



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Я. Белов, Об одной линейной стационарной задаче динамики океана,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 45–52

<https://www.mathnet.ru/mzm6838>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

27 апреля 2025 г., 12:31:41



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ОКЕАНА

Ю. Я. Белов

В монографии [1] рассмотрен ряд математических моделей динамики океана. В предположении существования гладких решений для некоторых из них доказана единственность решения, даны алгоритмы численного решения. В данной заметке рассматривается одна из моделей — линейная модель динамики океана, учитывающая ветровые течения. Однозначная разрешимость исследуемой задачи доказывается методом эллиптической регуляризации.

Обозначим через Q исследуемую область Мирового океана: $Q = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega \subset E_2, H < z < 0\}$, где Ω — область с кусочно гладкой границей σ , $z = 0$ — поверхность океана, $z = H$ — рельеф дна океана. Пусть U — пространство, полученное замыканием по норме $W_2^1(Q)$ множества функций из $C^1(\bar{Q})$, равных нулю вблизи σ , где σ — граница области Q без точек $z = 0$; V — пространство, полученное замыканием по норме $W_2^1(Q)$ множества функций из $C^1(\bar{Q})$, равных нулю вблизи поверхности $z = H$.

Для произвольной функции u из пространств U, V выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leq d \|u_x\|_{L_2(Q)}, \quad 0 < d = \text{const}, \quad (1)$$

где

$$u_x = ((\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2 + (\partial u / \partial z)^2)^{1/2}.$$

Учитывая вид области Q , неравенство (1) можно доказать аналогично неравенству Пуанкаре — Фридрихса для $u \in \dot{W}_2^1(Q)$ ¹⁾.

1. Постановка задачи.

З а д а ч а. Найти решение (u, v, w, p, ρ) системы уравнений (см. [1])

$$\begin{aligned} \mu \Delta u + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + lv &= \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu \Delta v + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - lu &= \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = g\rho, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \mu_1 \Delta \rho + \nu_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} &= \Gamma w, \end{aligned} \quad (2)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial z &= \tau_1 / (\bar{\rho} \nu), \quad \partial v / \partial z = \tau_2 / (\bar{\rho} \nu), \\ \nu_1 \partial \rho / \partial z &= \gamma, \quad w = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ u = v = w &= 0, \quad \rho = \rho_0 \quad \text{при } z = H, \\ u = v = \partial \rho / \partial n &= 0 \quad \text{на } \sigma. \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (2), (3) использованы следующие обозначения: $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — оператор Лапласа, u, v, w — компоненты вектора скорости, p — давление, ρ — плотность, τ_k ($k = 1, 2$), γ, ρ_0 — заданные функции переменных x, y ; ν, μ — коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентности, ν_1, μ_1 — коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентной диффузии плотности соответственно ($0 < \nu, \nu_1, \mu, \mu_1$ — константы), $\bar{\rho}$ — средняя по толще океана плотность воды, Γ — средний градиент плотности в океане, l — параметр Кориолиса, g — ускорение силы тяжести.

Для удобства введем следующие обозначения: $u = u_1$, $v = u_2$, $x = x_1$, $y = x_2$.

Предположим глубину рассматриваемого бассейна постоянной, $H = \text{const}$, $H < 0$. Предположим также, что функции τ_k принадлежат пространству $C^2(\bar{\Omega}) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$

¹⁾ По поводу обозначений см., например, [2], [3].

и существует функция $\hat{\rho}$ из класса $C^2(\bar{Q})$, удовлетворяющая условиям (3), т. е. $\nu_1 \partial \hat{\rho} / \partial z = \gamma$ при $z = 0$, $\hat{\rho} = \rho_0$ при $z = H$ и $\partial \hat{\rho} / \partial n = 0$ на σ .

В указанных предположениях существуют функции $\hat{u}_k \in C^2(\bar{Q})$, удовлетворяющие условиям (3) на u_k и условию

$$\int_H^0 \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} \right) dz = 0.$$

Для этого достаточно, например, взять $\hat{u}_k = [\varphi_1(z) - \varphi_2(z)] \tau_k / (\nu \bar{\rho})$, где функция $\varphi_1(z) \in C^2$, равна нулю вблизи H и $\varphi_1(0) = 1$, функция $\varphi_2(z)$ финитна в $(H, 0)$ и

$$\int_H^0 (\varphi_1 - \varphi_2) dz = 0.$$

Вследствие третьего уравнения системы (2) имеем

$$p = g \int_0^z \rho dz + \bar{\rho} \xi, \quad (4)$$

где

$$\xi = \xi(x_1, x_2) = \frac{1}{\bar{\rho}} p \Big|_{z=0}$$

— неизвестная функция. Из четвертого уравнения системы (2), учитывая условие $w|_{z=0} = 0$, получим

$$w = - \int_0^z \operatorname{div}_x u dz. \quad (5)$$

Здесь

$$\operatorname{div}_x u = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2.$$

Подставив (4), (5) в соответствующие уравнения системы (2) и сделав замену

$$u'_k = u_k - \hat{u}_k, \quad \rho' = \rho - \hat{\rho}, \quad (6)$$

сведем задачу (2), (3) к задаче

$$\begin{aligned} \mu \Delta u_k + \nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + (-1)^{k+1} u_{3-k} = \\ = \frac{g}{\bar{\rho}} \int_0^z \frac{\partial \rho}{\partial x_k} dz + \frac{\partial \xi}{\partial x_k} + f_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\int_H^0 \operatorname{div}_x u dz = 0, \quad (8)$$

$$\mu_1 \Delta \rho + \nu_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \Gamma \int_0^z \operatorname{div}_x u \, dz = f_3, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial u_k / \partial z &= \partial \rho / \partial z = 0 && \text{при } z = 0, \\ u_k = \rho &= 0 && \text{при } z = H, \\ u_k = \partial \rho / \partial n &= 0 && \text{на } \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь

$$f_k = -\mu \Delta \hat{u}_k - \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial z^2} + (-1)^k l \hat{u}_{3-k} + \frac{g}{\rho} \int_0^z \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_k} \, dz,$$

$$f_3 = -\mu_1 \Delta \hat{\rho} - \nu_1 \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial z^2} - \Gamma \int_0^z \operatorname{div}_x \hat{u} \, dz$$

и для удобства обозначения опущен штрих у неизвестных u_k, ρ .

Пусть \mathfrak{M} — линейное подпространство пространства $(U')^2$, состоящее из элементов L , удовлетворяющих условию: $\langle L, \varphi \rangle = 0$ для всех $\varphi \in U^2$ таких, что

$$\int_H^0 \operatorname{div}_x \varphi \, dz = 0$$

($\langle L, \varphi \rangle$ — значение $L \in (U')^2$ на $\varphi \in U^2$);

$\mathfrak{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, \rho, L) \mid u \in (W_2^1(Q))^2, \rho \in W_2^1(Q), L \in (U')^2\}$, и пусть \mathfrak{M}^0 — подпространство пространства \mathfrak{M} , определенное следующим образом:

$$\mathfrak{M}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, \rho, L) \mid u \in U^2, \rho \in V, L \in \mathfrak{M}\}.$$

Введем билинейные формы

$$a(u, \varphi) = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{(L_2(Q))^2} + \mu \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)_{(L_2(Q))^2} + \\ + l \sum_{k=1}^2 (-1)^k (u_{3-k}, \varphi_k)_{L_2(Q)},$$

$$b(\rho, \chi) = \nu_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}, \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_{L_2(Q)} + \mu_1 \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k}, \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \right)_{L_2(Q)},$$

определенные на $(W_2^1(Q))^2$ и $W_2^1(Q)$ соответственно ¹⁾.

¹⁾ $(\rho, \chi)_{L_2(Q)} = \int_H^0 \left\{ \int_{\Omega} \rho \chi \, dx_1 dx_2 \right\} dz.$

О п р е д е л е н и е. Решением задачи (7) — (10) в классе \mathfrak{M} назовем такой элемент (u, ρ, L) из \mathfrak{M}^0 , что

$$\int_H^0 \operatorname{div}_x u \, dz = 0 \quad (11)$$

и тождества

$$a(u, \varphi) = \frac{g}{\bar{p}} \left(\int_0^z \rho \, dz, \operatorname{div}_x \varphi \right)_{L_2(Q)} - \langle L, \varphi \rangle - (f, \varphi)_{(L_2(Q))^2}, \quad (12)$$

$$b(\rho, \chi) - \Gamma \left(\int_0^z \operatorname{div}_x u \, dz, \chi \right)_{L_2(Q)} + (f_3, \chi)_{L_2(Q)} = 0 \quad (13)$$

выполняются для всех $\varphi \in U^2$, $\chi \in V$. Здесь $f = (f_1, f_2)$.

З а м е ч а н и е 1. Из принадлежности L подпространству \mathfrak{R} следует, что, отождествив L с распределением из $(D'(Q))^2$, можно записать

$$L = \operatorname{grad}_x \xi \quad \text{и} \quad \partial \xi / \partial z = 0, \quad (14)$$

где $\xi \in D'(Q)$, $\operatorname{grad}_x \xi = (\partial \xi / \partial x_1, \partial \xi / \partial x_2)$. Действительно, так как

$$\hat{L} = (L_1, L_2, 0) \quad (15)$$

принадлежит $(W^{-1}(Q))^3$ (вследствие вложения U' в $W^{-1}(Q)$) и обращается в нуль на множестве всех соленоидальных и финитных в Q векторов $\hat{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, то (см. [4])

$$\hat{L} = (\partial \xi / \partial x_1, \partial \xi / \partial x_2, \partial \xi / \partial z), \quad \xi \in D'(Q). \quad (16)$$

Из (15), (16) следует (14).

З а м е ч а н и е 2. Учитывая замечание 1, данное выше определение можно заменить ему эквивалентным. Именно, можно считать, что u, ρ, ξ принадлежат $U^2, V, D'(Q)$ соответственно и удовлетворяют системе (7) — (9), в смысле теории распределений (см., например, [3], [4]), причем элемент $(\partial \xi / \partial x_1, \partial \xi / \partial x_2)$ принадлежит \mathfrak{R} .

З а м е ч а н и е 3. Так как $w|_{z=0} = 0, w|_{z=H} = 0$, то (см. замену (5)) последнее условие учитывается в задаче (7) — (10) в виде соотношения (8).

2. Теоремы существования и единственности. Аппроксимируем задачу (7) — (10) задачей

$$\begin{aligned} \mu \Delta v_k^e + \nu \frac{\partial^2 v_k^e}{\partial z^2} + (-1)^{k+1} l v_{3-k}^e = \\ = \frac{g}{\bar{p}} \int_0^z \frac{\partial \rho^e}{\partial x_k} \, dz + \frac{\partial \xi^e}{\partial x_k} + f_k, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\int_0^H \operatorname{div}_x v^\varepsilon dz + \varepsilon \Delta \xi^\varepsilon = 0, \quad (18)$$

$$\mu_1 \Delta \rho^\varepsilon + \nu_1 \frac{\partial^2 \rho^\varepsilon}{\partial z^2} + \Gamma \int_0^z \operatorname{div}_x v^\varepsilon dz = f_3 - \Gamma \int_H^0 \operatorname{div}_x v^\varepsilon dz, \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial v_k^\varepsilon / \partial z = \partial \rho^\varepsilon / \partial z = 0 & \text{ при } z = 0, \\ v_k^\varepsilon = \rho^\varepsilon = 0 & \text{ при } z = H, \\ v_k^\varepsilon = \partial \rho^\varepsilon / \partial n = 0 & \text{ на } \sigma, \\ \xi^\varepsilon = 0 & \text{ на } \partial \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

О п р е д е л е н и е. Решением задачи (17) — (20) назовем такой вектор $(v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$, что $v^\varepsilon \in U^2$, $\rho^\varepsilon \in V$, $\xi^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ и тождества

$$a(v^\varepsilon, \varphi) = \frac{g}{\bar{\rho}} \left(\int_0^z \rho^\varepsilon dz, \operatorname{div}_x \varphi \right)_{L_2(Q)} - (\operatorname{grad}_x \xi^\varepsilon, \varphi)_{(L_2(Q))^2} - (f, \varphi)_{(L_2(Q))^2}, \quad (21)$$

$$\left(\int_0^H \operatorname{div}_x v^\varepsilon dz, \psi \right)_{L_2(\Omega)} - \varepsilon \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_k}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad (22)$$

$$b(\rho^\varepsilon, \chi) - \Gamma \left(\int_0^z \operatorname{div}_x v^\varepsilon dz + \int_H^0 \operatorname{div}_x v^\varepsilon dz, \chi \right)_{L_2(Q)} + (f_3, \chi)_{L_2(Q)} = 0 \quad (23)$$

выполняются для всех $\varphi \in U^2$, $\psi \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$, $\chi \in V$.

Решение $(u^\varepsilon, \rho^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$ задачи (17) — (20) удовлетворяет неравенству

$$\|v^\varepsilon\|_{U^2} + \|\rho^\varepsilon\|_V + \sqrt{\varepsilon} \|\xi^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c (\|f\|_{(L_2(Q))^2}^2 + \|f_3\|_{L_2(Q)}^2)^{1/2}, \quad (24)$$

где постоянная c зависит лишь от $\alpha, d, g, \bar{\rho}, \Gamma$ и не зависит от ε .

Неравенство (24) нетрудно получить, если положить $\varphi = v^\varepsilon$, $\psi = \xi^\varepsilon$, $\chi = g\rho^\varepsilon/\bar{\rho}\Gamma$ в формулах (21), (22), (23) соответственно, а затем сложить полученные результаты, учитывая при этом неравенство (1) и интегрируя по частям члены

$$\left(\int_0^z \operatorname{grad}_x \rho^\varepsilon dz, v^\varepsilon \right)_{(L_2(Q))^2} \text{ и } (\operatorname{grad}_x \xi^\varepsilon, v^\varepsilon)_{(L_2(Q))^2}.$$

Вследствие неравенства (24) легко доказывается, например, методом Галеркина следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Решение $(v^{\varepsilon}, \rho^{\varepsilon}, \xi^{\varepsilon})$ задачи (17) — (20) существует и единственно.*

Из неравенства (24) вытекает существование подпоследовательности ε_k ($\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$) такой, что

$$v^{\varepsilon_k} \rightarrow u \text{ слабо в } U^2, \quad (25)$$

$$\rho^{\varepsilon_k} \rightarrow \rho \text{ слабо в } V. \quad (26)$$

Из условий (21), (25), (26) следует, что

$$\text{grad}_x \xi^{\varepsilon_k} \rightarrow L$$

слабо в $(U')^2$. Легко видеть, что L принадлежит \mathfrak{M} и u, ρ, L удовлетворяют тождеству (12). Вследствие ограниченности $\sqrt{\varepsilon} \|\xi^{\varepsilon}\|_{W^1_2(\Omega)}$ (см. (24)), переходя в (22) к пределу по ε_k , получим, что

$$\left(\int_0^H \text{div}_x u \, dz, \psi \right)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Так как ψ произвольно, то выполняется соотношение (11). Отсюда ясно, что u, ρ удовлетворяют условию (13). Следовательно, (u, ρ, L) есть решение задачи (7) — (10).

Возьмем $\varphi = u, \chi = g\rho/(\bar{\rho}\Gamma)$ в формулах (12), (13) соответственно и сложим полученные результаты. Учитывая принадлежность L пространству \mathfrak{M} (т. е. соотношение $\langle\langle L, u \rangle\rangle = 0$), получим неравенство

$$\|u\|_{U^2} + \|\rho\|_V \leq c (\|f\|_{L_2(Q)}^2 + \|f_3\|_{L_2(Q)}^2)^{1/2},$$

откуда следует единственность компонент u, ρ решения задачи (7) — (10), а значит, и единственность L . Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 2. *Решение задачи (7) — (10) существует и единственно в классе \mathfrak{M} .*

С учетом замечаний 1, 2 имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Решение (u, ρ, ξ) задачи (7) — (10) в пространстве $(W^1_2(Q))^2 \times W^1_2(Q) \times D'(Q)$ существует. Компоненты u, ρ определяются единственным образом, компонента ξ определяется с точностью до аддитивной постоянной.*

Красноярский государственный университет

Поступило
6.X.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] М а р ч у к Г. И., Численное решение задач динамики атмосферы и океана, Л., Гидрометеиздат, 1974.
- [2] Л а д ы ж е н с к а я О. А., Краевые задачи математической физики, М., «Наука», 1973.
- [3] Л и о н с Ж.-Л., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, М., «Мир», 1972.
- [4] Л и о н с Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972.