pi \neq 0$, то $\bar{a}$ не стремится к нулю при $\nu \to 0$, что соответствует гипотезе А. Н. Колмогорова, высказанной им в более общей форме в его докладе на семинаре имени И. Г. Петровского [34].

З а м е ч а н и е 1.2. Пусть $n \geqslant 2$ любое. Тогда мера $\bar{\mu}$, построенная в теореме 1.1, нетривиальна, если $\pi Q \pi \neq 0$; это значит, что $\bar{\mu}(dw)$ не сосредоточена в точке $w = 0$. Действительно, в противном случае из (IV.1.3) получаем

$$\int K(v, w)\, \bar{\mu}(dw) = K(v, 0) = \frac{1}{2} \langle Qv, v \rangle = 0$$

при $v \in \mathscr{H}^s$, откуда $\pi Q \pi = 0$.

§ 2. Построение стационарного статистического решения

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 1.1.

1. Построение статистического решения при $t \in (0, \infty)$. Пусть

$$\overset{0}{\mathscr{V}}{}^s = \{v(t, \cdot) \in \overset{0}{H}{}^1(0, \infty; \mathscr{H}^s) \colon v(t, \cdot) = 0$$
$$\text{при } t > T \text{ для некоторого } T > 0, \text{ зависящего от } v\}$$

и пусть $\mu(du_0)$ — начальная мера на $\mathscr{H}$, сосредоточенная в точке $u_0 = 0$. Тогда условие (I.5.6) на μ выполняется при любом $\alpha > 0$. Аналогично теореме 3.1 из главы II доказывается, что существует галёркинское приближение P_m статистического решения, отвечающего мере μ, определенное на $\mathfrak{B}(Z_\infty)$, удовлетворяющее условию (II.3.7) с $\tilde{\mu}(v_0) \equiv 1$, и оценкам (II.3.10) и (II.3.8) с любыми $\alpha > 0$, $T \in (0, \infty)$.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Семейство мер P_m, $m \geqslant 1$, слабо компактно на Z_∞.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$K_T = \left\{ u \in UL_\infty \colon \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_1^2\, dt + \|u\|_{\mathscr{C}L_T^{-s}} < M(T) \right\},$$

где $M(T)$ — некоторая константа. В силу (II.3.8) и (II.3.10) для любого $T > 0$ существует константа $C(T)$, не зависящая от $M(T)$ и $m \geqslant 1$, такая, что

$$P_m(K_T) \geqslant 1 - \frac{C(T)}{M(T)}. \qquad \text{(IV. 2.1)}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $M(T)$ для $T = 1, 2, \ldots$ так, чтобы было

$$\sum_{T=1}^{\infty} \frac{C(T)}{M(T)} < \varepsilon. \qquad \text{(IV. 2.2)}$$

Пусть $K^\varepsilon = \bigcap_{T=1}^{\infty} K_T$. Тогда в силу (IV. 2.1) и (IV. 2.2)

$$P_m(K^\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon \qquad \forall m \geqslant 1. \qquad \text{(IV.2.3)}$$

Так как по теореме Дубинского сужения функций $u(t, \cdot) \in K_T$ на $[0, T]$ составляют предкомпакт в Z_T, то K^ε — предкомпакт в Z_∞. Поэтому из (IV.2.3) в силу теоремы Прохорова следует предложение 2.1. ■

В силу предложения 2.1 из семейства мер $\{P_m\}$ можно выбрать последовательность P_k, слабо сходящуюся на Z_∞ к мере P. Аналогично п. 2, 3 § 4 главы II устанавливается, что мера P является статистическим решением системы (II.1.1) в смысле определения 1.1.

2. Осреднение нестационарных решений. Пусть P — статистическое (нестационарное) решение, построенное выше. Мера $P(\omega)$ определена при $\omega \in \mathfrak{B}(Z_\infty)$. Для любого $\theta > 0$ определим вероятностное пространство

$$\left(Z_\infty \times [0, \theta], \mathfrak{B}(Z_\infty \times [0, \theta]), P \times \frac{d\tau}{\theta}\right) \tag{IV. 2.4}$$

с оператором математического ожидания $\mathscr{E}_\theta$ и на нем зададим поле $u_\theta = u_\theta(t, x)$ по формуле

$$u_\theta(t, x; \omega) \equiv \hat{\tau} u(t, x) \equiv u(\tau + t, x) \quad \text{для} \quad \omega = (u, \tau) \in Z_\infty \times [0, \theta]. \tag{IV. 2.5}$$

Пусть P_θ — распределение поля u_θ. Оно является борелевской мерой на Z_∞. Тогда для любого P_θ-интегрируемого функционала $f(u)$

$$\int f(u) P_\theta(du) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \int f(\hat{\tau} u) P(du)\, d\tau. \tag{IV. 2.6}$$

3. Слабая компактность мер P_θ. Определим на (IV.2.4) процесс

$$w_\theta(t) \equiv u_\theta(t) - u_\theta(0) + \int_0^t (\nu A u_\theta(\tau) + B(u_\theta(\tau)) - g)\, d\tau,$$

где u_θ — процесс (IV.2.5).

П р е д л о ж е н и е 2.2. *$w_\theta(t)$ — винеровский процесс в $\mathscr{H}$ с корреляционным оператором $\pi Q \pi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения $w_\theta(t)$ видно, что $w_\theta(\cdot) \in C(0, \infty; \mathscr{H}^{-s})$ и $w_\theta(0) = 0$ п. н. Кроме того, в силу (IV.2.6) из (II.2.10) получаем для любого $v \in \mathring{\mathscr{V}}^s$:

$$\mathscr{E}_\theta e^{i\left\{\frac{\partial w_\theta}{\partial t}, v\right\}} = \int e^{i\{\mathscr{A} u_\theta, v\}} P_\theta(du_\theta) = \tag{IV. 2.7}$$
$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(\int e^{i\{\mathscr{A} \hat{\tau} u, v\}} P(du)\right) d\tau = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \exp\left(-\frac{1}{2} \int_\tau^\infty \langle Qv(t-\tau), v(t-\tau)\rangle\, dt\right) d\tau =$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\infty \langle Qv(t), v(t)\rangle\, dt\right) = \widetilde{\Lambda}\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad \forall v \in \mathring{\mathscr{V}}^s.$$

Поскольку $w_\theta(t) \in \mathscr{H}^{-s}$, $t > 0$, то из (IV.2.7) вытекает, что w_θ — винеровский процесс в $\mathscr{H}$ с корреляционным оператором $\pi Q \pi$. ■

Докажем две оценки для P_θ, аналогичные оценкам (II.3.8), (II.3.10).

Л е м м а 2.1. *Для любых $T > 0$ и $\alpha \geqslant 0$*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathscr{E}_\theta \| u_\theta(t) \|_1^2 \| u_\theta(t) \|^{2\alpha} \leqslant C_{\alpha, T} < +\infty, \qquad \theta > 1, \tag{IV. 2.8}$$

где $C_{\alpha, T}$ не зависит от θ.

Доказательство. Из (IV.2.4)—(IV.2.6) в силу справедливости оценок (II.2.7) при любом $\alpha > 0$ вытекает, что при $\theta > 1$

$$\mathscr{E}_\theta \| u_\theta(t) \|_1^2 \| u_\theta(t) \|^{2\alpha} = \mathscr{E} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \| u(\tau + t) \|_1^2 \| u(\tau + t) \|^{2\alpha} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mathscr{E} \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta+T} \| u(s) \|_1^2 \| u(s) \|^{2\alpha} ds \leqslant \frac{a_\alpha + b_\alpha(\theta + T)}{\theta} \leqslant C_\alpha (1 + T) < \infty. \blacksquare$$

Лемма 2.2. *Для любых $T > 0$ и $p > 0$ при $s > \frac{n}{2} + 1$*

$$\mathscr{E}_\theta \| u_\theta \|^p_{\mathscr{C}L_T^{-s}} \leqslant C_{\alpha, T} < \infty, \quad \theta > 1, \tag{IV.2.9}$$

где $C_{\alpha, T}$ не зависит от θ.

Доказательство. Определим процесс

$$z_\theta(t) \equiv u_\theta(t) - w_\theta(t).$$

Тогда в силу определения $w_\theta(t)$ имеем:

$$\dot{z}_\theta(t) = -\nu A u_\theta(t) - B(u_\theta(t)) + g.$$

Отсюда

$$\| \dot{z}_\theta(t) \|_{-s} \leqslant C(1 + \| u_\theta(t) \|^2),$$

и, следовательно, для гёльдеровской нормы в

$$\mathscr{C}_T^{(\varkappa), -s} \equiv \mathscr{C}^{(\varkappa)}(0, T; \mathscr{H}^{-s})$$

с показателем $\varkappa = \alpha/(1 + \alpha)$ при любом $\alpha > 0$ получаем в силу (IV.2.8) аналогично (II.3.21):

$$\mathscr{E}_\theta \| z_\theta \|^{1+\alpha}_{\mathscr{C}_T^{(\varkappa), -s}} \leqslant \mathscr{E}_\theta \left(\int_0^T \| \dot{z}_\theta(t) \|^{1+\alpha}_{-s} dt \right) \leqslant \tag{IV.2.10}$$

$$\leqslant C \mathscr{E}_\theta \left(T + \int_0^T \| u_\theta(t) \|_1^2 \| u_\theta(t) \|^{2\alpha} dt \right) \leqslant C_{\alpha, T}, \quad \theta > 1.$$

С другой стороны, в силу предложения 2.2, так же как в лемме 3.2 главы II, доказывается, что при любом $p > 0$

$$\mathscr{E}_\theta \| w_\theta \|^p_{\mathscr{C}L_T^{-s}} \leqslant C_{p, T}, \quad \theta > 0, \tag{IV.2.11}$$

где $C_{p, T}$ не зависит от θ. Возьмем в (IV.2.10) $\alpha \geqslant 1$ так, чтобы было $1 + \alpha \geqslant p$. Тогда $\varkappa \equiv \alpha/(1 + \alpha) \geqslant 1/2$ и из (IV.2.10) и (IV.2.11) вытекает (IV.2.9). ■

С помощью оценок (IV.2.8), (IV.2.9) аналогично предложению 2.1 доказывается

Предложение 2.3. *Семейство мер $\{P_\theta\}$, $\theta > 1$, слабо компактно на Z_∞.*

3. Предельный переход. Доказательство теоремы 1.1. Из предложения 2.3 вытекает, что существует последовательность мер P_{θ_k}, $\theta_k \to \infty$, слабо сходящаяся на Z_∞:

$$P_{\theta_k} \to \overline{P} \text{ при } \theta_k \to \infty, \tag{IV.2.12}$$

где $\overline{P}$ — борелевская вероятностная мера на Z_∞. Проверим, что $\overline{P}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1.

1) Мера $\overline{P}$ стационарна. Действительно, для любого $f(\cdot) \in C_b(Z_\infty)$ и $\forall \tau > 0$ из (IV.2.12) получаем

$$\int f(u)\,\overline{P}(du) = \lim_{\theta_k\to\infty}\frac{1}{\theta_k}\int_0^{\theta_k}\left(\int f(\hat{\tau}u)\,P(du)\right)d\tau =$$

$$= \lim_{\theta_k\to\infty}\frac{1}{\theta_k}\int_0^{\theta_k}\left(\int f(\hat{\tau}_0\hat{\tau}u)\,P(du)\right)d\tau = \int f(\hat{\tau}_0 u)\,\overline{P}(du).$$

Следовательно, оператор $\hat{\tau}_0$ сохраняет меру $\overline{P}$ каждого $\omega \in \mathfrak{B}(Z_\infty)$. ■

2) Тождество (II.2.10) при $v_0 = 0$ для $\overline{P}$ вместо P следует из (IV.2.7) при $\theta = \theta_k \to \infty$ согласно (IV.2.12), поэтому $\mathcal{A}^*\overline{P} = \mathcal{N}$.

3) Оценки (IV.1.1)—(IV.1.2) выводятся из (IV.2.8)—(IV.2.9) посредством аппроксимаций функционалов $\| u(t) \|_1$, $\| u(t) \|$ и $\| u \|_{\mathscr{C}L_T^{-s}}$ непрерывными, ограниченными на Z_∞ функционалами и с последующим использованием (IV.2.12) и леммы Фату.

4) Оценка (IV.1.1′) получается из (IV.1.1) заменой переменных $u(t) \to w$.

5) Наконец, выведем стационарное прямое уравнение Колмогорова (IV.1.3). Положим $\mu_\theta = \gamma_0^* P_\theta$, $\overline{\mu} = \gamma_0^*\overline{P}$. Из (IV.2.8) при $t = 0$ следует слабая компактность мер μ_θ, $\theta > 1$, на $\mathscr{H}$. Это свойство мер μ_θ вытекает из компактности вложения $\mathscr{H}^1 \subset \mathscr{H}$ и из теоремы Прохорова. Так как в силу (IV.2.12) для $v_0 \in \mathscr{H}^s$

$$\int e^{i\langle u_0, v_0\rangle}\mu_{\theta_k}(du_0) = \int e^{i\langle \gamma_0 u, v_0\rangle}P_{\theta_k}(du) \xrightarrow[\theta_k\to\infty]{} \int e^{i\langle\gamma_0 u, v_0\rangle}\overline{P}(du) =$$

$$= \int e^{i\langle u_0, v_0\rangle}\overline{\mu}(du_0),$$

то

$$\text{(IV.2.13)} \qquad \mu_{\theta_k} \to \overline{\mu} \quad \text{на } \mathscr{H} \quad \text{при} \quad \theta_k \to \infty.$$

Из (IV.2.8) с помощью леммы Фату выводится, что мера $\overline{\mu}$ сосредоточена на $\mathscr{H}^1$. Покажем, что $\overline{\mu}$ удовлетворяет (IV.1.3).

Действительно, пусть $\mu(t, \cdot) = \gamma_t^* P$ — сечения меры P. По теореме 3.1 главы III меры $\mu(t, \cdot)$ удовлетворяют нестационарному прямому уравнению Колмогорова (III.2.3), которое после деления на θ при $t = \theta$ можно представить в следующем виде

$$\text{(IV. 2.14)} \qquad \frac{\tilde{\mu}(\theta, v_0) - \tilde{\mu}(0, v_0)}{\theta} = \frac{1}{\theta}\int\left(\int_0^\theta e^{i\langle u(\tau), v_0\rangle}K(v_0, u(\tau))\,d\tau\right)P(du) =$$

$$= \int e^{i\langle\gamma_0 u, v_0\rangle}K(v_0, \gamma_0 u)\,P_\theta(du) = \int e^{i\langle w, v_0\rangle}K(v_0, w)\,\mu_\theta(dw).$$

Положим здесь $\theta = \theta_k \to \infty$. Тогда левая часть (IV.2.14) стремится к нулю, а правая часть сходится к правой части (IV.1.3):

$$0 = \lim_{\theta_k\to\infty}\int e^{i\langle w, v_0\rangle}K(v_0, w)\,\mu_{\theta_k}(dw) = \int e^{i\langle w, v_0\rangle}K(v_0, w)\,\mu(dw).$$

Последнее равенство доказывается с помощью (IV.2.13) аналогично (III.2.9), причем используется разложение

$$K(v_0, w) = \varphi_R(w)K(v_0, w) + (1 - \varphi_R(w))K(v_0, w).$$

Теорема 1.1 доказана. ■

§ 3. О средней скорости диссипации энергии

В этом параграфе мы докажем теорему 1.2. Подставим в (IV.1.3) $v(x) = v_j e_j(x)$, где $v_j \in \mathbb{R}$, а $e_j(x) \in [C^\infty(\bar\Omega)]^n$ — собственные функции оператора $A \equiv -\Delta$ (см. § 1 главы I). Дифференцируя полученное тождество по v_j два раза, формально получим ($u_j \equiv \langle u, e_j\rangle$):

$$\text{(IV. 3.1)} \qquad \int \exp(i\langle u, v_j e_j\rangle)\left[(iu_j)^2 K + 2iu_j \frac{\partial K}{\partial v_j} + \frac{\partial^2 K}{\partial v_j^2}\right]\bar\mu(du) = 0.$$

Законность этого дифференцирования легко выводится из оценки (IV.1.1′) при $\alpha = 1$. Полагая в (IV.3.1) $v_j = 0$ и суммируя по j от 1 до m, получаем

$$\text{(IV. 3.2)} \qquad \int (-2\langle -(u, \nabla) u + \nu\Delta u, u_{(m)}\rangle - \mathrm{Sp}\, \pi_m Q \pi_m)\, \bar\mu(du) = 0.$$

Здесь $u_{(m)} \equiv \pi_m u \to u$ при $m \to \infty$ в $\mathscr{H}^1$ $\forall u \in \mathscr{H}^1$, откуда

$$\text{(IV. 3.3)} \qquad \langle -(u, \nabla) u + \nu\Delta u, u_{(m)}\rangle \to -\nu\langle \nabla u, \nabla u\rangle$$

при $m \to +\infty$ для $n = 2, 3, 4$ (см. [48]). Поскольку $n = 2$, то из неравенства Ладыженской [37] получаем, что

$$|\langle -(u, \nabla)u + \nu\Delta u, u_{(m)}\rangle| \leqslant C\, \|u\|_1^2(\|u\| + 1).$$

Но функционал в правой части последнего неравенства суммируем по мере $\bar\mu$ в силу оценки (IV.1.1) при $\alpha = 1/2$. Следовательно, из (IV.3.2) — (IV.3.3) по теореме Лебега получаем

$$\int (2\nu\langle \nabla u, \nabla u\rangle - \mathrm{Sp}\, \pi Q \pi)\, \bar\mu(du) = 0,$$

откуда вытекает (IV.1.4) в случае $n = 2$.

В случае $n \geqslant 3$ нужно воспользоваться галёркинским энергетическим тождеством (II.3.12) при $g = 0$ и $\alpha = 0$ и перейти в нем к пределу при $m \to +\infty$. Тогда из построения меры $\bar P$, как предела мер P_{θ_k} (см. (IV.2.12)), можно вывести при помощи леммы Фату, что левая часть (IV.1.4) не превосходит правой. Теорема 1.2 доказана. ■

ГЛАВА V
МОМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ—СТОКСА

§ 1. Моменты пространственного статистического решения. Цепочка моментных уравнений

1. Определение моментов статистического решения. Пусть $\mu(\omega_0)$, $\omega_0 \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, — вероятностная мера, удовлетворяющая условию

$$\text{(V. 1.1)} \qquad \int \|u_0\|^k \mu(du_0) < \infty \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\mu(t, dw)$, $0 \leqslant t \leqslant T$,— построенное в теореме 1.2 главы III пространственное статистическое решение системы Навье — Стокса (I.1.1) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с начальной мерой $\mu(du_0)$ — удовлетворяет оценке (III.1.2′) при любом $k \geqslant 2$ (согласно лемме 1.2 главы III). Положим $\Omega^k = \Omega \times \ldots \times \Omega$ (k раз),

$$\bar x^k = (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega^k.$$

Моментом k-го порядка статистического решения $\mu(t, dw)$ называется тензор

$$M_k(t, \bar x^k) = \{M_k^{\bar l^k}(t, \bar x^k) : \bar l^k = (l_1, \ldots, l_k),\ l_j = 1, \ldots, n\},$$

компоненты которого формально определяются соотношением

$$(\text{V}.1.2)\qquad M_k^{\bar{l}_k}(t, \bar{x}^k) = \int w^{l_1}(x_1) \ldots w^{l_k}(x_k)\, \mu(t, dw),$$

где $w^l(x)$ — l-я координата вектора $w(x)$. Это определение нуждается в уточнении, так как функционал $w \to w^{l_1}(x_1) \ \ldots \ w^{l_k}(x_k)$ не определен на пространстве $\mathscr{H}^1$, на котором при п. в. $t \in [0, T]$ сосредоточена мера $\mu(t, \cdot)$.

Дадим строгое определение моментов $M_k(t, \bar{x}^k)$. Пусть

$$\mathbb{R}^{n,k} \equiv \mathbb{R}^n \otimes \ldots \otimes \mathbb{R}^n \quad (k \text{ раз})$$

и

$$H^{\otimes k} = H \otimes \ldots \otimes H, \quad \mathscr{H}^{\otimes k} = \mathscr{H} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}$$

— k-е тензорные степени пространств H и $\mathscr{H}$ соответственно[1]). Тогда $H^{\otimes k} = L_2(\Omega^k) \otimes \mathbb{R}^{n,k}$ — пространство, состоящее из вектор-функций

$$M_k(\bar{x}^k) = \{M_k^{\bar{l}_k}(\bar{x}^k) \colon \bar{l}^k = (l_1, \ldots, l_k),\ l_j = 1, \ldots, n\},$$

квадратично интегрируемых на Ω^k, причем норма в $H^{\otimes k}$ совпадает с нормой в $L_2(\Omega^k) \otimes \mathbb{R}^{n,k}$; $\mathscr{H}^{\otimes k}$ — подпространство в $H^{\otimes k}$, состоящее из функций $M_k(\bar{x}^k) \in H^{\otimes k}$, удовлетворяющих следующему условию соленоидальности:

$$(\text{V}.1.3)\qquad \int\limits_{\Omega^k} \sum_{\bar{l}^k} M_k^{\bar{l}_k}(\bar{x}^k) \frac{\partial \varphi(x_m)}{\partial x_m^{l_m}} \psi^{l_1, \ldots, \hat{l}_m, \ldots, l_k}(x_1, \ldots, \hat{x}_m, \ldots, x_k)\, d\bar{x}^k = 0$$

$\forall \varphi \in H^1(\Omega)$, $\forall \psi \in H^{\otimes(k-1)}$ $(m = 1, \ldots, k)$, где значки $\hat{x}_m$, $\hat{l}_m$ означают, что функция ψ не зависит от этих переменных.

Рассмотрим на $H^{\otimes k}$ при любом $t \in [0, T]$ линейный функционал

$$F(t, \varphi) \equiv \int \langle w^{\otimes k}, \varphi \rangle_k\, \mu(t, dw),$$

где $\varphi \in H^{\otimes k}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ — скалярное произведение в $H^{\otimes k}$ и

$$w^{\otimes k}(\bar{x}^k) = w(x_1) \otimes \ldots \otimes w(x_k) = \{w^{l_1}(x_1) \ldots w^{l_k}(x_k) \colon l_j = 1, \ldots, n\}$$

— тензорная степень векторного поля

$$w(x) = (w^1(x), \ \ldots, \ w^n(x)) \in H.$$

В силу (III.1.2′) при любом $t \in [0, T]$ функционал $F(t, \cdot)$ непрерывен на $H^{\otimes k}$, и поэтому существует тензор $M_k(t, \cdot) \in H^{\otimes k}$ такой, что

$$(\text{V}.1.4)\qquad \langle M_k(t, \cdot), \varphi(\cdot) \rangle_k = \int \langle w^{\otimes k}, \varphi \rangle_k\, \mu(t, dw) \qquad \forall \varphi \in H^{\otimes k}.$$

Определение 1.1. Функция

$$t \to M_k(t, \cdot) \in H^{\otimes k} = L_2(\Omega^k) \otimes \mathbb{R}^{n,k},$$

определенная соотношением (V.1.4), называется *k-м моментом пространственного статистического решения*

2. Простейшие свойства моментов. а) Из определения (V.1.4) вытекает, что при любом $t \in [0, T]$ моменты $M_k(t, \bar{x}^k)$ симметричны в следующем смысле:

$$M_k^{l_1, \ldots, l_k}(t, x_1, \ldots, x_k) = M_k^{l_{j_1}, \ldots, l_{j_k}}(t, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$$

для любой перестановки $(j_1, \ldots, j_k)$ набора чисел $(1, \ldots, k)$.

[1]) Определение тензорных произведений гильбертовых пространств см. в [29].

б) $M_k(t, \cdot) \in \mathscr{H}^{\otimes k}$ при любом $t \in [0, T]$. Действительно, тензор $w^{\otimes k}$ удовлетворяет тождеству вида (V.1.3), если $w \in \mathscr{H}$, а мера $\mu(t, \cdot)$ сосредоточена на $\mathscr{H}$; поэтому из определения (V.1.4) получаем, что условие (V.1.3) выполняется с заменой $M_k(\cdot)$ на $M_k(t, \cdot)$.

в) Из справедливости оценки (III.1.2′) при любом $k \geqslant 2$ вытекает, что для любого $k = 1, 2, \ldots$

$$M_k(t, \overline{x}^k) \in L_\infty(0, T; \mathscr{H}^{\otimes k}) \cap L_2(0, T; H^1(\Omega^k) \otimes \mathbb{R}^{n, k}) \cap L_1(0, T; H^{1, k}).$$

Здесь $H^{1,k}$ — пространство функций $M_k(\overline{x}^k) \in H^{\otimes k}$ с конечной нормой

$$\text{(V.1.5)}\qquad \|M_k(\cdot)\|_{1,k} = \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}\ \sum_{|\alpha_i|\leqslant 1}\ \sum_{|\alpha_j|\leqslant 1} \int_{\Omega^k} \sum_{\overline{l}^k} |D_{x_i}^{\alpha_i} D_{x_j}^{\alpha_j} M^{\overline{l}_k}(\overline{x}^k)|^2 d\overline{x}^k\right)^{1/2} < \infty.$$

г) Определим для гладких функций

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in C^\infty(\Omega^{k+1}) \otimes \mathbb{R}^{n, k+1}$$

следующий оператор сужения на i-ю диагональ $x_{k+1} = x_i$ при $i = 1, \ldots, k$:

$$\text{(V.1.6)}\qquad (\Gamma_i\varphi)(x_1, \ldots, x_k) = \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k, x_i) \in C_0^\infty(\Omega^k) \otimes \mathbb{R}^{n, k+1}.$$

Предложение 1.1. *Пусть $n = \dim \Omega \leqslant 3$. Тогда оператор* (V.1.6) *продолжается до непрерывного оператора*

$$\Gamma_i\colon\ H^{1, k+1} \to L_2(\Omega^k) \otimes \mathbb{R}^{n, k+1}.$$

Это предложение является аналогом теоремы Соболева о следах функций из пространств H^s. При этом роль пространств H^s играют пространства $H^{1,k}$ с нормой (V.1.5).

Из свойства в) в силу предложения 1.1 получаем, что при $n \leqslant 3$ для почти всех $t \in [0, T]$ определено сужение

$$(\Gamma_j M_{k+1})(t, \overline{x}^k) = M_{k+1}(t, x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, x_j)$$

момента M_{k+1} на диагональ $x_{k+1} = x_j$, причем

$$\text{(V.1.7)}\qquad (\Gamma_j M_{k+1})(t, \cdot) \in L_2(\Omega^k) \otimes \mathbb{R}^{n, k+1} \quad \text{при п. в.} \quad t \in [0, T].$$

Отметим, что аналогичное сужение $(\Gamma_j M_{k+1})(t, \overline{x}^k)$ может быть определено при любом n, однако в этом случае сужение понимается в более слабом смысле (см. [19]) и $\Gamma_i M_{k+1}(t, \cdot)$ является элементом более широкого пространства, чем в (V.1.7).

3. Вывод цепочки моментных уравнений. Положим

$$\text{(V.1.8)}\qquad (b_k M_{k+1})^{\overline{l}^k}(t, \overline{x}^k) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j^r} (\Gamma_j M_{k+1})^{l_1, \ldots, l_k, r}(t, \overline{x}^k),$$

$$\text{(V.1.9)}\qquad \Delta_k M_k(t, \overline{x}^k) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x_j^r)^2} M_k(t, \overline{x}^k).$$

Теорема 1.1. *Пусть $n \geqslant 2$, $\mu(t, dw)$ — пространственное статистическое решение системы* (I.1.1), *для которого выполняются оценки* (III.1.2′) $\forall k \geqslant 2$. *Тогда его моменты $M_k(t, \overline{x}^k)$ удовлетворяют следующей цепочке уравнений:*

$$\text{(V.1.10)}\qquad \langle M_k(t, \cdot) - M_k(0, \cdot), v^{\otimes k}\rangle_k =$$

$$= \int_0^t \langle \nu\Delta_k M_k(\tau, \overline{x}^k) - b_k M_{k+1}(\tau, \overline{x}^k) + k M_{k-1}(\tau, \overline{x}^{k-1}) \otimes g(\tau, \overline{x}^k), v^{\otimes k}(\overline{x}^k)\rangle_k\, d\tau$$

$\forall v \in V$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *где* b_k, Δ_k — *операторы* (V.1.8) — (V.1.9), *а* $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ — *расширение скалярного произведения в* $H^{\otimes k}$; $M_0(\tau, \cdot) \equiv 1$ *по определению, так что*

$$M_0(\tau, \bar{x}^0) \otimes g(\tau, x_1) = g(\tau, x_1).$$

Доказательство. Разлагая $\exp(i\langle w, v\rangle)$ в (III.1.3) в ряд Тейлора, получим в силу (V.1.4) для любого $N = 1, 2, \ldots$

$$\text{(V. 1.11)} \quad \chi(t, v) - \chi(0, v) = \sum_{k=1}^{N} \frac{i^k}{k!} \langle M_k(t, \cdot) - M_k(0, \cdot), v^{\otimes k} \rangle_k + R_N^1(t, v),$$

где $R_N^1(t, v)$ — остаточный член; $R_N^1(t, \lambda v) = \mathcal{O}(\lambda^{N+1})$ при $\lambda \to 0$ для любого $v \in V$ в силу справедливости оценки (III.1.2′). Формула (V.1.11) дает разложение левой части уравнения Хопфа (III.1.5) по степеням v. Аналогично получим разложение правой части; например,

$$\text{(V. 1.12)} \quad i \int_0^t \int e^{i\langle v, w\rangle} \langle g(\tau), v\rangle \mu(\tau, dw)\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{i^k}{k!} k \int_0^t \langle M_{k-1}(\tau, \cdot) \otimes g(\tau, \cdot), v^{\otimes k}\rangle_k \, d\tau + R_N^2(t, v).$$

Далее, используя обозначение (V.1.9), получаем, что

$$k \int_0^t \left(\int \langle Aw, v\rangle \cdot \langle w, v\rangle^{k-1} \cdot \mu(\tau, dw) \right) d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(\int \langle w^{\otimes k}, \nu \Delta_k v^{\otimes k}\rangle_k \, \mu(\tau, dw) \right) d\tau = \int_0^t \nu \langle \Delta_k M_k(\tau, \cdot), v^{\otimes k}\rangle_k \, d\tau,$$

поэтому

$$\text{(V. 1.13)} \quad i \int_0^t \left(\int e^{i\langle w, v\rangle} \langle Aw, v\rangle \mu(\tau, dw) \right) d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{i^k}{k!} \int_0^t \nu \langle \Delta_k M_k(\tau, \cdot), v^{\otimes k}\rangle_k \, d\tau + R_N^3(t, v).$$

Наконец, используя обозначение (V.1.8), выводим:

$$\text{(V. 1.14)} \quad i \int_0^t \left(\int \left\langle \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial w^r w}{\partial x^r}, v \right\rangle e^{i\langle w, v\rangle} \mu(\tau, dw) \right) d\tau =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{i^k}{k!} \int_0^t \langle b_k M_{k+1}(\tau, \cdot), v^{\otimes k}\rangle_k \, d\tau + R_N^4(t, v).$$

Как и для R_N^1, имеем $|R_N^m(t, \lambda v)| = \mathcal{O}(\lambda^{N+1})$ при $\lambda \to 0$ для $m = 2, 3, 4$, поэтому, подставляя разложения (V.1.11) — (V.1.14) в уравнение Хопфа (III.1.5) и приравнивая члены одинакового порядка однородности по $v \in V$ в левой и правой части, получаем (V.1.10). ∎

Запишем цепочку уравнений (V.1.10) в операторном виде, подобном (I.1.17). Тензоры $b_k M_{k+1}(t, x_1, \ldots, x_k)$, вообще говоря, не являются соленоидальными по x_j в смысле (V.1.3), поэтому, чтобы освободиться от соленоидальных пробных функций $v(x)$ в (V.1.10), необходимо перейти от тензоров $b_k M_{k+1}$ к их соленоидальным в смысле (V.1.3) ортогональным проекциям.

А именно, при $n \leqslant 3$ из (V.1.7) — (V.1.8) следует, что для почти всех $t \in [0, T]$ функционал

$$\varphi \to \langle b_k M_{k+1}(t, \cdot), \varphi \rangle_k$$

определен и непрерывен на пространстве

$$\Phi = \mathscr{H}^{\otimes k} \cap (H^1(\Omega^k) \otimes \mathbb{R}^{n, k}).$$

Поэтому для этих t существует единственная функция $B_k M_{k+1}(t, \cdot) \in \Phi'$ [1]), удовлетворяющая тождеству

$$\text{(V.1.15)} \qquad \langle B_k M_{k+1}(t, \cdot), \varphi \rangle_k = \langle b_k M_{k+1}(t, \cdot), \varphi \rangle_k \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Кроме того, $B_k M_{k+1}(t, \cdot)$ — симметрический тензор подобно $M_k(t, \cdot)$ (см. а) п. 2), поэтому из (V.1.10) и (V.1.15) вытекает:

$$\text{(V.1.16)} \qquad \frac{\partial M_k(t, \overline{x}^k)}{\partial t} - \nu \Delta_k M_k(t, \overline{x}^k) =$$
$$= B_k M_{k+1}(t, \overline{x}^k) + S_k(M_{k-1}(t, x_1, \ldots, x_{k-1}) \otimes g(t, x_k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $S_k a_k$ — симметризация тензора $a_k^{l_1, \ldots, l_k}(x_1, \ldots, x_k)$ по переменным $(x_1, l_1), \ldots, (x_k, l_k)$. Бесконечная система дифференциальных уравнений (V.1.16) называется *цепочкой моментных уравнений*. Цепочка уравнений (V.1.16) выводится аналогично и при $n > 3$; при этом в качестве Φ нужно брать пространство функций гладкости $s > n/2$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_k(\overline{x}^k)$ моменты начальной меры $\mu(du_0)$; тогда, поскольку $\mu(0, dw)$ совпадает с мерой $\mu(du_0)$, то

$$\text{(V.1.17)} \qquad M_k(t, \overline{x}^k)|_{t=0} = \mathfrak{M}_k(\overline{x}^k) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

4. Разрешимость задачи Коши для цепочки моментных уравнений

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathfrak{M}_k(\overline{x}^k)$ — *моменты меры* $\mu(du_0)$, *удовлетворяющей условию* (V.1.1). *Тогда задача Коши* (V.1.16), (V.1.17) *для бесконечной цепочки моментных уравнений имеет решение* $\{M_k(t, \overline{x}^k), k \in \mathbb{N}\}$, *обладающее перечисленными выше свойствами* а) — г). *Кроме того, существует статистическое решение* $\mu(t, dw)$, *удовлетворяющее оценкам* (III.1.2'), *для которого* $M_k(t, \overline{x}^k)$ *является* k*-м моментом.*

Доказательство. Пусть $P(du)$ — пространственно-временнóе статистическое решение системы (I.1.1) с начальной мерой $\mu(du_0)$, построенное в главе I, а $\mu(t, dw)$ — пространственное статистическое решение, определенное соотношением (III.1.1) по мере $P(du)$. В силу леммы 1.2 главы III меры $\mu(t, dw)$ удовлетворяют оценкам (III.1.2'), поскольку для $\mu(du_0)$ выполняется условие (V.1.1). Как показано в п. 3 данного параграфа, моменты $M_k(t, \overline{x}^k)$ статистического решения $\mu(t, dw)$ удовлетворяют цепочке уравнений (V.1.16). Наконец, $\mu(t, dw)$ при $t = 0$ совпадает с $\mu(du_0)$, поэтому выполняется (V.1.17). ■

5. О приближенном решении цепочки моментных уравнений. Пусть $P_m(du)$ — галёркинское приближение меры $P(du)$, определенное соотношением (I.3.6), и $\mu_m(t, \cdot) = \gamma_t^* P_m$. При каждом $t \in [0, T]$ определим момент

---

[1]) Здесь Φ' — замыкание $\mathscr{H}^{\otimes k}$ по норме $\| u \|_{\Phi'} = \sup\limits_{v \in \Phi \setminus \{0\}} \dfrac{|\langle v, u \rangle_k|}{\| v \|_\Phi}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega^k) \otimes \mathbb{R}^{n,k}$, а также соотношение двойственности между Φ и Φ'.

$M_{k,m}(t, \overline{x}^k)$ меры $\mu_m(t, \cdot)$ соотношением

$$\langle M_{k,m}(t, \cdot), \varphi\rangle_k = \int \langle w^{\otimes k}, \varphi\rangle_k \mu_m(t, du) \qquad \forall\varphi \in H^{\otimes k}.$$

Тогда набор функций $\{M_{k,m}(t, \overline{x}^k), k \in \mathbb{N}\}$ можно взять в качестве приближения к решению $\{M_k(t, \overline{x}^k), k \in \mathbb{N}\}$ задачи Коши (V.1.16), (V.1.17). Действительно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любой функции* $\varphi(\overline{x}^k) \in \mathscr{H}^{\otimes k}$

$$\langle M_{k,r}(t, \cdot), \varphi\rangle_k \to \langle M_k(t, \cdot), \varphi\rangle_k \quad \forall t \in [0, T],$$

где r — *последовательность из соотношения* (I.4.3).

Доказательство этой теоремы вытекает из слабой сходимости на Z мер P_r к P при $r \to \infty$ и из оценок (III.1.2′).

§ 2. Моментная теория в случае малых чисел Рейнольдса

1. Функционально-аналитическая зависимость решений системы Навье—Стокса от начальных условий и правых частей. Положим

$$\mathscr{L} \equiv L_2(0, \infty; \mathscr{H}^0), \quad \mathscr{L}^{1,2} \equiv \left\{u(t, x) \in L_2(0, \infty; \mathscr{H}^2): \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathscr{L}\right\}.$$

Как и в главе II, пусть π: $H \to \mathscr{H}$ — оператор ортогонального проектирования в H на $\mathscr{H}$.

Предложение 2.1. *Пусть* $n = \dim \Omega \leqslant 4$, $f \in \mathscr{L}$, $u_0 \in \mathscr{H}^1$. *Тогда на решениях* $u \in \mathscr{L}^{1,2}$ *задача* (I.1.1) — (I.1.3) *эквивалентна задаче*

$$\text{(V.2.1)} \qquad \mathscr{F}(u) \equiv \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + Au + B(u) = f, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

где $A = -\nu\Delta$ (*см.* § 1 *главы* I),

$$B(u) = \pi \sum_{j=1}^{n} \left(u^j \frac{\partial u}{\partial x^j}\right).$$

Отметим, что для $u \in \mathscr{H}^2$ по теореме вложения Соболева $u^j \dfrac{\partial u}{\partial x^j} \in H^0$, поскольку $n \leqslant 4$. Поэтому определенный выше оператор B непрерывно действует из $\mathscr{L}^{1,2}$ в $\mathscr{L}$.

Через $K_\rho(X)$ обозначается шар в гильбертовом пространстве X с центром в нуле и радиуса ρ. Обозначим через $\mathscr{F}_0 u$ линейную часть оператора $\mathscr{F}(u)$ из (V.2.1) и рассмотрим линейную задачу

$$\text{(V.2.2)} \qquad \mathscr{F}_0 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f, \quad \gamma_0 u = u_0.$$

Напомним, что оператор R: $X \to Y$, где X и Y — гильбертовы пространства, называется *аналитическим в шаре* $K_\rho(X)$, если для $x \in K_\rho(X)$ имеем

$$R(x) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(x),$$

причем ряд сходится в Y, а

$$R_m(x) = \widetilde{R}_m(x, \ldots, x) \in Y,$$

где $\widetilde{R}_m(\cdot, \ldots, \cdot)$ — m-линейный оператор на X со значениями в Y.

Для задачи (V.2.1) справедлива теорема о функционально-аналитическом разложении решений (см. [15], [36]).

Теорема 2.1. *Пусть* $n = \dim\Omega \leqslant 4$. *Тогда существуют такие константы* $\rho > 0$, $\rho_1 > 0$, *что сужение оператора* $\mathfrak{A} \equiv (\mathcal{F}, \gamma_0)$ *на* $K_{\rho_1}(\mathcal{L}^{1,2})$ *имеет обратный оператор* R: $K_\rho(\mathcal{L} \times \mathcal{H}^1) \to K_{\rho_1}(\mathcal{L}^{1,2})$, *аналитический в шаре* $K_\rho(\mathcal{L} \times \mathcal{H}^1)$:

$$(\text{V.2.3}) \qquad u = R(f, u_0) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(f, u_0) \quad \forall (f, u_0) \in K_\rho(\mathcal{L} \times \mathcal{H}^1),$$

причем этот ряд сходится абсолютно в норме $\mathcal{L}^{1,2}$. *Однородные по* $x = (f, u_0)$ *операторы* R_m *порядка* m *определяются по рекуррентным формулам*

$$R_m(f, u_0) = -\sum_{j_1+j_2=m} R_1^0 \circ \widetilde{B}(R_{j_1}(f, u_0), \; R_{j_2}(f, u_0)), \quad m > 1,$$

где $R_1(f, u_0)$ — *оператор, сопоставляющий паре* (f, u_0) *решение линеаризованной задачи* (V.2.2), $R_1^0(f) \equiv R_1(f, 0)$, *а* $\widetilde{B}$ — *симметрический билинейный оператор, соответствующий квадратичному оператору* B *из* (V.2.1).

Доказательство. Как показано выше, оператор B непрерывно действует из $\mathcal{L}^{1,2}$ в $\mathcal{L}$, поскольку $n \leqslant 4$. Поэтому оператор

$$\mathfrak{A} \equiv (\mathcal{F}, \gamma_0)\colon \mathcal{L}^{1,2} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}^1$$

аналитичен. Кроме того, как известно, оператор

$$\mathfrak{A}_0 \equiv (\mathcal{F}_0, \gamma_0)\colon \mathcal{L}^{1,2} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}^1$$

осуществляет изоморфизм этих пространств; поэтому, применяя к оператору $\mathfrak{A}$ известную теорему о существовании аналитического обратного у аналитического оператора, линейная часть которого осуществляет изоморфизм соответствующих пространств, получим все утверждения теоремы 2.1.

В дальнейшем будем говорить, что *задаче* (V.2.1) *соответствует малое число Рейнольдса*, если $(f, u_0) \in K_\rho(\mathcal{L} \times \mathcal{H}^1)$, так что имеет место функционально-аналитическая зависимость (V.2.3) решения u задачи (V.2.1) от (f, u_0). Это в определенном смысле согласуется с известным определением малых чисел Рейнольдса, принятым в гидромеханике.

Возникает вопрос: является ли векторная функция (V.2.3) целой на $\mathcal{L} \times \mathcal{H}^1$ или радиус ρ сходимости ряда (V.2.3) конечен? Рассмотрим задачу для более простого, чем (V.2.1), уравнения Бюргерса

$$(\text{V.2.4}) \qquad \mathcal{F}(u) \equiv \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0, \quad \gamma_0 u = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

с периодическими граничными условиями $u(t, x) \equiv u(t, x + 2\pi)$. Для задачи (V.2.4) теорема 2.1 остается справедливой, если в ее формулировке взять $f(t, x) \equiv 0$ и заменить пространства $\mathcal{H}^s (s = 0, 1, 2)$ на пространства Соболева H^s скалярных функций $u(x)$ с периодом 2π (т. е. $H^s = H^s(\Omega)$, где Ω — окружность $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$); при этом пространства $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{1,2}$ заменяются на

$$L = L_2(0, \infty; H^0), \quad L^{1,2} = \{u(t, x) \in L_2(0, \infty; H^2), \ \frac{\partial u}{\partial t} \in L\}.$$

Кроме того, предполагается, что

$$(\text{V.2.4}') \qquad \int_0^{2\pi} u_0(x)\, dx = 0.$$

Справедлива следующая теорема [17], утверждающая, что для задачи (V.2.4) радиус сходимости ряда, аналогичного (V.2.3), конечен в H^1.

Теорема 2.2. *Существует начальное условие* $u_0 \in H^1$, *удовлетворяющее* (V.2.4′), *для которого ряд* (V.2.3) (*с* $f \equiv 0$) *расходится в* $L^{1,2}$, *а также в* $C_b(0, \infty; H^1)$.

В заключение отметим, что теорема об аналитичности обратного оператора справедлива для широкого класса эволюционных уравнений, заданных с помощью аналитических операторов ([15], [36]). Для справедливости такой теоремы достаточно, чтобы линейная часть исходного квазилинейного оператора осуществляла изоморфизм соответствующих пространств. В работе С. Б. Куксина [36] приведены примеры квазилинейных эволюционных уравнений, которые показывают, что указанное выше условие на линейную часть оператора существенно для аналитичности обратного оператора.

2. Статистические решения и их моменты в случае малых чисел Рейнольдса. Всюду ниже в этом параграфе предполагается, что $n = \dim\Omega \leqslant 3$. Обозначим через $C_b(0, \infty; \mathscr{H}^1)$ пространство непрерывных, ограниченных функций $t \to u(t) \in \mathscr{H}^1$, $t \in [0, \infty)$. Положим $S(t)u_0 = \gamma_t R(0, u_0)$, где $R(0, u_0)$ — сужение оператора (V.2.3) при $f = 0$. Из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Оператор S: $u_0 \to S(\cdot)u_0$ аналитически действует из $K_\rho(\mathscr{H}^1)$ в $K_{c\rho_1}(C_b(0, \infty; \mathscr{H}^1))$, где $c > 0$, а ρ и ρ_1 — константы из теоремы* 2.1:

$$(\text{V.2.5}) \qquad S(t)\,u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(t, u_0), \quad \|S(t)\,u_0\|_1 \leqslant c\rho_1 \quad \text{при} \quad \|u_0\|_1 < \rho.$$

Здесь $S_m(t, \cdot)$ — m-линейные операторы по u_0, и этот ряд сходится абсолютно по норме $\mathscr{H}^1$.

Для доказательства достаточно лишь отметить, что вложение

$$\mathscr{L}^{1,2} \subset C_b(0, \infty; \mathscr{H}^1)$$

непрерывно в силу теоремы вложения Соболева.

По определению, оператор $S(t)$ является оператором сдвига по траекториям задачи (V.2.1) с $f \equiv 0$, т. е. $S(t)u_0 = u(t, \cdot)$ есть решение задачи

$$(\text{V.2.6}) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + Au + B(u) = 0, \quad \gamma_0 u = u_0.$$

Пусть $\mu(du_0)$ — вероятностная мера на $\mathscr{H}^0$, соответствующая случаю малых чисел Рейнольдса. По определению, это означает, что

$$(\text{V.2.7}) \qquad \mu(du_0) \text{ сосредоточена на } K_\rho(\mathscr{H}^1),$$

где ρ — радиус сходимости ряда (V.2.5) по u_0, определяющего $S(t)u_0$.

Пространственным статистическим решением задачи (V.2.6) *в случае малых чисел Рейнольдса* называется семейство мер $\mu(t, \omega)$, определяемое соотношением

$$(\text{V.2.8}) \qquad \mu(t, \omega) = \mu(S(t)^{-1}\omega) \quad \forall \omega \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}^0),$$

где

$$S(t)^{-1}\omega = \{u \in K_\rho(\mathscr{H}^1): \quad S(t)\,u \in \omega\}$$

— полный прообраз множества ω. Легко убедиться, что такое семейство мер $\mu(t, \omega)$ удовлетворяет уравнению Хопфа (III.1.4), т. е. является пространственным статистическим решением задачи (V.2.6) и в смысле определения 1.1 главы III.

Из следствия 2.1 вытекает ввиду (V.2.7) и (V.2.8), что при любом $t \geqslant 0$ мера $\mu(t, \omega)$ сосредоточена в шаре $K_{c\rho_1}(\mathscr{H}^1)$ и поэтому имеет все моменты $M_k(t, \bar{x}^k)$. Как показано в п. 3 § 1, моменты $M_k(t, \bar{x}^k)$ удовлетворяют цепочке моментных уравнений (V.1.16) и начальным условиям (V.1.17), где $\mathfrak{M}_k(\bar{x}^k)$ — моменты меры $\mu(du_0)$. В данном случае, когда $f(t, x) \equiv 0$ (и $g(t, x) \equiv 0$), задача Коши (V.1.16) — (V.1.17) принимает следующий вид:

$$\text{(V.2.9)} \qquad \frac{\partial M_k(t, \overline{x}^k)}{\partial t} - \nu\Delta_k M_k(t, \overline{x}^k) = B_k M_{k+1}(t, \overline{x}^k),$$

$$M_k(0, \overline{x}^k) = \mathfrak{M}_k(\overline{x}^k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что в случае малых чисел Рейнольдса моменты $M_k(t, \overline{x}^k)$ обладают большей гладкостью, чем в общем случае. В частности, можно показать, что в случае малых чисел Рейнольдса

$$M_k(t, \overline{x}^k) \in C_b(0, \infty; (\mathscr{H}^1)^{\otimes k}) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

где $(\mathscr{H}^1)^{\otimes k} = \mathscr{H}^1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}^1$ (k раз) — тензорная степень пространства $\mathscr{H}^1$.

3. Разложение моментов статистического решения в ряды по моментам начальной меры. Используем ряд (V.2.5) для разложения моментов $M_k(t, \overline{x}^k)$ в ряд по $\mathfrak{M}_m(\overline{x}^m)$. Сначала разберем частный случай, когда начальная мера $\mu(\omega) \equiv \delta(u_0, \omega)$ сосредоточена в точке $u_0 \in K_\rho(\mathscr{H}^1)$, т. е.

$$\text{(V.2.10)} \qquad \mu(\omega) = 1 \text{ при } u_0 \in \omega \text{ и } \mu(\omega) = 0, \text{ если } u_0 \notin \omega.$$

Тогда $\mu(t, \omega) = \delta(S(t)u_0, \omega)$ в силу (V.2.8); поэтому моменты $M_k(t, \overline{x}^k)$ этого статистического решения имеют вид

$$\text{(V.2.10}'\text{)} \qquad M_k(t, \overline{x}^k) = \int w^{\otimes k}(\overline{x}^k)\,\delta(S(t)u_0, dw) = $$
$$= (S(t)u_0)^{\otimes k}(\overline{x}^k), \quad \mathfrak{M}_k(\overline{x}^k) = u_0^{\otimes k}.$$

Подставляя эти выражения в (V.2.9), получим

$$\text{(V.2.11)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}((S(t)u_0)^{\otimes k})(\overline{x}^k) - \Delta_k((S(t)u_0)^{\otimes k})(\overline{x}^k) = \\ \qquad\qquad = B_k((S(t)u_0)^{\otimes(k+1)})(\overline{x}^k), \\ (S(t)u_0)^{\otimes k}(\overline{x}^k)|_{t=0} = u_0^{\otimes k}(\overline{x}^k). \end{cases}$$

Обозначим через G_k оператор, сопоставляющий начальному значению $w(\overline{x}^k)$ решение задачи

$$\frac{\partial v(t, \overline{x}^k)}{\partial t} - \nu\Delta_k v(t, \overline{x}^k) = 0,$$

$$v|_{t=0} = w(\overline{x}^k), \quad v|_{\partial\Omega^k} = 0: \ G_k(w(\overline{x}^k)) = v,$$

а через $\hat{G}_k$ — оператор, сопоставляющий функции $f(t, \overline{x}^k)$ решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta_k v = f, \ v|_{t=0} = 0, \ v|_{\partial\Omega^k} = 0: \ \hat{G}_k(f) = v.$$

Положим $R_k = \hat{G}_k \circ B_k$. Обращая в (V.2.11) оператор $\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_k$, получим

$$\text{(V.2.12)} \qquad [(S(t)u_0)^{\otimes k}] = [G_k(u_0^{\otimes k})](t) + [R_k(Su_0)^{\otimes(k+1)}](t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Подставляя в k-е соотношение (V.2.12) $(k+1)$-е, затем в полученное соотношение — $(k+2)$-е и так далее, получим

$$\text{(V.2.13)} \qquad (S(t)u_0)^{\otimes k} = \sum_{m=k}^{N} [\Phi_{k,m}(u_0^{\otimes m})](t) +$$
$$+ [R_k \circ R_{k+1} \ldots \circ R_N((Su_0)^{\otimes(N+1)})](t),$$

где

(V.2.13′) $\Phi_{k,k} = G_k$ и $\Phi_{k,m} = R_k \circ R_{k+1} \circ \ldots \circ R_{m-1} \circ G_m$ при $m > k$.

С другой стороны, взяв тензорную степень от обеих частей разложения (V.2.5), выводим после простых преобразований

$$(S(t)u_0)^{\otimes k} = \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{m_1+\ldots+m_k=m} \bigotimes_{j=1}^{k} S_{m_j}(t, u_0), \tag{V.2.14}$$

причем для $u_0 \in K_\rho(\mathscr{H}^1)$ этот ряд сходится абсолютно в $(\mathscr{H}^1)^{\otimes k}$.

Лемма 2.1. *Для любого* $u_0 \in K_\rho(\mathscr{H}^1)$

$$(S(t)u_0)^{\otimes k} = \sum_{m=k}^{\infty} \Phi_{k,m}(u_0^{\otimes m})(t), \tag{V.2.15}$$

где $\Phi_{k,m}$ — *операторы* (V.2.13′). *Ряд* (V.2.15) *сходится абсолютно в* $C_b(0, \infty; (\mathscr{H}^1)^{\otimes k})$.

Для доказательства прежде всего выводятся следующие оценки остаточных членов рядов (V.2.13) и (V.2.14):

$$\sup_{t \geq 0} \| R_k \circ R_{k+1} \circ \ldots \circ R_N((Su_0)^{\otimes(N+1)}) \|_{(\mathscr{H}^1)^{\otimes k}} \leqslant C_N \| u_0 \|_1^{N+1}, \tag{V.2.16}$$

$$\sup_{t \geq 0} \Big\| \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{m_1+\ldots+m_k=m} \bigotimes_{j=1}^{k} S_{m_j}(t, u_0) \Big\|_{(\mathscr{H}^1)^{\otimes k}} \leqslant C_N \| u_0 \|_1^{N+1}, \tag{V.2.17}$$

где $u_0 \in K_\rho(\mathscr{H}^1)$, а $C_N < \infty$ не зависит от u_0. Оценка (V.2.17) является следствием абсолютной сходимости ряда (V.2.14) в шаре $K_\rho(\mathscr{H}^1)$, а (V.2.16) выводится из оценок норм операторов G_k, $\hat{G}_k$, R_k в соответствующих пространствах. Далее, в силу (V.2.16) — (V.2.17) можно приравнять члены одинакового порядка однородности m в правых частях (V.2.13) и (V.2.14), т. е.

$$\Phi_{k,m}(u_0^{\otimes m})(t) = \sum_{m_1+\ldots+m_k=m} \bigotimes_{j=1}^{k} S_{m_j}(t, u_0)$$

для $m \geqslant k$; поэтому из (V.2.14) следует (V.2.15) и из абсолютной сходимости ряда (V.2.14) вытекает абсолютная сходимость ряда (V.2.15). ■

Рассмотрим теперь произвольную меру $\mu(du_0)$, соответствующую случаю малых чисел Рейнольдса.

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathfrak{M}_k(\bar{x}^k)$ — *моменты вероятностной меры* $\mu(du_0)$, *удовлетворяющей условию* (V.2.7), *а* $M_k(t, \bar{x}^k)$ — *моменты статистического решения* (V.2.8). *Тогда*

$$M_k(t, \bar{x}^k) = \sum_{m=k}^{\infty} [\Phi_{k,m}(\mathfrak{M}_m)](t, \bar{x}^k), \tag{V.2.18}$$

где $\Phi_{k,m}(\cdot)$ — *операторы* (V.2.13′). *Ряд* (V.2.18) *абсолютно сходится в пространстве* $C_b(0, \infty; (\mathscr{H}^1)^{\otimes k})$.

Действительно, умножая скалярно в $\mathscr{H}^{\otimes k}$ обе части соотношения (V.2.15) на $\varphi \in \mathscr{H}^{\otimes k}$ и интегрируя полученное равенство по $\mu(du_0)$, получим в силу (V.2.8)

$$\int \langle w^{\otimes k}, \varphi \rangle_k \, \mu(t, dw) = \int \langle (S(t)u_0)^{\otimes k}, \varphi \rangle \, \mu(du_0) = \sum_{m=k}^{\infty} \int \langle \Phi_{k,m}(u_0^{\otimes m})(t), \varphi \rangle_k \, \mu(du_0). \tag{V.2.19}$$

Пусть при любом $t > 0$ оператор

$$\Phi^*_{k,m}(t)\colon\ [(\mathcal{H}^1)^{\otimes k}]' \to [(\mathcal{H}^1)^{\otimes m}]'$$

—сопряженный к оператору

$$u_0^{\otimes m} \to \Phi_{k,m}(u_0^{\otimes m})(t),$$

где $[(\mathcal{H}^1)^{\otimes m}]'$ — пространство, сопряженное к $(\mathcal{H}^1)^{\otimes m}$ относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}^{\otimes m}$. Тогда вследствие (V.2.19) и (V.1.4)

$$\langle M_k(t,\ \cdot),\ \varphi_k\rangle = \sum_{m=k}^{\infty} \int \langle u_0^{\otimes m},\ \Phi^*_{k,m}(t)\,\varphi\rangle_m\, \mu(du_0) =$$

$$= \sum_{m=k}^{\infty} \langle \mathfrak{M}_m,\ \Phi^*_{k,m}(t)\,\varphi\rangle_m = \sum_{m=k}^{\infty} \langle \Phi_{k,m}(\mathfrak{M}_m)(t),\ \varphi\rangle_k. \quad \blacksquare$$

4. Проблема замыкания в случае малых чисел Рейнольдса. В приложениях часто бывает важно найти конечную систему уравнений, решение которой в определенном смысле аппроксимирует решение бесконечной цепочки уравнений (V.1.16) или аналогичной цепочки уравнений вида (V.2.9). Задача о построении такой конечной системы называется *проблемой замыкания цепочки уравнений* (V.1.16) или, соответственно, (V.2.9).

Покажем, что в случае малых чисел Рейнольдса, т. е. когда начальная мера $\mu(du_0)$ удовлетворяет условию (V.2.7), замыкание цепочки (V.2.9) можно осуществить с помощью приравнивания нулю всех моментов $M_k(t,\ \overline{x}^k)$ с $k > N$. Получающаяся при этом система уравнений конечна и имеет вид

$$\text{(V.2.20)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial M_k^N(t,\ \overline{x}^k)}{\partial t} - \nu\Delta_k M_k^N(t,\ \overline{x}^k) = (B_k M_{k+1}^N)(t,\ \overline{x}^k) \\ \hfill (k = 1,\ \ldots,\ N-1), \\ \dfrac{\partial M_N^N(t,\ \overline{x}^N)}{\partial t} - \nu\Delta_N M_N^N(t,\ \overline{x}^N) = 0. \end{cases}$$

Начальные условия сохраним те же, что в (V.2.9):

$$\text{(V.2.21)}\qquad M_k^N(t,\ \overline{x}^k)_{t=0} = \mathfrak{M}_k(\overline{x}^k) \qquad (k=1,\ \ldots,\ N).$$

Теорема 2.4. *Пусть*

$$\mathfrak{M}_k(\overline{x}^k) \in (\mathcal{H}^1)^{\otimes k} \qquad (k=1,\ \ldots,\ N).$$

Тогда задача (V.2.20) — (V.2.21) *имеет единственное решение*

$$\{M_k^N(t,\ \overline{x}^k) \in C_b(0,\ \infty;\ (\mathcal{H}^1)^{\otimes k}) \qquad (k=1,\ \ldots,\ N)\};$$

при этом функции $M_k^N(t,\ \overline{x}^k)$ *определяются формулой*

$$\text{(V.2.22)}\qquad M_k^N(t,\ \overline{x}^k) = \sum_{m=k}^{N} [\Phi_{k,m}(\mathfrak{M}_m)](t,\ \overline{x}^k) \qquad (k=1,\ \ldots,\ N),$$

где $\Phi_{k,m}$ *— операторы* (V.2.13′).

Действительно, используя рассуждения, с помощью которых было выведено соотношение (V.2.13), легко показать, что если решение задачи (V.2.20)—(V.2.21) существует, то оно определяется по формуле (V.2.22) и, следовательно, единственно. С другой стороны, непосредственной проверкой устанавливается, что функции (V.2.22) действительно удовлетворяют (V.2.20) — (V.2.21). ■

Покажем, что $M_k^N(t, \bar{x}^k)$ приближают решение задачи (V.2.9).

Теорема 2.5. *Пусть начальные условия* $\mathfrak{M}_k(\bar{x}^k)$ *из* (V.2.21) *при* $k = 1, \ldots, N$ *совпадают с начальными условиями из* (V.2.9) *и являются моментами меры* $\mu(du_0)$, *удовлетворяющей* (V.2.7). *Тогда для любого* k

$$\text{(V.2.23)} \qquad \lim_{N\to\infty} \| M_k - M_k^N \|_{C_b(0,\,\infty;\,(\mathscr{H}^1)^{\otimes k})} = 0 \quad (N \geqslant k),$$

где $\{M_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ — *решение задачи* (V.2.9), *а* M_k^N — *решение задачи* (V.2.20)—(V.2.21).

Доказательство. В силу (V.2.18) и (V.2.22)

$$M_k(t, \bar{x}^k) - M_k^N(t, \bar{x}^k) = \sum_{k=N+1}^{\infty} [\Phi_{k,m}(\mathfrak{M}_m)](t, \bar{x}^k),$$

поэтому (V.2.23) вытекает из сходимости ряда (V.2.18) в пространстве $C_b(0, \infty; (\mathscr{H}^1)^{\otimes k})$. ■

Отметим, что при больших числах Рейнольдса, т. е. в случае, когда не выполнено условие (V.2.7), метод замыкания цепочки (V.2.9), изложенный выше, вообще говоря, неприменим и приводит к расходящемуся процессу. Это легко показать на примере задачи (V.2.4) для уравнения Бюргерса.

Замечание 2.1. Пусть $\mu(du_0)$ в теореме 2.3 вместо условия (V.2.7) удовлетворяют более общему условию

$$\int \| u_0 \|_1^k \, \mu(du_0) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тогда ряды (V.2.18), вообще говоря, расходятся. Однако моменты статистического решения с начальной мерой $\mu^\varepsilon(\omega) = \mu(\varepsilon^{-1}\omega)$, где $\check{\varepsilon} u(x) = u(\varepsilon x)$, $\varepsilon > 0$, раздалагаются в асимптотические ряды по ε (ε мало́), аналогичные (V.2.18) (см. [17], где разобран случай двумерной системы Навье — Стокса).

5. Асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ коэффициентов Фурье решений двумерной системы Навье — Стокса и соответствующих моментных функций. Рассматривается двумерная система Навье — Стокса вида (II.1.1) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с $f \equiv 0$ и периодическими граничными условиями

$$u(t, x^1 + 2\pi, x^2) \equiv u(t, x^1, x^2) = u(t, x^1, x^2 + 2\pi).$$

Разложим решение $u(t, x)$ этой задачи в ряд Фурье

$$u(t, x) = \sum_{\xi} \hat{u}(t, \xi) e^{ix\xi},$$

где $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ пробегает решетку $\mathbb{Z}^2$. Для простоты изложения предположим, что начальное значение $u_0(x) = u(0, x)$ является тригонометрическим полиномом, т. е. его коэффициенты Фурье $\hat{u}_0(\xi)$ равны нулю при $|\xi| > N$, где $N < \infty$, и, кроме того, $\hat{u}_0(0) = 0$. Пусть еще $\| u_0 \| < \delta$, где $\| u_0 \| = \sum_{\xi} | \hat{u}_0(\xi) |$ и δ — достаточно малое число. Справедлива

Теорема 2.6. *Функция* $\hat{u}(t, \xi)$ *при заданном* $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{Z}^2$ *допускает следующее асимптотическое разложение по* t *при* $t \to +\infty$:

$$\text{(V.2.24)} \qquad \hat{u}(t, \xi) = Q(\xi, \hat{u}_0) e^{-\nu d(\xi) t} + \psi(t, \xi, \hat{u}_0),$$
$$d(\xi) = |\xi^1| + |\xi^2|,$$

причем $|\psi(t, \xi, \hat{u}_0)| e^{\nu d(\xi) t} \to 0$ *при* $t \to \infty$. *Если у вектора* ξ *обе координаты отличны от нуля, то*

$$Q(\xi, \hat{u}_0) = (Q^1(\xi, \hat{u}_0), Q^2(\xi, \hat{u}_0)) \not\equiv 0,$$

где $Q^j(\xi, \cdot)$ $(j = 1, 2)$ — *аналитическая функция от комплексных переменных* $\hat{u}_0(\eta)$, $|\eta| < N$.

В многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{2p}$, где p равно числу точек $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in \mathbb{Z}^2$ с $|\eta| \leqslant N$, $\eta \neq 0$, рассмотрим область

$$D = \{\hat{u}(\xi): \|u\| < \delta\}.$$

Функция $Q(\xi, \hat{u}_0)$ из (V.2.24) задана при $\hat{u}_0 \in D$. Пусть ξ фиксировано. Обозначим через N_ξ множество нулей функции $Q(\xi, \cdot)$ в D. В силу аналитичности Q^j $(j = 1, 2)$ по $\hat{u}_0$ комплексная размерность множества N_ξ по крайней мере на единицу меньше размерности множества D, поскольку $Q(\xi, \hat{u}_0) \not\equiv 0$. На множестве $\hat{u}_0 \in D \diagdown N_\xi$ имеем $Q(\xi, \hat{u}_0) \neq 0$, поэтому на этом множестве асимптотика (V.2.24) является точной (т. е. первое слагаемое $\neq 0$).

Отметим, что асимптотика (V.2.24) в случае уравнения Бюргерса (V.2.4) впервые была получена Розенблаттом [47]. При этом Розенблатт использовал известную явную формулу для решения задачи (V.2.4). Для более общих уравнений аналогичная асимптотика была построена в [16] без использования явных формул, с помощью первых интегралов (см. [14], [15]). Для двумерной системы Навье — Стокса асимптотика (V.2.24) была установлена Л. А. Белоусовым [2].

Из асимптотики (V.2.24) легко выводится асимптотика при $t \to +\infty$ коэффициентов Фурье моментов статистического решения в случае малых чисел Рейнольдса. Поясним это на примере вторых моментов. Пусть $\mu(du_0)$ — вероятностная мера, сосредоточенная на (конечномерном) многообразии начальных условий $u_0 \in \mathscr{H}$ с коэффициентами Фурье $\hat{u}_0(\xi) = 0$ при $|\xi| > N$ и $\xi = 0$,

$$\|u_0\| = \sum_\xi |\hat{u}_0(\xi)| < \delta.$$

Рассмотрим статистическое решение $\mu(t, dw)$, определенное формулой (V.2.8) по мере $\mu(du_0)$. Очевидно, второй момент $M_2(t, x_1, x_2)$ решения $\mu(t, dw)$ периодичен с периодом 2π по всем координатам x_j^i при $i = 1, 2$ и $j = 1, 2$. Пусть $\hat{M}_2(t, \xi, \eta)$ — коэффициенты Фурье момента $M_2(t, x_1, x_2)$. Тогда

$$\hat{M}_2(t, \xi, \eta) = \int \hat{u}(\xi) \otimes \hat{u}(\eta)\, \mu(t, du).$$

Поэтому из (V.2.24) вытекает, что

$$\hat{M}_2(t, \xi, \eta) = S(\xi, \eta)\, e^{-\nu(d(\xi)+d(\eta))t} + R(t, \xi, \eta),$$

причем

$$|R(t, \xi, \eta)|\, e^{\nu(d(\xi)+d(\eta))t} \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

а

$$S(\xi, \eta) = \int Q(\xi, u_0) \otimes Q(\eta, u_0)\, \mu(du_0).$$

ГЛАВА VI
ТРАНСЛЯЦИОННО-ОДНОРОДНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

В этой главе рассматривается система Навье — Стокса

$$\text{(VI.0.1)} \qquad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + (u, \nabla) u = -\nabla p(t, x) + \nu \Delta u + f(t) + \frac{\partial w(t, x)}{\partial t},$$

$$t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \ (\nabla, u) = 0,$$

при начальном условии

$$\text{(VI.0.2)} \qquad \gamma_0 u(x) = u_0(x).$$

Предполагается, что $u_0(x) \in \mathscr{H}$ и $w(t, x) \in \mathscr{C} \equiv C(0, T; H)$ — однородные по x независимые случайные функции, а $f(t) \in [L_2(0, T)]^n$. Здесь

$$H = [L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)]^n, \quad \mathscr{H} = \{u(x) \in H: \operatorname{div} u(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}^n\}^{1)}.$$

§ 1. Однородные меры. Средняя плотность энергии. Примеры

1. Однородные меры. В пространстве $D' \equiv [D'(\mathbb{R}^n)]^n$ определим оператор $\hat{h}$ по формуле $\hat{h}u(x) = u(x + h)$, где $h \in \mathbb{R}^n$. Пусть X — линейное топологическое подпространство в D', причем $\hat{h}$ отображает непрерывно X в себя при любом $h \in \mathbb{R}^n$.

Определение. Мера $\mu(\omega)$, заданная на $\mathfrak{B}(X)$, называется (*трансляционно*) *однородной*, если

$$\text{(VI. 1.1)} \qquad \hat{h}^*\mu(\omega) = \mu(\omega) \quad \forall \omega \in \mathfrak{B}(X), \ \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

где $\hat{h}^*\mu(\omega) \equiv \mu(\hat{h}^{-1}\omega)$

Однородность меры μ эквивалентна тождеству

$$\text{(VI. 1.2)} \quad \int f(u)\, \mu(du) = \int f(\hat{h}u)\, \mu(du) \quad \forall f \in C_b(X), \ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ — непрерывная функция от $v_j \in \mathbb{R}^n$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и

$$\Phi(u, x) = \varphi\left(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial u(x)}{\partial x^n}\right).$$

Теорема 1.1. *Пусть $\mu(\omega)$ — однородная борелевская мера на X, причем*

$$\Phi(u, \cdot) \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

для любого $u(x) \in U$, где $U \in \mathfrak{B}(X)$ и $\mu(U) = 1$. Пусть функционалы

$$u \to \int \Phi(u, x)\, w(x)\, dx \ \text{ и } \ u \to \int |\Phi(u, x)|\, w(x)\, dx$$

μ-интегрируемы $\forall w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует такая константа $J \in \mathbb{R}$, что

$$\text{(VI. 1.3)} \quad \int \left(\int \Phi(u, x)\, w(x)\, dx\right) \mu(du) = J \int w(x)\, dx \quad \forall w \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Положим

$$\mathscr{F}(w) = \int \left(\int \Phi(u, x)\, w(x)\, dx\right) \mu(du) \quad \forall w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

В силу условий теоремы 1.1 и теоремы Лебега функционал $\mathscr{F}(\cdot)$ непрерывен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Вследствие однородности меры μ и тождества (VI.1.2)

$$\mathscr{F}(\hat{h}w) = \mathscr{F}(w) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \ \text{ и поэтому } \ \mathscr{F}(w) = J \int w(x)\, dx,$$

где $J \in \mathbb{R}$, т. е. (VI.1.3) доказано при любом $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Предельным переходом (VI.1.3) устанавливается и для любого $w \in L_1(\mathbb{R}^n)$. ■

---

1) Чтобы подчеркнуть аналогию с первыми главами, в этой главе мы используем те же обозначения (H и так далее), что и в предыдущих главах, хотя они сейчас обозначают другие пространства.

Положим, по определению,

$$J=\int \Phi(u,\ x)\,\mu(du). \tag{VI.1.3'}$$

Тогда теорему 1.1, очевидно, можно рассматривать как аналог теоремы Фубини.

Предположим, что для однородной меры $\mu(du_0)$ и функционала $\Phi(u_0,\ x)=$ $=|\,u_0(x)\,|^2$ выполнены условия теоремы 1.1. Тогда

$$\bar e_0\equiv\int |u_0(x)|^2\,\mu(du_0)<+\infty. \tag{VI. 1.4}$$

Величина $\bar e_0$ называется *средней плотностью энергии меры* μ.

Пусть

$$H(r)=\{u(x)\in[L_2^{\rm loc}(\mathbb{R}^n)]^n\colon\ \|u\|_{(r)}<+\infty\},$$

где

$$\|u\|_{(r)}=\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^r|u(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Положим

$$\mathscr{H}(r)=\{u(x)\in H(r)\colon\ \operatorname{div}u(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^n\}.$$

Если однородная мера $\mu(du_0)$ удовлетворяет условию (VI.1.4), то, взяв в (VI.1.3) $w(x)=(1+|\,x\,|^2)^r$, где $r<-n/2$, получим

$$\int\|u_0\|^2_{(r)}\,\mu(du_0)=\bar e_0\int(1+|x|^2)^r\,dx<+\infty. \tag{VI. 1.5}$$

Следовательно, мера $\mu(du_0)$ сосредоточена на $H(r)$: $\mu(H(r))=1$. В дальнейшем в качестве распределения начальных данных $u_0(x)$ задачи (VI.0.1), (VI.0.2) берутся однородные меры $\mu(du_0)$, удовлетворяющие условию (VI.1.4) и, следовательно, сосредоточенные на $\mathscr{H}(r)$.

Замечание 1.1. Легко показать [20], что при любом $p\geqslant1$ не существует вероятностной однородной меры μ, заданной на $\mathfrak{B}([L_p(\mathbb{R}^n)]^n)$, для которой

$$\mu([L_p(\mathbb{R}^n)]^n\setminus\{0\})>0,$$

поэтому для однородных мер

$$\mu([L_p(\mathbb{R}^n)]^n\setminus\{0\})=0.$$

2. Примеры однородных мер. Пример 1. Пусть фиксированы $\xi_k\in$ $\in\mathbb{R}^n$ при $k=1,\ \ldots,\ N$. Положим

$$(u_0(x)=v(x)+\bar v(x), \tag{VI. 1.6}$$

где

$$v(x)=\sum_{k=1}^N a_k e^{i\xi_k\cdot x},\quad a_k\in\mathbb{C}^n,\quad \xi_k\cdot x=\sum_{j=1}^n \xi_k^j x^j;$$

$$S_k=\{a_k\in\mathbb{C}^n\colon\ |a_k|=r_k\},\quad \Pi_k=\{a_k\in\mathbb{C}^n\colon\ a_k\cdot\xi_k=0\}.$$

Если в (VI.1.6) $a_k\in\Pi_k$ $\forall k=1,\ \ldots,\ N$, то $\operatorname{div}u_0(x)=0$. Пусть

$$\sigma_k=S_k\cap\Pi_k,\ \sigma=\sigma_1\times\ldots\times\sigma_N,$$

$m(\tilde\omega)$ — нормированная лебегова мера на σ и

$$\mu(\omega)\equiv m(A^{-1}\omega)\quad\forall\omega\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}(r)),$$

где $A\colon a\to u_0(x)$ — отображение (VI.1.6), сопоставляющее коэффициентам $a=(a_1,\ \ldots,\ a_N)$ функцию $u_0(x)$. Мера $\mu(\omega)$ трансляционно однородна.

Действительно, отображению сдвига $hu(x) = u(x + h)$ отвечает умножение a_k на $\exp(i\xi_k \cdot h)$ $\forall k = 1, \ldots, N$, а такое преобразование σ в себя не изменяет m-меры множеств $\tilde{\omega} \in \mathfrak{B}(\sigma)$. Мера μ, очевидно, имеет конечную плотность энергии (VI.1.4).

Пример 2. Гауссова мера с непрерывной корреляционной функцией $Q(x, y) = Q(x - y)$ (см. п. 2 § 3).

§ 2. Функциональные пространства

1. Соболевские пространства функций в $\mathbb{R}^n$. Для $\varphi \in D \equiv [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^n$ и $s \in \mathbb{R}$ положим

$$\|\varphi\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2s} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi, \text{ где } \tilde{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)\, dx.$$

Пусть $K_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$ — шар в $\mathbb{R}^n$, $D_R = [C_0^\infty(K_R)]^n$, D_R' — двойственное к D_R пространство, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ — соотношение двойственности между D_R' и D_R, порожденное скалярным произведением в $[L_2(K_R)]^n$. Пусть

$$\text{(VI. 2.1)} \qquad \|u\|_{s, R} = \sup_{\varphi \in D_R,\, \varphi \neq 0} \frac{|\langle u, \varphi \rangle_R|}{\|\varphi\|_{-s}},$$

$$H_R^s = \{u(x) \in D_R'\colon \|u\|_{s, R} < +\infty\}.$$

(Предполагается, что функции из D_R продолжены нулем вне K_R, так что $D_R \subset D$.)

Определение 2.1. Пространство $H^s \equiv [H_{loc}^s(\mathbb{R}^n)]^n$, где $s \in \mathbb{R}^n$, — это множество обобщенных функций $u(x) \in D' \equiv [D'(\mathbb{R}^n)]^n$, для которых конечны полунормы $\| u|_{K_R} \|_{s, R}$ $\forall R = 1, 2, \ldots$, где $u|_{K_R}$ — сужéние функции $u(x) \in D'$ на шар K_R.

Очевидно, H^s — пространство Фреше.

Положим

$$\mathscr{H}^s = \{u(x) \in H^s\colon \operatorname{div} u(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathscr{H}_R^s = \{u \in H_R^s\colon \operatorname{div} u(x) = 0,\ x \in K_R\}; \quad \mathscr{H} \equiv \mathscr{H}^0 \text{ и } H \equiv H^0.$$

Определение 2.2. Пространство $\mathscr{L}_2^s$, где $s \in \mathbb{R}$, — это множество слабо измеримых по Борелю функций $t \to u(t, \cdot) \in \mathscr{H}^s$, определенных на $[0, T]$, для которых конечны полунормы

$$\|u\|_{\mathscr{L}_2^s, R}^2 = \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{s, R}^2 dt < +\infty \quad \forall R \in \mathbb{N}.$$

Аналогично определяется пространство $\mathscr{L}_\infty^s$ с полунормами

$$\|u\|_{\mathscr{L}_\infty^s, R} \equiv \sup_{[0, T]} \operatorname{ess} \|u(t)\|_{s, R} \equiv \inf_{Z \in \{Z\}} \sup_{t \in [0, T] \setminus Z} \|u(t)\|_{s, R},$$

где $\{Z\}$ — множество всех подмножеств $Z \subset [0, T]$ лебеговой меры нуль.

Всюду ниже в данной главе, если не оговорено противное, через s обозначается произвольное фиксированное число $s > s_n \equiv \max\left(\frac{n}{2} + 3, n + 1\right)$.

2. Функции локально ограниченной вариации степени q. Для функций $t \to u(t, \cdot) \in \mathscr{H}^{-s}$, $t \in [0, T]$ положим

$$\text{(VI. 2.2)} \qquad \operatorname{osc}_{[t, \tau]}{}_R^{-s} u = \sup_{(t_1, t_2) \in [t, \tau] \times [t, \tau]} \operatorname{ess} \|u(t_1, \cdot) - u(t_2, \cdot)\|_{-s, R}.$$

Определим для $q\geqslant 1$

$$\text{(VI. 2.3)}\qquad \operatorname{Var}_{q,R}^{-s} u=\Big(\sup_{N>0}\ \sup_{\{t_j\}\in d^{(N)}}\sum_{j=1}^{N}|\operatorname*{osc}_{[t_{j-1},\,t_j]}{}_R^{-s}\,u|^q\Big)^{1/q},$$

где $d^{(N)}$ — множество всех разбиений $\{t_j\}$ отрезка $[0,\ T]$ вида $0=t_0<t_1<\ldots$ $\ldots<t_N=T$. Положим

$$BV_q(0,\ T;\ \mathscr{H}_R^{-s})=\{u(t,\ \cdot)\in L_\infty(0,\ T;\ \mathscr{H}_R^{-s}):\ \|u\|_{BV_q^{-s},\,R}<+\infty\},$$

где

$$\text{(VI. 2.4)}\qquad \|u\|_{BV_q^{-s},\,R}\equiv \operatorname{Var}_{q,R}^{-s}u+\operatorname*{sup\,ess}_{[0,\,T]}\|u(t,\ \cdot)\|_{-s,\,R},\qquad 1\leqslant q<+\infty.$$

Определение 2.3. Пространство $BV_q^{-s}\equiv BV_q(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s})$, где $q\geqslant 1$,— это множество функций $t\to u(t,\ \cdot)\in\mathscr{H}^{-s}$, $t\in[0,\ T]$, для которых при любом $R=1,\ 2,\ \ldots$ конечны полунормы (VI.2.4).

Очевидно, BV_q^{-s} — несепарабельное пространство Фреше.

Лемма 2.1. *Каждая функция $u(t,\ \cdot)\in BV_q(0,\ T;\ \mathscr{H}^{-s})$ после исправления на некотором множестве $Z(u)\subset[0,\ T]$ лебеговой меры нуль непрерывно отображает $[0,\ T]$ в $\mathscr{H}^{-s}$ при всех $t\in[0,\ T]$, кроме, быть может, счетного множества $t=t_j(u)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ точек разрыва первого рода.*

В силу леммы 2.1 для $u\in BV_q^{-s}$ определен оператор

$$\text{(VI. 2.5)}\qquad \gamma_t u\equiv u(t+0)\equiv \operatorname*{lim\,ess}_{\tau\to t+0}u(\tau)\equiv\lim_{\substack{\tau\to t+0\\ \tau\notin Z(u)}}u(\tau)\in\mathscr{H}^{-s}\qquad \forall t\in[0,\ T).$$

Определение 2.4. $U\equiv\mathscr{L}_2^1\cap BV_q^{-s}$ — это пространство Фреше с полунормами

$$\|u\|_{U,\,R}=\|u\|_{\mathscr{L}_2^1,\,R}+\|u\|_{BV_q^{-s},\,R}<+\infty\qquad\forall R\in\mathbb{N}.$$

В пространстве U будем искать решение u задачи (VI.0.1), (VI.0.2). Очевидно, $U\subset\mathscr{L}_2$, где $\mathscr{L}_2\equiv\mathscr{L}_2^0$. Продолжим функционал $u\to\|u\|_{U,\,R}$ с U на $\mathscr{L}_2$, положив $\|u\|_{U,\,R}=+\infty$ для $u\in\mathscr{L}_2\setminus\widetilde{U}_R$, где

$$\widetilde{U}_R=\{u\in\mathscr{L}_2:\ u(t,\ x)|_{|x|<R}\in L_2(0,\ T;\ \mathscr{H}_R^1)\cap BV_q(0,\ T;\ \mathscr{H}_R^{-s})\}.$$

Очевидно, $U=\bigcap_{R\in\mathbb{N}}\widetilde{U}_R$. Отметим, что функционалы (VI.2.2), (VI.2.4) определены для любого $u\in\mathscr{L}_2$ и могут принимать значение $+\infty$.

Лемма 2.2. а) *Функционалы $\|u\|_{U,\,R}$, $\|u\|_{BV_q^{-s},\,R}$ и $\operatorname*{osc}_{[t,\,\tau]}{}_R^{-s}$ и измеримы по Борелю на $\mathscr{L}_2$:* б) $U\in\mathfrak{B}(\mathscr{L}_2)$.

Доказательство. Аппроксимируем перечисленные в п. а) функционалы непрерывными на $\mathscr{L}_2$. А именно, положим при $\varepsilon>0$

$$\text{(VI. 2.6)}\qquad \operatorname*{osc}_{[t,\,\tau]}{}_{R,\,\varepsilon}^{-s}u=\begin{cases}\operatorname*{osc}_{[t,\,\tau-\varepsilon]}{}_R^{-s}J_\varepsilon u, & \text{если}\quad t<\tau-\varepsilon,\\ 0, & \text{если}\quad t\geqslant\tau-\varepsilon,\end{cases}$$

$$J_\varepsilon u(t)\equiv\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon u(t+\tau)\,d\tau.$$

Для любого $\varepsilon>0$ определим

$$\text{(VI. 2.6')}\qquad \operatorname{Var}_{q,\,R,\,\varepsilon}^{-s}u=\Big(\sup_{N>0}\ \sup_{\{t_j\}\in d^{(N)}}\sum_{j=1}^{N}|\operatorname*{osc}_{[t_{j-1},\,t_j]}{}^{-s}_{R,\,\varepsilon}\,u|^q\Big)^{1/q},$$

$$\text{(VI. 2.7)}\qquad \|u\|_{BV_{q,\,R,\,\varepsilon}^{-s}}=\operatorname{Var}_{q,\,R,\,\varepsilon}^{-s}u+\operatorname*{sup\,ess}_{[0,\,T-\varepsilon]}\|J_\varepsilon u(t)\|_{-s,\,R}.$$

Из (VI.2.6) следует, что в сумме по j, входящей в (VI.2.6′), число отличных от нуля слагаемых не превосходит T/ε. Поэтому для $u \in \mathscr{L}_2$, очевидно, $\|u\|_{BV_q^{-s}, R, \varepsilon} \leqslant C_\varepsilon \|u\|_{\mathscr{L}_2, R}$ $\forall \varepsilon > 0$. Следовательно, $\|\cdot\|_{BV_q^{-s}, R, \varepsilon}$ — непрерывная полунорма на $\mathscr{L}_2$.

Теперь построим аппроксимации для $\|u\|_{\mathscr{L}^1_2, R}$. Для этого заметим, что в $\mathscr{H}^1_R$ существует базис $e_j(x)$, $j \in \mathbb{N}$, ортогональный в $\mathscr{H}^1_R$ и в $\mathscr{H}^0_R$ [40]. Обозначим через Π_N ортогональный проектор в $\mathscr{H}^0_R$ на линейную оболочку $e_1(x), \ldots, e_N(x)$ и положим

$$\|u\|_{\mathscr{L}^1_2, R, \varepsilon} = \|\Pi_{[1/\varepsilon]} u\|_{\mathscr{L}^1_2, R}.$$

Наконец, определим

$$\|u\|_{U, R, \varepsilon} = \|u\|_{BV_q^{-s}, R, \varepsilon} + \|u\|_{\mathscr{L}^1_2, R, \varepsilon}.$$

Проверяется, что при $\varepsilon > 0$

$$\text{(VI. 2.8)} \qquad \|\cdot\|_{U, R, \varepsilon} \in C(\mathscr{L}_2), \ \|u\|_{U, R, \varepsilon} \leqslant \|u\|_{U, R} \quad \forall u \in \mathscr{L}_2,$$
$$\|u\|_{U, R, \varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} \|u\|_{U, R} \quad \forall u \in \mathscr{L}_2$$

и что аналогичными свойствами обладают аппроксимации $\|u\|_{BV_q^{-s}, R, \varepsilon}$ и $\operatorname{osc}^{-s}_{[t,\tau]R, \varepsilon} u$. Отсюда вытекает утверждение а) леммы, а из а) следует б). ■

Введем в U топологию, индуцированную вложением $U \subset \mathscr{L}_2$. Тогда

$$\mathfrak{B}(U) = U \cap \mathfrak{B}(\mathscr{L}_2) \subset \mathfrak{B}(\mathscr{L}_2),$$

поскольку $U \subset \mathfrak{B}(\mathscr{L}_2)$ согласно лемме 2.2.

Лемма 2.3. *Оператор γ_t: $U \to \mathscr{H}^{-s}$ при любом $t \in [0, T)$ измерим по Борелю.*

Доказательство. Из леммы 2.1 вытекает, что для любого $u \in U$

$$\text{(VI. 2.9)} \qquad \gamma^\varepsilon_t u \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} \gamma_t u \ \text{в} \ \mathscr{H}^{-s},$$

где $\gamma^\varepsilon_t u \equiv \gamma_t J_\varepsilon u = J_\varepsilon u(t)$ (см. (VI.2.6)). Поэтому γ_t — измеримый по Борелю оператор, как поточечный предел непрерывных отображений γ^ε_t из U в $\mathscr{H}^{-s}$. ■

§ 3. Однородные статистические решения системы Навье — Стокса

1. Операторная форма задачи (VI.0.1), (VI.0.2). Для $u \in \mathscr{L}_2$ через $\mathscr{A}u$ обозначим обобщенную функцию на $(0, T) \times \mathbb{R}^n$:

$$\text{(VI. 3.1)} \quad \mathscr{A}u(t, x) \equiv \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \nu \Delta u(t, x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial (u^j u)}{\partial x^j} - f(t).$$

Так как

$$\operatorname{div} u(x) \equiv \sum \frac{\partial u^j(x)}{\partial x^j} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

для $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^n(x)) \in \mathscr{H}^1$, то

$$(u, \nabla) u \equiv \sum u^j \frac{\partial u}{\partial x^j} = \sum \frac{\partial (u^j u)}{\partial x^j}$$

и система (VI. 0.1) для $u \in U$ записывается в виде

$$\text{(VI. 3.2)} \qquad \mathscr{A}u = -\nabla p + \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Пусть

$$\theta > \frac{n+1}{2} + 2, \quad \theta' \equiv \theta - \frac{1}{2}, \quad V^* \equiv [H_{\mathrm{loc}}^{-\theta'}(\mathbb{R}^n)]^n, \quad V \equiv (V^*)' = \bigcup_{R=1}^{\infty} [\mathring{H}^{\theta'}(K_R)]^n$$

— пространство, двойственное к V^*;

$$\mathscr{V}^* \equiv H_{\mathrm{loc}}^{-\theta}((0,\ T) \times \mathbb{R}^n),$$

$$\mathscr{V} \equiv (\mathscr{V}^*)' = \bigcup_{R=1}^{\infty} [\mathring{H}^{\theta}((0,\ T) \times K_R)]^n, \quad R \in \mathbb{N}$$

Через $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ и $\{\cdot,\ \cdot\}$ обозначим двойственность между V^*, V и $\mathscr{V}^*$, $\mathscr{V}$, соответственно, порожденную соответственно скалярными произведениями в $[L_2(\mathbb{R}^n)]^n$ и в $[L_2([0,\ T] \times \mathbb{R}^n)]^n$. Справедливо

Предложение 3.1. *Если $u \in \mathscr{L}_2$, то $\mathscr{A}u \in \mathscr{V}^*$, причем отображение $\mathscr{A}$: $\mathscr{L}_2 \to \mathscr{V}^*$ непрерывно* ([6]).

В силу предложения 3.1 $\mathscr{A}u \in \mathscr{V}^*$, если $u \in U$, а $\frac{\partial w}{\partial t} \in \mathscr{V}^*$, так как $w \in \mathscr{C}$, поэтому вследствие (VI.3.2) $\nabla p \in \mathscr{V}^*$. Чтобы исключить давление p из (VI.3.2), введем пространство градиентов

$$\mathscr{G} \equiv \Big\{ h \in \mathscr{V}^*:\ \exists p(t,\ x) \in D'((0,\ T) \times \mathbb{R}^n), \quad h = \nabla p, \quad \text{т. е. } h^j(t,\ x) = \frac{\partial p(t,\ x)}{\partial x^j} \quad \forall j = 1,\ \ldots,\ n \Big\}.$$

Положим $\overline{\mathscr{V}^*} = \mathscr{V}^*/\mathscr{G}$ и через gf обозначим класс смежности, соответствующий $f \in \mathscr{V}^*$: $gf \equiv f \bmod \mathscr{G}$. Тогда (VI.3.2) эквивалентно следующему равенству в $\overline{\mathscr{V}^*}$:

$$g\mathscr{A}u = g\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{VI.3.3}$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ оператор $(\gamma_0,\ g\mathscr{A})$: $U \to \mathscr{H}^{-s} \times \overline{\mathscr{V}^*}$. Тогда задача Коши (VI.0.1), (VI.0.2) может быть записана так:

$$\mathfrak{A}u = (u_0,\ Gw), \quad \text{где} \quad Gw \equiv g\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{VI.3.4}$$

Из леммы 2.3 и предложения 3.1 вытекает

Предложение 3.2. *Отображение $\mathfrak{A}$: $U \to \mathscr{H}^{-s} \times \overline{\mathscr{V}^*}$ измеримо по Борелю.*

Пусть

$$\mathscr{V}^0 = \{v \in \mathscr{V}:\ \operatorname{div} v(t,\ x) = 0,\ 0 < t < T,\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Тогда справедливо

Предложение 3.3. *Пространство $(\overline{\mathscr{V}^*})'$, двойственное к $\overline{\mathscr{V}^*}$, изоморфно $\mathscr{V}^0$, причем двойственность между $\overline{\mathscr{V}^*}$ и $\mathscr{V}^0$ определяется формулой*

$$[gf,\ v] = \{f,\ v\} \quad \forall f \in \mathscr{V}^*, \quad gf \in \overline{\mathscr{V}^*}, \quad \forall v \in \mathscr{V}^0. \tag{VI.3.5}$$

2. Статистическая постановка задачи. Пусть $\mu(du_0)$ — однородная вероятностная борелевская мера на $\mathscr{H}$, удовлетворяющая условию (VI.1.4) и задающая распределение начального поля скоростей $u_0(x)$. В силу (VI.1.4) μ сосредоточена на $\mathscr{H}(r)$ при $r < -n/2$ (см. п. 1 § 1).

Пусть $\Lambda(dw)$ — винеровская мера, σ-аддитивная на $\mathfrak{B}(\mathscr{C})$, где $\mathscr{C} = C(0, T; H)$, задающая распределение $w(t, x)$. По определению, для $\Lambda(dw)$ справедливы тождества (II.2.1), (II.2.2) с

$$v \in \mathscr{D} \equiv [C_0^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^n)]^n$$

Предполагается, что Λ — однородная мера по x:

$$\text{(VI.3.6)} \qquad \Lambda(\hat{h}B) = \Lambda(B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathscr{C}), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

где $\hat{h}w(t, x) = w(t, x+h)\ \forall w \in \mathscr{C}$. Наконец, предполагается, что

$$\text{(VI.3.7)} \qquad \int |w(t, x)|^2 \Lambda(dw) \equiv t \cdot \bar{s} < +\infty, \quad \text{где} \quad \bar{s} \in \mathbb{R},$$

а интеграл понимается в смысле (VI.1.3′). Отметим, что достаточно предполагать лишь конечность интеграла (VI.3.7), так как из этого предположения следует, что он равен $t \cdot \bar{s}$. Из (VI.3.6) и (VI.3.7) вытекает, что для

$$v_1(x),\ v_2(x) \in D \equiv D(\mathbb{R}^n) = [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^n$$

оператор Q, ввходящий в (II.2.2), имеет следующий вид:

$$\text{(VI.3.8)} \qquad \langle Qv_1, v_2 \rangle = \int\int (Q(x-y) v_1(x), v_2(y))\, dx\, dy,$$

$$Q(z) = (Q^{ij}(z))_{i, j=1, \ldots, n},$$

где $Q(z)$ — ограниченная, непрерывная функция, принимающая значения в множестве вещественных $n \times n$-матриц, причем $\mathrm{Sp}\, Q(0) = \bar{s}$. Функция $Q(z)$ положительно определена в том смысле, что

$$\int\int (Q(x-y) v(x), v(y))\, dx\, dy \geqslant 0 \quad \forall v \in D, \quad \text{и} \quad Q^{ij}(z) \equiv Q^{ji}(-z)$$

(см. ниже замечание 5.1).

Обозначим через $\mathscr{N}$ меру на $\overline{\mathscr{V}}^*$ — образ Λ при отображении $G = g\dfrac{\partial}{\partial t}$ (см. (VI.3.4)):

$$\text{(VI.3.9)} \qquad \mathscr{N} = G^* \Lambda.$$

Определение 3.1. *Однородным по x статистическим решением стохастической задачи Коши* (VI.0.1), (VI.0.2) *для системы Навье — Стокса, отвечающим начальной мере* $\mu(du_0)$ *и винеровской мере* $\Lambda(dw)$, называется борелевская вероятностная мера $P(du)$ на $\mathscr{L}_2$, обладающая следующими свойствами.

1) Мера P однородна по x (подобно Λ, см. (VI.3.6)) и сосредоточена на $U \in \mathfrak{B}(\mathscr{L}_2)$.

2) При отображении $\mathfrak{A} \equiv (\gamma_0, g\mathscr{A})$ мера P переходит в $\mu \times \mathscr{N}$:

$$\mathfrak{A}^* P = \mu \times \mathscr{N}.$$

3) Имеет место оценка средней плотности энергии

$$\text{(VI 3.10)} \qquad \int \left(|u(t, x)|^2 + 2\nu \int_0^t |\nabla u(\tau, x)|^2 d\tau \right) P(du) \leqslant$$

$$\leqslant \bar{e}_0 + t\bar{s} + C\|f\|^2_{L_2(0, t)} \qquad \forall t \in [0, T],$$

где интеграл по мере $P(du)$ понимается в смысле (VI.1.3′).

4) Для любого $R > 0$ справедливо неравенство (при некотором $q \geqslant 1$)

$$\text{(VI.3.11)} \qquad \int \|u\|_{BV_{q, R}^{-s}} P(du) \leqslant C_R < +\infty.$$

5) Траектории $u(t, x)$ в любом шаре $|x| < R$ в среднем удовлетворяют условию Гёльдера:

$$(\mathrm{VI}.3.12) \qquad \int\limits_{[t,\tau]} (\operatorname{osc}_R^{-s} u)\, P(du) \leqslant C_R |t-\tau|^{1/q}, \qquad 0 \leqslant t < \tau \leqslant T.$$

3. Формулировка основной теоремы. Теорема 3.1. 1) *Пусть мера μ — распределение начального поля $u_0(x)$ — однородна и имеет конечную среднюю плотность энергии* $\bar{e}_0$ (см. (VI.1.4)), *а Λ — распределение $w(t, x)$ — однородная по x винеровская мера, удовлетворяющая* (VI.3.7). *Предполагается, что случайные поля $u_0(x)$ и $w(t, x)$ независимы. Тогда существует статистическое, однородное по x решение P стохастической задачи Коши* (VI.0.1), (VI.0.2), *отвечающее μ и Λ и удовлетворяющее оценкам* (VI.3.11), (VI.3.12) *с $q > 2$ и $s > s_n = \max\left(\frac{n}{2} + 3,\ n+1\right)$.*

2) *Если $Q = 0$, т. е. в* (VI.0.1) $w(t, x) \equiv 0$, *то в* (VI.3.11), (VI.3.12) *можно взять $q = 1$. При этом мера P сосредоточена на пространстве W, состоящем из слабых решений системы Навье — Стокса вида* (I.1.1) *в* $\mathbb{R}^n$. *Множество W замкнуто в U и $W \in \mathfrak{B}(\mathscr{L}_2)$.*

Отметим, что условие 2) определения 3.1 эквивалентно интегральному тождеству вида (II.2.10):

$$(\mathrm{VI}.3.13) \qquad \int \exp\left(i[\langle \gamma_0 u, v_0\rangle + \{\mathscr{A}u, v\}]\right) P(du) = \tilde{\mu}(v_0)\,\tilde{\Lambda}\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$
$$\forall v_0 \in D, \qquad \forall v \in \mathscr{V}^0 \cap \mathscr{D}.$$

Замечание 3.1. Теорема 3.1 была сначала доказана в случае $w \equiv 0$ ([21], [22]), а затем было получено ее обобщение на случай $w \not\equiv 0$([12]).

В данном изложении, для краткости, объединены методы работ [21] и [12] для доказательства пункта 1) теоремы 3.1, а утверждение 2) формально получается как частный случай, когда мера $\Lambda(dw)$ равна δ-мера, сосредоточенной в точке $w = 0$. При этом $\tilde{\Lambda}(v) \equiv 1$.

§ 4. Об индивидуальных решениях задачи Коши, обладающих бесконечной энергией

1. Теорема 4.1. *Пусть μ и Λ удовлетворяют условиям теоремы* 3.1. *Тогда задача Коши* (VI.0.1), (VI.0.2) *в* $\mathbb{R}^n$ *имеет решение $u(t, x) \in U$ при всех $(u_0, w) \in \mathscr{H} \times \mathscr{C}$, кроме множества $\mu \times \Lambda$-меры нуль.*

Эта теорема выводится из следующей леммы.

Лемма 4.1. *Существует такое множество $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s} \times \overline{\mathscr{V}^*})$, что*

$$(\mathrm{VI}.4.1) \qquad B \subset \mathfrak{A}U \quad \text{и} \quad (\mu \times \mathscr{N})(B) = 1.$$

Поясним лишь основную идею доказательства. Пусть P — статистическое решение из теоремы 3.1. В силу п. 2) определения 3.1

$$\mu \times \mathscr{N}(\mathfrak{A}U) = P(U) = 1,$$

если $\mathfrak{A}U \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s} \times \overline{\mathscr{V}^*})$.

Но последнее включение не доказано. Поэтому строится множество $B \subset \mathfrak{A}U$, $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}^{-s} \times \overline{\mathscr{V}^*})$, обладающее свойствами, указанными в лемме 4.1. При этом используется теорема Егорова ([27], с. 166). В качестве непрерывных операторов $\mathfrak{A}_\varepsilon\colon \mathscr{L}_2 \to \mathscr{H}^{-s} \times \overline{\mathscr{V}^*}$, аппроксимирующих $\mathfrak{A}$, рассматриваются операторы

$$(\mathrm{VI}.4.2) \qquad \mathfrak{A}^\varepsilon u \equiv (\gamma_0^\varepsilon u,\ g\mathscr{A}u), \quad \text{где } \gamma_0^\varepsilon u \equiv \gamma_0 J_\varepsilon u \qquad (\text{см. (VI. 2.9)}) \ ■.$$

Выведем теорему 4.1 из леммы 4.1. Для этого положим

$$(\text{VI}.4.3)\qquad \mathcal{F}=\{(u_0,\ w)\in\mathcal{H}\times\mathcal{C}:\quad (u_0,\ Gw)\in B\}.$$

Так как отображение G: $\mathcal{C}\to\overline{\mathcal{V}^*}$ непрерывно, то $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}(\mathcal{H}\times\mathcal{C})$ и вследствие (VI.4.1)

$$(\text{VI}.4.4)\qquad \mu\times\Lambda(\mathcal{F})=\mu\times N(B)=1.$$

Кроме того, если $(u_0,\ w)\in\mathcal{F}$, то $(u_0,\ Gw)\in\mathfrak{A}U$, откуда следует, что при всех $(u_0,\ w)\in\mathcal{F}$ задача Коши (VI.0.1), (VI.0.2) имеет решение $u(t,\ x)\in U$. ■

Замечание 4.1. Если $\mu(\{0\})=0$, где $\{0\}$ — множество, состоящее из одной нулевой функции $u_0(x)\equiv 0$, то аналогичным свойством обладает статистическое решение P. В этом случае, аналогично замечанию 1.1,

$$P([L_2([0,\ T]\times\mathbb{R}^n)]^n)=0,$$

и, следовательно,

$$P(U\setminus[L_2([0,\ T]\times\mathbb{R}^n)]^n)=P(U)=1.$$

Отсюда вытекает, что с вероятностью единица решения $u(t,\ x)$, построенные в теореме 4.1, принадлежат $U\setminus[L_2([0,\ T]\times\mathbb{R}^n)]^n$, т. е. для них

$$\|u\|_{[L_2([0,\ T]\times\mathbb{R}^n)]^n}=+\infty.$$

2. Разрешимость задачи Коши при почти периодических начальных условиях и правых частях. а) Рассмотрим задачу Коши (VI.0.1), (VI.0.2) с $w=0$ и с начальным данным $u_0(x)$ — почти периодическим тригонометрическим полиномом, определенным в (VI.1.6). Пусть μ — однородная мера на пространстве тригонометрических полиномов (VI.1.6), построенная в п. 2 § 1, а $\Lambda(dw)$ — винеровская мера, сосредоточенная в нуле, что соответствует случаю $w(t,\ x)\equiv 0$. Тогда из теоремы 4.1 следует, что задача Коши (VI.0.1), (VI.0.2) с $w\equiv 0$ имеет решение $u(t,\ x)\in U$ при μ-почти всех начальных данных $u_0(x)$ вида (VI.1.6) или, что эквивалентно, при всех наборах коэффициентов $(a_1,\ \ldots,\ a_N)$ из (VI.1.6), принадлежащих σ, кроме подмножества σ лебеговой меры нуль.

Аналогичное утверждение справедливо при почти периодических начальных условиях $u_0(x)$, заданных формулой (VI.1.6), и в случае $N=\infty$, если выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2 k^{1+\varepsilon}<+\infty,\quad \varepsilon>0,\quad \text{где}\quad r_k=|a_k|\quad \text{при}\quad a_k\in\sigma_k.$$

б) Рассмотрим систему (VI.0.1) с белым шумом следующего вида:

$$(\text{VI}.4.5)\qquad \frac{\partial w(t,\ x)}{\partial t}=\frac{\partial w_1(t)}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{N_1}\operatorname{Re}[b_k e^{i\xi_k x}]\right)\equiv\dot{w}_1(t)\,v(x),$$

где $w_1(t)$ — скалярный винеровский процесс, не зависимый от $v(x)$, а распределение почти периодического тригонометрического многочлена $v(x)$ задается мерой $\mu_1(dv)$, аналогичной мере μ из примера 1 п. 3 § 1. Однако теперь не требуется, чтобы $b_k\cdot\xi_k=0$, и числа r_k заменены, быть может, другими числами ρ_k $(k=1,\ \ldots,\ N_1)$. Начальное условие $u_0(x)$ такое же, как в п. а), и его распределение обозначается здесь через $\mu(du_0)$. Предполагается, что случайные функции $u_0(x)$, $w_1(t)$, $v(x)$ независимы. Очевидно, распределение процесса $w(t,\ x)$ из (VI.4.5) удовлетворяет условиям теоремы 3.1, и поэтому в силу теоремы 4.1 задача Коши (VI.0.1), (VI.0.2) с белым шумом (VI.4.5) в правой части разрешима при почти всех по мере Лебега b_k $(k=1,\ \ldots,\ N_1)$ с $|b_k|=\rho_k$, почти всех a_k $(k=1,\ \ldots,\ N)$ с $|a_k|=r_k$, $a_k\cdot\xi_k=0$ и почти всех по мере Винера на $C(0,\ T)$ непрерывных функциях $w_1(t)$.

§ 5. Периодические конечномерные аппроксимации стохастической задачи Коши

1. Периодическая аппроксимация начальной меры μ. Пусть $\Gamma_l = \frac{\pi}{l}\mathbb{Z}^n$. Введем пространство вещественных тригонометрических полиномов

$$M_l = \{u(x) = \sum_{k\in\Gamma_l} \hat{u}(k)\, e^{ikx}\colon\ \hat{u}(k)\in\mathbb{C}^n,\ \hat{u}(k)=0 \text{ при } |k|\geqslant l\} \tag{VI.5.1}$$

с периодом $2l$ по каждой переменной. Положим

$$\mathscr{M}_l = \{u(x)\in M_l\colon\ \operatorname{div} u(x) = 0,\ x\in\mathbb{R}^n\}. \tag{VI.5.2}$$

Отметим, что пространства M_l и $\mathscr{M}_l$ инвариантны относительно сдвигов в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.1. *Пусть μ — однородная вероятностная борелевская мера на $\mathscr{H}$, удовлетворяющая условию* (VI.1.4). *Тогда для любого $l>1$ существуют однородные вероятностные борелевские меры μ_l на $\mathscr{H}$, сосредоточенные на $\mathscr{M}_l$ и удовлетворяющие следующим условиям.*

а) *При $l\to+\infty$ характеристические функционалы $\tilde{\mu}_l(v)$ мер $\mu_l(du_0)$ сходятся к характеристическому функционалу $\tilde{\mu}(v)$ меры $\mu(du_0)$:*

$$\tilde{\mu}_l(v)\to\tilde{\mu}(v) \quad \textit{при} \quad l\to+\infty \quad \forall v\in D\equiv[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^n. \tag{VI.5.3}$$

б) *Справедлива равномерная по l оценка*

$$\int |u_0(x)|^2\,\mu_l(du_0)\leqslant\bar{e}_0 \quad \forall l>1. \tag{VI.5.4}$$

Доказательство этой теоремы для краткости здесь не приводится.

2. Периодическая аппроксимация однородных по x винеровских мер. Положим $\mathscr{C}_l\equiv C(0,\ T;\ M_l)$.

Теорема 5.2. *Пусть Λ — однородная по x винеровская мера на $\mathscr{C}$, удовлетворяющая условию* (VI.3.7), *и $\tilde{\Lambda}(\cdot)$ — ее характеристический функционал. Тогда для любого $l>1$ существует однородная винеровская мера Λ_l, сосредоточенная на $\mathscr{C}_l$, с характеристическим функционалом $\tilde{\Lambda}_l$, причем*

$$\tilde{\Lambda}_l(v)\to\tilde{\Lambda}(v) \quad \textit{при} \quad l\to+\infty \quad \forall v\in\mathscr{D}\equiv[C_0^\infty((0,\ T)\times\mathbb{R}^n)]^n. \tag{VI.5.5}$$

Справедливы следующие равномерные по l оценки:

$$t^{-1}\int |w(t,\ x)|^2\,\Lambda_l(dw)\equiv\bar{s}_l\leqslant\bar{s} \quad \forall l>1; \tag{VI.5.6}$$

при $q>2$ и $s>s_n\equiv\max\left(\frac{n}{2}+3,\ n+1\right)$

$$\int \|w\|_{BV_q^{-s},R}\,\Lambda_l(dw)\leqslant C_R(T)<+\infty \quad \forall l>1,\ \forall R>0, \tag{VI.5.7}$$

где $C_R(T)$ не зависит от l ($C_R(T)$ зависит от $\bar{s}$).

Доказательство. Матричная корреляционная функция $Q(x-y)$, отвечающая мере $\Lambda(dw)$ (см. (VI.3.8) и (II.2.2), (II.2.1)), вещественна и положительно определена, т. е.

$$\int\int (Q(x-y)\,v(x),\ v(y))\,dx\,dy\geqslant 0$$

для каждого $v\in D$, и, кроме того, $Q^{ij}(-z)\equiv Q^{ji}(z)$, поэтому, используя теорему Бохнера [23], можно показать, что

$$Q(z)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi z}\,\mathfrak{R}(d\xi),$$

где $\mathfrak{N}(d\xi) = \widetilde{Q}(\xi)d\xi$ — конечная $n \times n$-матричная эрмитова неотрицательная мера на $\mathbb{R}^n$ [1]), $\widetilde{Q}(\xi)$ — преобразование Фурье $Q(z)$ (в смысле обобщенных функций), $\widetilde{Q}(-\xi) = \overline{\widetilde{Q}}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 5.1. Можно показать, что верно и обратное: для любой конечной $n \times n$-матричной эрмитовой неотрицательной меры $\mathfrak{N}(d\xi)$ на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию

$$\mathfrak{N}(-\omega) = \overline{\mathfrak{N}}(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n),$$

существует винеровская мера Λ на $\mathscr{C}$, которая отвечает корреляционной функции

$$Q(z) \equiv (2\pi)^{-n} \int e^{i\xi \cdot z} \mathfrak{N}(d\xi)$$

по формулам (VI.3.8), (II.2.2) и (II.2.1) [56].

Пусть $Q_l(z)$ — корреляционная функция, отвечающая искомой мере Λ_l, и $\widetilde{Q}_l(\xi)$ — ее преобразование Фурье. Так как Λ_l сосредоточена на $\mathscr{C}_l$, то

(VI.5.8) $$Q_l(z) = \sum_{k \in \Gamma_l,\ |k| \leqslant l} \hat{Q}_l(k)\, e^{ikz} \text{ и, соответственно,}$$

$$\widetilde{Q}_l(\xi) = (2\pi)^{-n} \sum_k \hat{Q}_l(k)\, \delta(\xi - k).$$

Чтобы определить неизвестные матрицы $\hat{Q}_l(k)$, разобьем все пространство $\mathbb{R}^n$ на кубические ячейки $\tau_l(k)$ с ребрами длины π/l и с центрами в точках $k \in \Gamma_l$. Граничные точки кубов распределяются по ячейкам так, что разные ячейки не пересекаются и $\tau_l(-k) = -\tau_l(k)$ $\forall k \in \Gamma_l$. Положим

(VI.5.8′) $$\hat{Q}_l(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\tau_l(k)} \mathfrak{N}(d\xi)$$

при $k \in \Gamma_l$, $|k| \leqslant l$; $\hat{Q}_l(k) = 0$ при $|k| > l$. Определим $Q_l(z)$ по формуле (VI.5.8). Очевидно, $Q_l(z)$ — положительно определенная матричная вещественная функция и $Q_l^{ij}(-z) \equiv Q_l^{ji}(z)$; следовательно, на $\mathscr{C}$ существует винеровская мера $\Lambda_l(dw)$ с корреляционной функцией $Q_l(z)$. Покажем, что Λ_l удовлетворяет условиям теоремы 5.2. Очевидно, Λ_l сосредоточена на $\mathscr{C}_l$. Так как

$$\widetilde{\Lambda}_l(v) \equiv \exp\left(-\frac{1}{2} B_l(v, v)\right),$$

где B_l определяется формулами (II.2.2), (VI.3.8) с $Q_l(x - y)$ вместо $Q(x - y)$, то (VI.5.5) легко выводится из (VI.5.8′). Однородность по x меры Λ_l вытекает из тождества

$$\widetilde{\Lambda}_l(\hat{h}v) = \widetilde{\Lambda}_l(v) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n,\ \forall v \in \mathscr{D},$$

которое проверяется непосредственно, поскольку $Q_l(x - y)$ не меняется при замене x, y на $x + h$, $y + h$. Чтобы получить оценку (VI.5.6), заметим, что

$$\overline{s_l} = \operatorname{Sp} Q_l(0) = \sum_{|k| \leqslant l} \operatorname{Sp} \hat{Q}_l(k),$$

откуда в силу (VI.5.8′)

$$\overline{s_l} \leqslant (2\pi)^{-n} \operatorname{Sp} \int \mathfrak{N}(d\xi) = \operatorname{Sp} Q(0) = \overline{s}.$$

---

[1]) Точнее, $Q^{lj}(z) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\xi z} \mathfrak{N}^{lj}(d\xi)$ $\forall l,\ j = 1, \ldots, n$, где $\mathfrak{N}^{lj}((\cdot)$ — σ-аддитивные комплексные функции множеств, определенные на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, причем $(\mathfrak{N}^{lj}(\omega))_{l,\,j=1,\ldots,n}$ — неотрицательная эрмитова матрица для любого $\omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Наконец, оценка (VI.5.7) доказывается по той же схеме, что и лемма 3.2 главы II. А именно, винеровский процесс $w_l(t, x)$ с распределением Λ_l разлагается по базису $\{e^{ikx}\}$, $k \in \Gamma_l$, $|k| \leqslant l$:

$$w_l(t, x) = \sum_{|k| \leqslant l} \hat{w}_l(t, k) e^{ikx}.$$

Из (VI.5.6) в силу однородности по x меры Λ_l вытекает оценка, аналогичная (II.3.23):

$$\text{(VI.5.9)} \quad E_l \sum_{k \in \Gamma_l,\ |k| \leqslant l} |\hat{w}_l(t, k)|^2 = \frac{1}{|T_l|} E_l \int_{T_l} |w_l(t, x)|^2 dx = \\ = t\overline{s_l} \leqslant t\overline{s} \quad \forall l > 1,$$

где T_l — куб:

$$T_l \equiv \{x \in \mathbb{R}^n: |x^j| < l, 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

$|T_l|$ — его объем, а E_l — интеграл по мере $\Lambda_l(dw_l)$. Из (VI.5.9) так же, как в лемме 3.2 главы II, выводится оценка, аналогичная (II.3.26): $\forall M \geqslant 1$

$$\text{(VI.5.10)} \quad \Lambda_l\left(\left\{w_l \in \mathscr{C}_l: \sup_{0 \leqslant t < \tau \leqslant T} \frac{\| w_l(t, \cdot) - w_l(\tau, \cdot) \|^2_{-s, R}}{|t-\tau|^{2/q}} > C_1 M\right)\right\}\right) < \\ < C_2 2^{-C_3 M},$$

где $q > 2$, а C_1, C_2 и C_3 — положительные константы, не зависящие от l и M. Так как для любого разбиения $0 = t_0 < \ldots < t_N = T$ отрезка $[0, T]$

$$\sum_{j=1}^{N} |\operatorname{osc}^{-s}_{R\,[t_{j-1}, t_j]} w_l|^q \leqslant T \sup_{0 \leqslant t < \tau \leqslant T} \frac{\| w_l(t, \cdot) - w_l(\tau, \cdot) \|^q_{-s, R}}{|t-\tau|},$$

то из (VI.5.10) и (VI.2.3) следует, что

$$p_{l, M} \equiv \Lambda_l(\{w_l \in \mathscr{C}_l: \operatorname{Var}^{-s}_{q, R} w_l > C_1' M^{1/2}\}) < C_2 2^{-C_3 M}$$

для любого $M \geqslant 1$. Поэтому аналогично (II.3.27)

$$E_l \operatorname{Var}^{-s}_{q, R} w_l \leqslant C_1' + \sum_{M=1}^{\infty} C_1' (M+1)^{1/2} p_{l, M} \leqslant C < +\infty,$$

где C не зависит от $l > 1$. Так как $w_l(0, \cdot) = 0$ п. н., то из этой оценки в силу соотношения

$$\| w_l \|_{BV^{-s}_{q, R}} \leqslant \operatorname{Var}^{-s}_{q, R} w_l + \| w_l(0, \cdot) \|_{-s, R} + \operatorname{osc}^{-s}_{R\,[0, T]} w_l \leqslant 2 \operatorname{Var}^{-s}_{q, R} w_l$$

следует (VI.5.7). ■

Аналогично (VI.5.7) доказывается оценка

$$\text{(VI.5.11)} \quad \int \| \pi_l w \|_{BV^{-s}_{q, R}} \Lambda_l(dw) \leqslant C_R(T) < \infty \quad \forall l > 1,$$

где $C_R(T)$ не зависит от l. Здесь π_l — проектор на пространство $\mathscr{M}_l$, определенный на периодических функциях $u(x) \in H$ с кубом периодов T_l следующей формулой:

$$\text{(VI.5.12)} \quad \pi_l u = \pi_l \sum_{k \in \Gamma_l} \hat{u}(k) e^{ikx} = \sum_{|k| \leqslant l} \Pi(k) \hat{u}(k) e^{ikx},$$

причем для любого $a \in \mathbb{C}^n$

(VI.5.13) $\Pi(k)a \equiv$

$$\equiv \begin{cases} a - \frac{k}{|k|}\left(a, \frac{k}{|k|}\right), & k \neq 0, \quad \text{где } (a, b) \equiv \sum_{i=1}^{n} a^i \overline{b^i} \quad \forall a, b \in \mathbb{C}^n, \\ a, & k = 0. \end{cases}$$

3. Галеркинские приближения статистического решения стохастической задачи Коши (VI.0.1), (VI.0.2). Введем обозначения: для $u(x)$, $v(x) \in H$ и $u(t, x)$, $v(t, x) \in \mathcal{L}_2$ положим

$$\langle u, v\rangle_l = \int_{T_l} (u(x), v(x))\, dx, \quad \{u(t, x), v(t, x)\}_l = \int_0^T \langle u(t, \cdot), v(t, \cdot)\rangle_l\, dt.$$

Очевидно,

$$\langle u(x), v(x)\rangle_l = \langle u(x), \varphi_l(x) v(x)\rangle,$$

где $\varphi_l(x)$ — индикаторная функция куба T_l, и аналогично

$$\{u(t, x), v(t, x)\}_l = \{u(t, x), \varphi_l(x)\, v(t, x)\}.$$

Обозначим: $\mathscr{V}_l^0 = C_0^\infty(0, T; \mathscr{M}_l)$; тогда для $w \in \mathscr{C}_l$ и $v \in \mathscr{V}_l^0$ имеем

$$\left\{\frac{\partial w}{\partial t}, v\right\}_l = -\left\{w, \varphi_l \frac{\partial v}{\partial t}\right\},$$

откуда

(VI.5.14) $$\int e^{i\langle u, v\rangle_l} \mu_l(du) = \widetilde{\mu}_l(\varphi_l v) \quad \forall v \in M_l,$$

$$\int e^{i\left\{\frac{\partial w}{\partial t}, v\right\}_l} \Lambda_l(dw) = \widetilde{\Lambda}_l\left(-\varphi_l \frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad \forall v \in \mathscr{V}_l^0.$$

При доказательстве основной теоремы 3.1 будем считать, что в (VI.0.1) $f(t) \equiv 0$. Доказательство в случае $f(t) \not\equiv 0$ проводится аналогично.

Теорема 5.3. *Для любого $l > 1$ существует борелевская вероятностная однородная по x мера P_l на $\mathscr{L}_2$, для которой:* а) *справедливо тождество, подобное* (VI.3.13),

(VI.5.15) $$\int \exp(i[\langle \gamma_0 u, v_0\rangle_l + \{\mathscr{A}u, v\}_l])\, P_l(du) = \widetilde{\mu}_l(\varphi_l v_0)\, \widetilde{\Lambda}_l\left(-\varphi_l \frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad \forall v_0 \in M_l, \ \forall v \in \mathscr{V}_l^0;$$

б) *справедливы равномерные по $l > 1$ оценки средней плотности энергии и средней диссипации энергии*

(VI.5.16) $$\int \left(|u(t, x)|^2 + 2\nu \int_0^t |\nabla u(\tau, x)|^2\, d\tau\right) P_l(du) \leqslant \bar{e}_0 + t\bar{s}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и средней вариации степени $q > 2$ при $s > \max\left(\frac{n}{2} + 3, n + 1\right)$

(VI.5.17) $$\int \|u\|_{BV_{q,R}^{-s}} P_l(du) \leqslant C_R \quad \forall l > 1, \ \forall R > 0;$$

в) *справедлива равномерная по $l > 1$ гёльдеровская оценка «в среднем»*

(VI.5.18) $$\int (\operatorname{osc}_{R}^{-s}_{[t,\tau]} u)\, P_l(du) \leqslant C_R |t - \tau|^{1/q} \quad \forall l > 1, \ \forall R > 0.$$

В (VI.5.17) *и* (VI.5.18) *константа $C_R < +\infty$ не зависит от $l > 1$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1 главы II. А именно, рассмотрим задачу Коши для системы Ито, являющуюся галёркинской аппроксимацией задачи (VI.0.1), (VI.0.2),

$$\text{(VI.5.19)}\qquad \begin{cases} du_l(t)+\pi_l(u_l(t),\ \nabla)u_l(t)\,dt=\nu\Delta u_l(t)\,dt+d\pi_l w_l(t),\\ u_l(0)=u_{0,l};\ 0<t<T,\\ u_l(t)\equiv u_l(t,\ \cdot)\in\mathcal{M}_l,\ w_l(t)\equiv w_l(t,\ \cdot)\in M_l. \end{cases}$$

Здесь $u_{0,l}\equiv u_{0,l}(x)\in\mathcal{M}_l$ и $w_l\in\mathscr{C}_l$ — независимые случайные функции с распределениями μ_l и Λ_l соответственно, определенные на вероятностном пространстве

$$\text{(VI.5.19')}\qquad (\mathcal{M}_l\times\mathscr{C}_l,\ \mathfrak{B}(\mathcal{M}_l\times\mathscr{C}_l),\ \mu_l\times\Lambda_l),$$

с оператором математического ожидания $\mathscr{E}_l$. Выведем априорную оценку средней энергии (и диссипации энергии) для решения стохастической задачи (VI.5.19).

Лемма 5.1. *Для каждого* $l>1$ *решение задачи* (VI.5.19), *если оно существует с вероятностью единица на интервале* $[0,\ T]$, *удовлетворяет следующей энергетической оценке*:

$$\text{(VI.5.20)}\qquad \mathscr{E}_l\left(\langle u_l(t),u_l(t)\rangle_l+2\nu\int_0^t\langle\nabla u_l(\tau),\nabla u_l(\tau)\rangle_l\,d\tau\right)\leqslant(\bar e_0+t\bar s)\mid T_l\mid.$$

Доказательство. Эта оценка выводится из (VI.5.19) с помощью формулы Ито, как в теореме 3.1 главы II. Действительно, пусть

$$u_l(t,x)=\sum_{j=1}^{N(l)}u_l^j(t)e_j(x),\qquad \pi_l w_l(t,x)=\sum_{j=1}^{N(l)}w_l^j(t)\,e_j(x),$$

где $\{e_j(x)\}$ $(j=1,\ \ldots,\ N(l))$ — ортонормированный базис в $\mathcal{M}_l$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_l$. Тогда по формуле Ито из (VI.5.19) получаем $(Q_l^{jj}\equiv t^{-1}\mathscr{E}_l(w_l^j(t))^2)$

$$\text{(VI.5.21)}\qquad d\langle u_l(t),u_l(t)\rangle_l=d\sum_{j=1}^{N(l)}(u_l^j(t))^2=\sum_{j=1}^{N(l)}(2u_l^j(t)\,du_l^j(t)+Q_l^{jj}\,dt)=$$

$$=2\sum_{j=1}^{N(l)}(u_l^j(t)\,b^j(u_l(t))\,dt+u_l^j(t)\,dw_l^j(t))+\sum_{j=1}^{N(l)}Q_l^{jj}\,dt,\ 0<t<T,$$

где $b^j(u_l)\equiv\langle\nu\Delta u_l-\pi_l(u_l,\ \nabla)u_l,\ e_j\rangle_l$. Так как $\langle\pi_l(u_l,\ \nabla)u_l,\ u_l\rangle_l=0$ для $u_l\in\mathcal{M}_l$ подобно (I.1.12), то

$$\sum_j u_l^j b^j(u_l)=\langle\nu\Delta u_l-\pi_l(u_l,\nabla)u_l,u_l\rangle_l=-\nu\langle\nabla u_l,\ \nabla u_l\rangle_l.$$

Следовательно, интегрируя (VI.5.21) по t с учетом начальных условий из (VI.5.19) и применяя к полученному равенству оператор $\mathscr{E}_l$, будем иметь

$$\text{(VI.5.22)}\qquad \mathscr{E}_l(\langle u_l(t),u_l(t)\rangle_l+2\nu\int_0^t\langle\nabla u_l(\tau),\nabla u_l(\tau)\rangle_l\,d\tau)=$$

$$=\mathscr{E}_l\langle u_{0,l},u_{0,l}\rangle_l+t\sum_{j=1}^{N(l)}Q_l^{jj},$$

что обосновывается аналогично (II.3.8) (см. с. 156—157). Из (VI.5.4) и однородности мер μ_l по теореме 1.1 получаем

$$(\mathrm{VI.5.23})\qquad \mathscr{E}_l \langle u_{0,l}, u_{0,l}\rangle_l \equiv \int \Big(\int_{T_l} |u_{0,l}(x)|^2 dx \Big) \mu_l(du_{0,l}) = $$
$$= |T_l| \int |u_{0,l}(x)|^2 \mu_l(du_{0,l}) \leqslant |T_l|\, \bar{e}_0.$$

Кроме того, согласно (VI.5.12), (VI.5.13) оператор π_l: $M_l \to \mathscr{M}_l$ — ортогональный проектор в метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$, поэтому

$$\sum_j Q_l^{jj} = t^{-1}\mathscr{E}_l \sum_j (w_l^j(t))^2 = t^{-1}E_l \langle \pi_l w_l(t), \pi_l w_l(t)\rangle_l \leqslant t^{-1}E_l \langle w_l(t), w_l(t)\rangle_l.$$

Следовательно, ввиду однородности по x распределения Λ_l процесса $w_l(t, x)$ из (VI.5.6) выводим

$$(\mathrm{VI.5.24})\qquad \sum_{j=1}^{N(l)} Q_l^{jj} \leqslant |T_l| \cdot \bar{s}_l \leqslant |T_l| \cdot \bar{s}.$$

Из (VI.5.22)—(VI.5.24) вытекает (VI.5.20). ■

Так же, как в теореме 3.1 главы II, из (VI.5.20) следует разрешимость с вероятностью единица задачи Коши (VI.5.19) и измеримость по Борелю отображения $\mathscr{M}_l \times \mathscr{C}_l \to \mathscr{L}_2$, переводящего $(u_{0,l}, w_l)$ в u_l. Определяя вероятностную меру P_l на $\mathscr{L}_2$ как распределение процесса u_l, запишем (VI.5.20) в виде

$$(\mathrm{VI.5.25})\qquad \int \int_{T_l} \Big(u_l^2(t, x) + 2\nu \int_0^T (\nabla u_l(\tau, x))^2 d\tau\Big)\, dx\, P_l(du) \leqslant (\bar{e}_0 + t\bar{s})\,|T_l|.$$

В силу однородности по x меры P_l интеграл по $x \in T_l$ в (VI.5.25) можно заменить умножением на $|T_l|$. Сокращая обе части (VI.5.25) на $|T_l|$, получим (VI.5.16).

Выведем тождество (VI.5.15). В силу (VI.5.19) имеем:

$$(\gamma_0 u_l, \pi_l \mathscr{A} u_l) = \Big(u_{0,l}, \pi_l \frac{\partial w_l}{\partial t}\Big),$$

откуда

$$\langle \gamma_0 u_l, v_0\rangle_l + \{\mathscr{A} u_l, v\}_l = \langle u_{0,l}, v_0\rangle_l + \Big\{\frac{\partial w_l}{\partial t}, v\Big\}_l,$$

так как $v \in \mathscr{V}_l^0$. Поэтому из (VI.5.14) следует (VI.5.15).

Наконец, докажем оценки (VI.5.17) и (VI.5.18). Определим на пространстве (VI.5.19′) процесс

$$(\mathrm{VI.5.26})\qquad z_l(t) \equiv u_l(t) - \pi_l w_l(t).$$

Тогда в силу (VI.5.19) п. н.

$$(\mathrm{VI.5.27})\qquad \frac{\partial z_l(t)}{\partial t} = -\pi_l (u_l(t), \nabla) u_l(t) + \nu \Delta u_l(t), \quad 0 < t < T.$$

Справедливо неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^{N} \big| \operatorname*{osc}_{[t_{j-1}, t_j]} {}_R^{-s} z_l \big|^q \Big)^{1/q} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \big| \operatorname*{osc}_{[t_{j-1}, t_j]} {}_R^{-s} z_l \big| \leqslant \int_0^T \Big\| \frac{\partial z_l(t)}{\partial t} \Big\|_{-s, R} dt, \quad q \geqslant 1.$$

Кроме того, $z_l(0) = u_l(0)$, поэтому

$$\| z_l \|_{BV_q^{-s}, R} \leqslant 2 \int_0^T \Big\| \frac{\partial z_l(t)}{\partial t} \Big\|_{-s, R} dt + \| u_l(0) \|_{-s, R}.$$

Отсюда и из (VI.5.26) следует, что

$$\text{(VI.5.28)}\qquad \mathscr{E}_l \| u_l \|_{BV_q^{-s},\, R} \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathscr{E}_l \int_0^T \left\| \frac{\partial z_l(t)}{\partial t} \right\|_{-s,\, R} dt + \mathscr{E}_l \| u_{0,\, l} \|_{-s,\, R} + \mathscr{E}_l \| \pi_l w_l \|_{BV_q^{-s},\, R}.$$

Последние два слагаемые допускают равномерную по $l > 1$ оценку ввиду (VI.5.4) (так как $s \geqslant 0$) и (VI.5.11) соответственно.

Равномерная по l оценка для первого слагаемого справа в (VI.5.28) вытекает из следующей теоремы.

Теорема 5.4 (основная оценка). *Пусть $z_l(t)$ удовлетворяет соотношению* (VI.5.27), *где* $u_l(t) \equiv u_l(t, \cdot) \in \mathscr{M}_l$. *Тогда при* $s > s_n \equiv \max\left(\frac{n}{2} + 3,\ n+1\right)$ *имеет место следующая оценка: для любого* $v \in D_R \equiv [C_0^\infty(K_R)]^n$ *при* $l > 1$

$$\text{(VI.5.29)}\qquad \left| \left\langle \frac{\partial z_l(t, \cdot)}{\partial t},\ v(\cdot) \right\rangle \right| \leqslant C \| v \|_{s,\, R} \left(1 + \frac{1}{|T_l|} \int_{T_l} |u_l(t, x)|^2 dx + \right.$$
$$\left. + \int_{K_R} |u_l(t,\ x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_l(t,\ x)|^2 (1+|x|)^{-n-1} dx \right),$$

где C не зависит от l, t, v и u_l; $K_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x| < R\}$.

Доказательство дано в § 6.

Из (VI.5.29) по определению (VI.2.1), разделив на $\| v \|_{s,\, R}$ и взяв верхнюю грань по $v \in D_R$, получаем оценку для $\left\| \frac{\partial z_l(t, \cdot)}{\partial t} \right\|_{-s,\, R}$. Интегрируя полученную оценку по мере $P_l(du_l)$, выводим, учитывая (VI.5.16) и однородность меры P_l (см. (VI.1.3)), что

$$\mathscr{E}_l \left\| \frac{\partial z_l(t, \cdot)}{\partial t} \right\|_{-s,\, R} \leqslant C_R < +\infty \quad \forall l > 1,\ \forall t \in [0,\ T],$$

где C_R не зависит от l и t. Таким образом, первое слагаемое справа в (VI.5.28) ограничено равномерно по $l > 1$. Учитывая, что второе и третье слагаемые справа также ограничены, заключаем, что справедлива оценка (VI.5.17). Аналогично доказывается оценка (VI.5.18).

Замечание 5.2. В том случае, когда в уравнении (VI.0.1) отсутствует белый шум $\frac{\partial w}{\partial t}$, оценки (VI.5.17), (VI.5.18) справедливы при $q = 1$ [21]. Условие $q > 2$ необходимо лишь при оценке последнего слагаемого в (VI.5.28).

§ 6. Оценка производной по времени

В этом параграфе будет доказана теорема 5.4. Обозначим через R_l гильбертово пространство периодических функций $v(x) = (v^1(x), \ldots, v^n(x))$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$ с периодом $2l$ по каждой переменной x^j, имеющих конечную норму в $[L_2(T_l)]^n$, которая и определяет гильбертову структуру в R_l:

$$\langle w,\ w \rangle_l = \int_{T_l} |w(x)|^2 dx \equiv \| w \|_{0,\, T_l}^2 < +\infty \quad \text{для} \quad w(x) = \sum_{k \in \Gamma_l} \hat{w}(k) e^{ikx} \in R_l.$$

Положим

$$\mathscr{R}_l \equiv \{ w(x) \in R_l\colon\ \operatorname{div} w(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n \}$$

и через Π_l обозначим ортопроектор в R_l на бесконечномерное подпространство $\mathscr{R}_l$ соленоидальных векторных полей (ср. (VI.5.12)).

Лемма 6.1. *Для любой функции* $u(x) \in R_l$ *справедливо разложение*

$$(\text{VI.6.1}) \qquad u(x) = \Pi_l u(x) + \nabla g(x), \quad \Pi_l u(x) \in \mathscr{R}_l, \quad \nabla g \in R_l \ominus \mathscr{R}_l,$$

где $g(x)$ — n-*периодическая функция с кубом периодов* T_l, $g(x) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. *Коэффициенты Фурье функций* $\nabla g(x)$ *и* $\Pi_l u(x)$ *определяются по формулам* (ср. (VI.5.13))

$$(\text{VI.6.2})' \qquad \widehat{\nabla g}(k) = \left(\hat{u}(k), \frac{k}{|k|}\right)\frac{k}{|k|} \text{ при } k \neq 0, \quad \widehat{\nabla g}(0) = 0;$$

$$\widehat{\Pi_l u}(k) = \hat{u}(k) - \widehat{\nabla g}(k).$$

Доказательство леммы очевидно.

Доказательство теоремы 5.4. Умножим скалярно обе части (VI.5.27) на $v(x) \in D_R$, считая $v(x)$ продолженной нулем на $\mathbb{R}^n \setminus K_R$:

$$(\text{VI.6.3}) \qquad \left\langle \frac{\partial z_l(t, \cdot)}{\partial t}, v(\cdot) \right\rangle = \nu \langle \Delta u_l(t, \cdot), v(\cdot) \rangle - \left\langle \pi_l \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (u_l^j u_l)}{\partial x^j}, v \right\rangle.$$

С помощью интегрирования по частям получим:

$$(\text{VI.6.4}) \qquad |\langle \Delta u(t, \cdot), v(\cdot) \rangle| \leqslant \left(\int\limits_{|x|<R} |u_l(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \|v\|_{2, R} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{|x|<R} |u_l(t, x)|^2 dx + 1 \right) \|v\|_{2, R}.$$

Оценим второе слагаемое справа в (VI.6.3). Разберем случай $l > R$. Вводя $v_l(x) \in R_l$, $v_l|_{T_l} = v$, получим

$$(\text{VI.6.5}) \qquad \left| \left\langle \pi_l \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (u_l^j u_l)}{\partial x^j}, v \right\rangle \right| = \left| \sum_j \left\langle u_l^j u_l, \pi_l \frac{\partial v_l}{\partial x^j} \right\rangle_l \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \sum_j \left\langle u_l^j u_l, \frac{\partial v_l}{\partial x^j} \right\rangle_l \right| + \left| \sum_j \left\langle u_l^j u_l, (\pi_l - \Pi_l) \frac{\partial v_l}{\partial x^j} \right\rangle_l \right| +$$
$$+ \left| \sum_j \left\langle u_l^j u_l, (\Pi_l - I) \frac{\partial v_l}{\partial x^j} \right\rangle_l \right|,$$

поскольку π_l — ортогональный проектор в R_l на $\mathscr{M}_l$ в метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$ (см. (VI.5.12), (VI.5.13)).

Первую сумму Σ_1 в правой части (VI.6.5) оценим при помощи теоремы вложения Соболева

$$(\text{VI.6.6}) \qquad |\Sigma_1| \equiv \left| \sum_j \left\langle u_l^j u_l, \frac{\partial v_l}{\partial x^j} \right\rangle_l \right| \leqslant C \|u_l\|^2_{0, R} \|v\|_{s_1, R}, \quad s_1 > \frac{n}{2} + 1.$$

Вторая сумма Σ_2 в правой части (VI.6.5) допускает оценку:

$$(\text{VI.6.7}) \qquad |\Sigma_2| \leqslant C \int\limits_{T_l} |u_l|^2 dx \cdot \sup_{x \in T_l} \left| (\pi_l - \Pi_l) \frac{\partial v_l}{\partial x^j} \right|.$$

Согласно (VI.5.12), (VI.5.13) и (VI.6.2) имеем

$$(\pi_l - \Pi_l) \frac{\partial v_l}{\partial x^j} = - \sum_{|k|>l} \left(\hat{v}_l(k) - \left(\hat{v}_l(k), \frac{k}{|k|} \right) \frac{k}{|k|} \right) i k^j e^{ikx}.$$

Используя равенство Парсеваля, получаем при $s > n/2$

$$(\text{VI.6.8})\qquad \sup_{x\in T_l}\left|(\pi_l-\Pi_l)\frac{\partial v_l}{\partial x^j}\right|^2=$$
$$=\sup_{x\in T_l}\left|\sum_{|k|>l}\left(\hat v_l(k)-\left(\hat v_l(k),\ \frac{k}{|k|}\right)\frac{k}{|k|}\right)ik^je^{ikx}\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{|k|>l}|\hat v_l(k)|^2(1+|k|^2)^{s+1}\leqslant C_1l^{-2n}\left(l^n\sum_{|k|>l}|\hat v_l(k)|^2(1+|k|^2)^{s+\frac{n}{2}+1}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_2l^{-2n}\|v_l\|^2_{[H^{s+\frac{n}{2}+1}(T_l)]^n}=Cl^{-2n}\|v\|^2_{s+\frac{n}{2}+1,\,R}.$$

Последнее равенство вытекает из определения (VI.2.1) норм $\|\cdot\|_{s,R}$, поскольку $\operatorname{supp} v(x)\subset K_R$. Из (VI.6.7) и (VI.6.8) получаем (так как $s > n/2$)

$$(\text{VI.6.9})\qquad |\Sigma_2|\leqslant Cl^{-n}\int_{T_l}|u_l|^2\,dx\cdot\|v\|_{s_2,\,R},\qquad s_2>n+1.$$

Итак, осталось оценить третью сумму справа в (VI.6.5). Пусть $\tilde v(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\xi}v(x)\,dx$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, — преобразование Фурье $v(x)$.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$(\text{VI.6.10})\qquad A_j(D)v(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}i\xi^j\left(\tilde v(\xi),\ \frac{\xi}{|\xi|}\right)\frac{\xi}{|\xi|}e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Имеют место следующие леммы.

Лемма 6.2. *Справедливо тождество*

$$(\text{VI.6.11})\qquad (I-\Pi_l)\frac{\partial v_l(x)}{\partial x^j}=\sum_{m\in 2l\mathbb{Z}^n}(A_j(D)v)(x+m).$$

Лемма 6.3 *Пусть* $\operatorname{supp} v\subset K_R$ *и* $s_3>\frac{n}{2}+3$. *Тогда имеет место оценка*

$$(\text{VI.6.12})\qquad \left|\sum_{m\in 2l\mathbb{Z}^n}(A_j(D)v)(x+m)\right|\leqslant$$
$$\leqslant C(R)\|v\|_{s_3,\,R}((1+|x|)^{-n-1}+C_1l^{-n-1}),\qquad x\in T_l.$$

Доказательство этих лемм будет приведено ниже, а сейчас завершим вывод оценки (VI.5.29). В силу (VI.6.11) и (VI.6.12)

$$(\text{VI.6.13})\qquad \left|\sum_j\left\langle u_l^ju_l,\ (\Pi_l-I)\frac{\partial v_l}{\partial x^j}\right\rangle_l\right|\leqslant$$
$$\leqslant C(R)\|v\|_{s_3,\,R}\int_{T_l}|u_l(t,\ x)|^2[(1+|x|)^{-n-1}+C_1l^{-n-1}]\,dx,\qquad s_3>\frac{n}{2}+3.$$

Из неравенств (VI.6.4) — (VI.6.6), (VI.6.9) и (VI.6.13) вытекает требуемая оценка (VI.5.29) при

$$s>\max\left(2,\ \frac{n}{2}+1,\ n+1,\ \frac{n}{2}+3\right)=s_n$$

(так как $n\geqslant 2$).

В том случае, когда $l \leqslant R$, оценка (VI.5.29) также имеет место и притом ее доказательство значительно проще. ■

Перейдем к доказательству лемм 6.2 и 6.3. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.4. *Пусть* $v(x) \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^r)]^n$, $\operatorname{supp} v \subset K_R$. *Тогда*

$$A_j(D)\,v(x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^n \tag{VI.6.14}$$

и при $s_3 > \frac{n}{2} + 3$

$$|A_j(D)\,v(x)| \leqslant C(R)\,\|v\|_{s_3,\,R}(1+|x|)^{-n-1}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{VI.6.15}$$

где $C(R)$ *не зависит от* $v(x)$.

Для доказательства заметим, что подынтегральное выражение в (VI.6.10) убывает при $|\xi| \to \infty$ быстрее любой степени $|\xi|$ (так как $v(x) \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^n$). Поэтому $A_j(D)v(x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^n$. Из (VI.6.10) следует при $n \geqslant 3$, что

$$A_j(D)\,v(x) = \Omega_n \frac{\partial}{\partial x^j} \nabla \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{2-n} \operatorname{div} v(y)\,dy, \qquad \Omega_n = \mathrm{const}. \tag{VI.6.16}$$

Пусть $1 \equiv \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, где $\varphi_i(x) \geqslant 0$, $\varphi_1(x) = 1$ при $|x| < 1/2$, $\varphi_1(x) \equiv 0$ при $|x| \geqslant 1$, $\varphi_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$|x-y|^{2-n} = \varphi_1(x-y)|x-y|^{2-n} + \varphi_2(x-y)|x-y|^{2-n}$$

и интеграл (VI.6.16) равен сумме двух соответствующих интегралов $I_1(x)$ и и $I_2(x)$. Легко видеть, что $\operatorname{supp} I_1(x) \subset K_{R+1}$ и

$$|I_1(x)| \leqslant C_1 \int \varphi_1(z)|z|^{2-n}\,dz \cdot \sup_x \left| \frac{\partial}{\partial x^j} \nabla \operatorname{div} v(x) \right| \leqslant C\,\|v\|_{s_3,\,R}, \tag{VI.6.17}$$

$$s_3 > \frac{n}{2} + 3.$$

Далее, воспользовавшись неравенством

$$(1+|x|)^{n+1} \leqslant (1+|x-y|)^{n+1}(1+|y|)^{n+1},$$

получим

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x-y|)^{-n-1}|v(y)|\,dy \leqslant \\ &\leqslant \frac{CR^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} \|v(x)\|_{[L_1(\mathbb{R}^n)]^n} \leqslant \\ &\leqslant C_1 R^{\frac{3n}{2}+1} \|v(x)\|_{0,\,R}(1+|x|)^{-n-1} \quad (\text{так как } \operatorname{supp} v(x) \subset K_R). \end{aligned} \tag{VI.6.18}$$

Из (VI.6.17) и (VI.6.18) следует (VI.6.15). Случай $n = 2$ рассматривается аналогично. ■

Напомним следующую формулу Пуассона. Пусть функция $\psi(x)$ и ее преобразование Фурье $\widetilde{\psi}(\xi)$ принадлежат $C(\mathbb{R}^n)$ и

$$|\psi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-n-1}, \ x \in \mathbb{R}^n, \ |\widetilde{\psi}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{-n-1}, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любого $l > 0$

$$\sum_{m \in 2l\mathbb{Z}^n} \psi(x+m) = (2l)^{-n} \sum_{k \in \frac{\pi}{l}\mathbb{Z}^n} \widetilde{\psi}(k)\,e^{ikx} \quad (\text{см. [31]}). \tag{VI.6.19}$$

Доказательство леммы 6.2. Из (VI.6.15) и (VI.6.10), где $v(x) \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^n$, следует, что к функции $\psi(x) = A_j(D)v(x)$ применима формула Пуассона (VI.6.19); следовательно, в силу (VI.6.10)

$$\text{(VI.6.20)}\qquad \sum_{m\in 2l\mathbb{Z}^n} A_j(D)\,v(x+m)=(2l)^{-n}\sum_{k\in\frac{\pi}{l}\mathbb{Z}^n} ik^j\left(\tilde v(k),\frac{k}{|k|}\right)\frac{k}{|k|}e^{ikx},$$

$\tilde v(k)=F_{x\to k}v(x)$ — преобразование Фурье $v(x)$. Поскольку $v_l(x)$ — периодическая функция с кубом периодов T_l, причем $v(x)|_{T_l}=v_l(x)$, то, очевидно, $\tilde v(k)=\hat v_l(k)\cdot(2l)^n$, где $\hat v_l(k)$ — коэффициент Фурье функции $v_l(x)$. Отсюда, учитывая (VI.6.2), получим, что правая часть (VI.6.20) равна $\frac{\partial}{\partial x^j}(I-\Pi_l)v_l(x)$. ■

Доказательство леммы 6.3. В силу неравенства (VI.6.15)

$$\Big|\sum_{m\in 2l\mathbb{Z}^n} A_j(D)\,v(x+m)\Big|\leqslant C(R)\,\|v\|_{s_3,R}\sum_{m\in 2l\mathbb{Z}^n}(1+|x+m|)^{-n-1},$$

и поэтому для доказательства леммы достаточно установить неравенство

$$\sum_{m\in 2l\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}(1+|x+m|)^{-n-1}\leqslant Cl^{n-1},\qquad x\in T_l.$$

Оно проверяется элементарно. ■

§ 7. Предельный переход

В этом параграфе будет получено статистическое решение стохастической задачи (VI.0.1), (VI.0.2) с помощью предельного перехода в последовательности мер P_l, построенных в § 5.

1. Теорема вложения. Пусть $U_R\equiv L_2(0,\,T;\ \mathcal{H}^1_R)\cap BV_q(0,\,T;\ \mathcal{H}^{-s}_R)$, где $q\geqslant 1$, $s>s_n$ и $\mathcal{L}_{2,R}\equiv L_2(0,\,T;\ \mathcal{H}^0_R)$.

Теорема 7.1. *При любом $R>0$ вложение $U_R\subset\mathcal{L}_{2R}$ компактно.*

Теорема 7.1 представляет собой обобщение теоремы вложения Дубинского, которая использовалась в главах I, II (теорема 4.1 из главы I).

2. Слабая компактность последовательности мер P_l. Теорема 7.2. *Семейство мер $\{P_l\}$, $l>1$, слабо компактно на $\mathcal{L}_2$.*

Доказательство. Из (VI.5.16) и (VI.5.17) следует неравенство

$$\text{(VI.7.1)}\qquad \int\|u\|_{U,R}\,P_l(du)\leqslant C(R),$$

где $C(R)$ не зависит от $l>1$; выражение для нормы $\|u\|_{U,R}$ см. в определении 2.2.

Согласно теореме 7.1 множество

$$\mathcal{K}_R\equiv\{u\in U_R\colon \|u\|_{U,R}<M(R)\}$$

предкомпактно в $\mathcal{L}_{2,R}$ при любом $M(R)\in(0,\infty)$. Положим

$$\text{(VI.7.2)}\qquad \mathcal{K}=\bigcap_{R\in\mathbb{N}} J_R^{-1}(\mathcal{K}_R)\subset\mathcal{L}_2,$$

где $J_R\colon\mathcal{L}_2\to\mathcal{L}_{2,R}$ — оператор ограничения функций $u(t,x)\in\mathcal{L}_2$ с $[0,\,T]\times\mathbb{R}^n$ на $[0,\,T]\times K_R$. Поскольку $\mathcal{K}_R$ — предкомпакт в $\mathcal{L}_{2,R}$ при каждом $R\in\mathbb{N}$, то $\mathcal{K}$ — предкомпакт в $\mathcal{L}_2$. Из (VI.7.1) получаем согласно неравенству Чебышёва

$$P_l(\mathcal{L}_2\setminus J_R^{-1}(\mathcal{K}_R))<C(R)/M(R)\quad\forall l>1.$$

Для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать константы $M(R)$ так, чтобы было

$$\text{(VI.7.3)}\qquad \sum_{R\in\mathbb{N}}\frac{C(R)}{M(R)}<\varepsilon.$$

Тогда $P_l(\mathcal{L}_2\setminus\mathcal{K})\geqslant 1-\varepsilon$ $\forall l>1$, где $\mathcal{K}$ — множество (VI.7.2). Тем самым согласно теореме Прохорова [46] доказана слабая компактность мер P_l на $\mathcal{L}_2$. ■

В силу теоремы 7.2 существует последовательность $l=l_k\to\infty$, для которой меры P_{l_k} на $\mathcal{L}_2$ слабо сходятся: $P_{l_k}\to P$ при $l_k\to+\infty$.

3. Мера P является статистическим решением стохастической задачи (VI.0.1), (VI.0.2). (Напомним, что, для простоты, $f(t)\equiv 0$.) Оценки (VI.3.10) — (VI.3.12) суть следствия равномерных по l оценок (VI.5.16) — (VI.5.18). Для доказательства (VI.3.10) проинтегрируем обе части (VI.5.16) по $|x|<R$, в результате чего получим равномерную по l оценку осреднения по мерам P_l функционалов $\|u(t,\ \cdot)\|^2_{0,R}$ и $\|u\|_{\mathcal{L}^1_2,R}$. Отсюда, аналогично теореме 2.1 главы I, выводится (VI.3.10). Для доказательства (VI.3.11) и (VI.3.12) заменим в (VI.5.17) и (VI.5.18) подынтегральные выражения на их аппроксимации (VI.2.7) и (VI.2.6). Используя соотношения, аналогичные (VI.2.8), и переходя в полученных неравенствах к пределу при $l=l_k\to+\infty$, а затем при $\varepsilon\to 0+$, выведем (VI.3.11) и (VI.3.12). Из оценок (VI.3.10), (VI.3.11) следует, что мера P сосредоточена на U. Так как P_{l_k} — вероятностные, однородные по x меры и $P_{l_k}\to P$, то P — также вероятностная, однородная по x мера. Таким образом, осталось доказать, что мера P удовлетворяет пункту 2) определения 3.1 или, что эквивалентно, удовлетворяет тождеству (VI.3.13).

В силу (VI.2.9) $\gamma_0^\varepsilon u\to\gamma_0 u$ в $\mathcal{H}^{-s}$ при $\varepsilon\to 0+$ $\forall u\in U$, поэтому, учитывая, что мера P сосредоточена на U, получаем по теореме Лебега

$$\text{(VI.7.4)}\qquad \int \exp\left(i\left[\langle\gamma_0^\varepsilon u,\ v_0\rangle+\{\mathcal{A}u,\ v\}\right]\right)P(du)\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{}\ \to\int \exp\left(i\left[\langle\gamma_0 u,\ v_0\rangle+\{\mathcal{A}u,\ v\}\right]\right)P(du)$$

$\forall v_0\in D$, $\forall v\in\mathcal{V}^0\cap\mathcal{D}$. Так как функционалы

$$u\to\langle\gamma_0^\varepsilon u,\ v_0\rangle,\qquad u\to\{\mathcal{A}u,\ v\}$$

непрерывны на $\mathcal{L}_2$ (см. предложение 3.1) и $P_{l_k}\to P$ при $l_k\to\infty$, то $\forall\varepsilon>0$

$$\text{(VI.7.5)}\qquad \int \exp\left(i\left[\langle\gamma_0^\varepsilon u,\ v_0\rangle+\{\mathcal{A}u,\ v\}\right]\right)P_{l_k}(du)\xrightarrow[l_k\to\infty]{}\ \to\int \exp\left(i\left[\langle\gamma_0^\varepsilon u,\ v_0\rangle+\{\mathcal{A}u,\ v\}\right]\right)P(du).$$

Наконец, аналогично (VI.7.4) получаем, что $\forall l>1$

$$\text{(VI.7.6)}\qquad \int \exp\left(i\left[\langle\gamma_0^\varepsilon u,\ v_0\rangle+\{\mathcal{A}u,\ v\}\right]\right)P_l(du)\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{}\ \to\int \exp\left(i\left[\langle\gamma_0 u,\ v_0\rangle+\{\mathcal{A}u,\ v\}\right]\right)P_l(du).$$

Из (VI.5.18) следует, что сходимость в (VI.7.6) равномерна по $l>1$; поэтому из (VI.7.4)—(VI.7.6) по теореме о двойных пределах выводим

$$\text{(VI.7.7)}\qquad \int \exp\left(i\left[\langle\gamma_0 u,\ v_0\rangle+\{\mathcal{A}u,\ v\}\right]\right)P(du)=\ =\lim_{l_k\to+\infty}\int \exp\left(i\left[\langle\gamma_0 u,\ v_0\rangle+\{\mathcal{A}u,\ v\}\right]\right)P_{l_k}(du).$$

Итак, для вывода (VI.3.13) остается доказать следующую лемму.

Лемма 7.1. *Предел справа в* (VI.7.7) *равен* $\widetilde{\mu}(v_0)\widetilde{\Lambda}\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right)$.

Доказательство. Возьмем l столь большим, чтобы $\operatorname{supp} v_0 \subset T_l$ и $\operatorname{supp} v \subset (0, T) \times T_l$. Тогда, очевидно,

$$\text{(VI.7.8)} \qquad \langle \gamma_0 u, v_0 \rangle = \langle \gamma_0 u, v_0 \rangle_l, \quad \{\mathcal{A}u, v\} = \{\mathcal{A}u, v\}_l.$$

Разложим $v_0(x)$ и $v(t, x)$ при $x \in T_l$ в ряды Фурье:

$$v_0(x) = \sum_{k \in \Gamma_l} \hat{v}_0(k) \exp ikx, \qquad v(t, x) = \sum_{k \in \Gamma_l} \hat{v}(t, k) \exp ikx, \quad x \in T_l.$$

Обозначим

$$v_{0,\,l} \equiv \sum_{|k| \leqslant l} \hat{v}_0(k) \exp ikx \quad \text{и} \quad v_l(t, x) \equiv \sum_{|k| \leqslant l} \hat{v}(t, k) \exp ikx.$$

Тогда, очевидно, поскольку мера μ_l сосредоточена на $\mathcal{M}_l$, а Λ_l — на $\mathcal{C}_l$,

$$\text{(VI.7.9)} \qquad \tilde{\mu}_l(\varphi_l v_{0,\,l}) = \tilde{\mu}_l(v_0) \quad \text{и} \quad \tilde{\Lambda}_l\left(-\varphi_l \frac{\partial v_l}{\partial t}\right) = \tilde{\Lambda}_l\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Кроме того, так как $v_0 \in D$ и $v \in \mathcal{V}^0 \cap \mathcal{D}$, то $\forall \theta > 0$

$$\| v_0 - v_{0,\,l} \|_{H^\theta(T_l)} = \mathcal{O}(l^{-N}) \quad \text{и} \quad \| v - v_l \|_{H^\theta((0,\,T) \times T_l)} = \mathcal{O}(l^{-N}),$$

где N — сколь угодно большое фиксированное число; поэтому при $\theta > \frac{n+1}{2} + 2$ ввиду (VI.7.8) получаем, используя оценку для $\mathcal{A}u$ типа (II.1.8):

$$| \exp(i[\langle \gamma_0 u, v_0 \rangle + \{\mathcal{A}u, v\}]) - \exp(i[\langle \gamma_0 u, v_{0,\,l} \rangle_l + \{\mathcal{A}u, v_l\}_l]) | \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\| \gamma_0 u \|_{0,\,T_l} + \int_0^T \| u(t, \cdot) \|^2_{0,\,T_l} dt + 1\right) \mathcal{O}(l^{-N}),$$

где $\| \cdot \|_{0,\,T_l}$ — норма в $[L_2(T_l)]^n$. Следовательно, из (VI.5.16) имеем:

$$\text{(VI.7.10)} \qquad \int | \exp(i[\langle \gamma_0 u, v_0 \rangle + \{\mathcal{A}u, v\}]) -$$
$$- \exp(i[\langle \gamma_0 u, v_{0,\,l} \rangle_l + \{\mathcal{A}u, v_l\}_l]) | \, P_l(du) \leqslant C(1 + l^n)\, \mathcal{O}(l^{-N}) \to 0$$

при $l \to +\infty$, если $N > n$. Отсюда, в силу галёркинского тождества (VI.5.15)

$$\text{(VI.7.11)} \qquad \lim_{l \to +\infty} \int \exp(i[\langle \gamma_0 u, v_0 \rangle + \{\mathcal{A}u, v\}])\, P_l(du) =$$
$$= \lim_{l \to \infty} \tilde{\mu}_l(\varphi_l v_{0,\,l})\, \tilde{\Lambda}_l\left(-\varphi_l \frac{\partial v_l}{\partial t}\right),$$

где $l = l_k$. Но в силу (VI.5.3), (VI.5.5) и (VI.7.9)

$$\text{(VI.7.12)} \qquad \tilde{\mu}_l(\varphi_l v_{0,\,l}) = \tilde{\mu}_l(v_0) \xrightarrow[l \to +\infty]{} \tilde{\mu}(v_0),$$
$$\tilde{\Lambda}_l\left(-\varphi_l \frac{\partial v_l}{\partial t}\right) = \tilde{\Lambda}_l\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right) \xrightarrow[l \to \infty]{} \tilde{\Lambda}\left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Из (VI.7.11) и (VI.7.12) следует лемма 7.1. ■

Наконец, из (VI.7.7) в силу леммы 7.1 получаем интегральное тождество (VI.3.13). Следовательно, п. 1) теоремы 3.1 доказан.

Для доказательства п. 2) отметим, что если п. н. $w = 0$ (т. е. $Q = 0$), то из условия $\mathfrak{A}^* P = \mu \times \mathcal{N}$ следует, что $P(W) = 1$, где $W \equiv \mathfrak{A}^{-1}(\mathcal{H}^{-s}\{0\})$. Для $u \in W$ имеем $g\mathcal{A}u = 0$ (в $\mathcal{V}^*$), откуда вытекает $\mathcal{A}u = \nabla p$ и, значит, мера P сосредоточена на пространстве W, состоящем из решений однородной системы Навье — Стокса. При этом в оценках (VI.3.11), (VI.3.12) можно взять $q = 1$ согласно замечанию 5.1. ■

§ 8. Об одном вопросе А. Н. Колмогорова

Пусть $\mu(du_0)$ — однородная начальная мера с конечной плотностью энергии (VI.1.4) и P^ν (ω) — соответствующее ей статистическое решение задачи (VI.0.1), (VI.0.2) с $f \equiv 0$ и $w \equiv 0$, где $\nu > 0$ — коэффициент вязкости. В силу п. 2) теоремы 3.1 при любом $\nu > 0$ существует такое решение $P^\nu(\omega)$.

В своем докладе на семинаре имени И. Г. Петровского А. Н. Колмогоров поставил вопрос: сходятся ли P^ν в каком-нибудь смысле к пределу при $\nu \to 0+$?

Покажем, что существует такая последовательность $\nu_j \to 0+$, что P^{ν_j} слабо сходятся при $\nu_j \to 0+$ (на некотором функциональном пространстве) к некоторой однородной по x вероятностной мере P.

Положим

$$U_R^0 \equiv L_2(0, T; \mathscr{H}_R^0) \cap BV_1(0, T; \mathscr{H}_R^{-s}),$$

где $s > s_n$, и

$$\mathscr{L}_{2,R}^{-\delta} \equiv L_2(0, T; \mathscr{H}_R^{-\delta}), \quad \delta > 0.$$

Справедлива лемма, аналогичная теореме 7.1.

Лемма 8.1. *При любом* $R > 0$ *вложение* $U_R^0 \subset \mathscr{L}_{2,R}^{-\delta}$ $(\delta > 0)$ *компактно.*

С помощью леммы 8.1 аналогично теореме 7.2 можно показать, что семейство мер $\{P^\nu\}$, $\nu > 0$, слабо компактно на пространстве $\mathscr{L}_2^{-\delta}$, если $\delta > 0$. Поэтому существует последовательность $\nu_j \to 0+$ такая, что

$$P^{\nu_j} \to P \text{ при } \nu_j \to 0+ \text{ слабо на } \mathscr{L}_2^{-\delta}. \tag{VI.8.1}$$

Теорема 8.1. *Мера* P, *определенная соотношением* (VI.8.1), *является вероятностной, однородной по* x *мерой, сосредоточенной на* $\mathscr{L}_2^0 \cap \cap BV_1(0, T; \mathscr{H}^{-s})$, *где* $s > s_n$, *и удовлетворяющей условиям*: 1) $\gamma_0^* P = \mu$; 2) *справедлива энергетическая оценка*

$$\int |u(t, x)|^2 P(du) \leqslant \bar{e}_0 \quad \forall t \in [0, T],$$

где интеграл понимается в смысле (VI.1.4); 3) *при любом* $R>0$ *справедливы оценки*

$$\int \|u\|_{BV_1^{-s}, R} P(du) \leqslant C_R(\bar{e}_0, T), \quad \int \underset{[t, \tau]}{\operatorname{osc}_R^{-s}} u P(du) \leqslant C_R^1 |t - \tau|, \quad 0 \leqslant t < \tau \leqslant T,$$

где $C_R(\bar{e}_0, T) < +\infty$ *и* $C_R^1 = C_R^1(\bar{e}_0, T) < +\infty$.

Свойства меры P, сформулированные в теореме 8.1, выводятся из соответствующих свойств статистического решения P^ν (см. определение 3.1) так же, как при доказательстве теоремы 3.1 свойства статистического решения P задачи (VI.0.1), (VI.0.2) выводились из соответствующих свойств галёркинских аппроксимаций P_l.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Арсеньев, Построение турбулентной меры для системы уравнений Навье—Стокса, ДАН **225**:1 (1975), 18—20.

[2] Л. А. Белоусов, Асимптотика при больших t коэффициентов Фурье решений двумерной системы Навье — Стокса, Вестн. МГУ, сер. матем., мех., № 1 (1977), 68—75.

[3] Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, М., Гостехиздат, 1946.

[4] A. Bensoussan, R. Temam, Équations stochastiques du type Navier—Stokes, J. Funct. Anal. **13**:2 (1973), 195—222.

[5] А. М. Вершик, О. А. Ладыженская, Об эволюции меры, определяемой уравнениями Навье — Стокса, и о разрешимости задачи Коши для уравнения Е. Хопфа, В сб. «Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций», Л., «Наука», 1976, 3—24.
[6] M. Viot, Solutions faibles d'équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires, Thése, Paris. 1976.
[7] М. И. Вишик, Аналитические решения уравнения Хопфа, соответствующего квазилинейным параболическим уравнениям или системе Навье — Стокса, В сб. «Задачи механики и математической физики», М., «Наука», 1976, 69—97.
[8] М. И. Вишик, А. И. Комеч, Бесконечномерные параболические уравнения, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями с частными производными, ДАН 233:5 (1977), 769—772.
[9] М. И. Вишик, А. И. Комеч, О прямом уравнении Колмогорова, соответствующем стохастическим параболическим уравнениям и системе Навье — Стокса, Тезисы докладов 2-й Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1977, 80—81.
[10] М. И. Вишик, А. И. Комеч, О разрешимости задачи Коши для бесконечномерных параболических уравнений, Труды сем. им. И. Г. Петровского, № 4 (1978), 3—31.
[11] М. И. Вишик, А. И. Комеч, О прямом уравнении Колмогорова, соответствующем стохастической системе Навье — Стокса, Сб. «Комплексный анализ и его приложения», К 70-летию И. Н. Векуа, М., «Наука», 1978, 126—136.
[12] М. И. Вишик, А. И. Комеч, Трансляционно-однородные решения стохастической системы Навье — Стокса, ДАН 246:5 (1979), 1037—1041.
[13] М. И. Вишик, А. И. Комеч, А. В. Фурсиков, Homogeneous stochastic solutions of the Navier-Stokes equations, International Symposium on Stochastic Differential Equations, Vilnius, 1978, 114—117.
[14] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, Аналитические первые интегралы нелинейных параболических уравнений и их приложения, Матем. сб. 92:3 (1973), 347—377.
[15] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, Аналитические первые интегралы нелинейных параболических в смысле И. Г. Петровского систем дифференциальных уравнений и их приложения, УМН 29:2 (1974), 123—153.
[16] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, Некоторые вопросы теории нелинейных эллиптических и параболических уравнений, Матем. сб. 94:2 (1974), 324 —357.
[17] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, Асимптотические разложения моментных функций решений нелинейных параболических уравнений, Матем. сб. 95:4 (1974), 590—607.
[18] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, Задача Коши для уравнения Хопфа, соответствующего параболическим уравнениям. Статистические решения и моментные функции, ДАН 227:4 (1976), 1041—1044.
[19] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, L'Équation de Hopf, les solutions statistiques, les moments correspondant aux systèmes des équations paraboliques quasilinéaires, J. Math. Pures et Apl. 56 (1977), 85—122.
[20] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, Solutions statistiques homogénes des systèmes differentiels paraboliques et du système de Navier-Stokes, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, Classe di Scienze, Serie IV, 4:3 (1977), 531—576.
[21] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, Трансляционно-однородные статистические решения и индивидуальные решения с бесконечной энергией системы уравнений Навье — Стокса, СМЖ 19:5 (1978), 1005—1031.
[22] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, Однородные по x пространственно-временные статистические решения системы Навье — Стокса и индивидуальные решения с бесконечной энергией, ДАН 239:5 (1978), 1025—1032.
[23] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., Физматгиз, 1961.

[24] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, т. I, М., «Наука», 1971.
[25] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, т. III, М., «Наука», 1975.
[26] Ю. Л. Далецкий, Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения, УМН 22:4 (1967), 3—54.
[27] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, т. I, М., ИЛ, 1962.
[28] R. C. James, A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37 (1951), 174—177.
[29] J. Dixmier, Les algèbres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Paris, Gauthiers—Villars, 1957.
[30] Ю. А. Дубинский, Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях, Матем. сб. 67 (100):4 (1965), 609—642.
[31] К. Иосида, Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.
[32] А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, УМН, вып. 5 (1938), 5—41.
[33] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М., «Наука», 1974.
[34] А. Н. Колмогоров, Замечания о статистических решениях системы Навье — Стокса, УМН 33:5 (1978), 124.
[35] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire, Ann. of Math. 38 (1937), 65—113.
[36] С. Б. Куксин, Характер зависимости от начальных условий решений нелинейных параболических уравнений, Вестн. МГУ, сер. матем. мех., № 2 (1979).
[37] О. А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., «Наука», 1970.
[38] J. Leray, Etude de divers équations intégrales non linéaire et de quelques problèmes que posent l'hydrodinamiques, J. Math. Pures et Appl., 9e série, 12 (1933), 1—82.
[39] J. Leray, Essai sur la mouvements plan d'un liquide visqueux que limitent des parois, J. Math. Pures et Appl., 9e serie 13 (1934), 331—418.
[40] Ж. Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972.
[41] Г. Маккин, Стохастические интегралы, М., «Мир», 1972.
[42] А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., «Наука», 1965.
[43] А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., «Наука», 1967.
[44] Е. А. Новиков, Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности, Журн. эксп. теор. физ. 47:5 (11) (1964), 1919—1926.
[45] E. Pardoux, Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones. Etude de solutions fortes de type Ito, Thèse, Paris, 1975, 1—236.
[46] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятн. и ее примен. 1 (1956), 177—238.
[47] M. Rosenblatt, Remarks on the Burgers equation, J. of math, physics 9:7 (1968), 1129—1136.
[48] C. Foias, Statistical study of Navier — Stokes equations, I, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova 48 (1972), 219—348.
[49] C. Foias, Statistical study of Navier — Stokes equations, II, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova, 49 (1973), 9—123.
[50] Ч. Фояш, Функциональная трактовка теории турбулентности, УМН 29:2 (1974), 282—313.
[51] Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., «Наука», 1969.

[52] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.
[53] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachrichten 4 (1950), 213—231.
[54] E. Hopf, Statistical hydrodynamics and functional calculus, J. Rat. Mech. Anal. 1 (1952), 87—123.
[55] М. А. Шубин, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., «Наука», 1978.
[56] A. Bensoussan, Filtrage optimale des systèmes linéaires, Paris, 1971.

Поступила в редакцию 10 апреля 1979 г.