М. В. Коровина, О разрешимости задачи Коши на флаге для переопределенных систем нелинейных дифференциальных уравнений,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 11, 1988–1993

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.95

М. В. КОРОВИНА

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ НА ФЛАГЕ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Постановка задачи. Формулировка основной теоремы. Работа посвящена доказательству теоремы разрешимости задачи Коши на флаге в пространстве голоморфных функций, которая в некотором смысле является обобщением теоремы Коши — Ковалевской (см. [1] и библиографию к ней) на случай переопределенных систем нелинейных дифференциальных уравнений. В работах [2, 3] рассмотрен случай задачи Коши на флаге для переопределенных систем линейных дифференциальных уравнений в пространстве голоморфных функций и доказаны соответствующие теоремы формальной и реальной разрешимости. В данной работе, посвященной нелинейным системам уравнений, мы не будем специально касаться вопросов формальной разрешимости. Именно разрешимость (здесь и далее под разрешимостью понимается реальная разрешимость) задачи Коши на флаге проводится в предположении о формальной разрешимости этой задачи.

Вначале напомним постановку задачи Коши на флаге [2].

Рассмотрим комплексно-аналитическое многообразие M размерности k. Через $O_m(M)$ будем обозначать кольцо ростков голоморфных функций в точке m, а через $\mu(m)$ — максимальный идеал кольца $O_m(M)$ ростков функций, обращающихся в точке m в нуль.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathcal{F}(j^n(u(x)))=f(x), \tag{1}$$

где $u(x)=u(x_1, \dots, x_k)$ — голоморфная вектор-функция, n — порядок системы, $f(x)$ — вектор-столбец длины l (здесь l — количество уравнений в системе), $\mathcal{F}: J^n \to C^l$ — некоторый оператор, отображающий пространство джетов порядка n в вектор голоморфных функций, $j^n(u(x))$ — джет функции $u(x)$.

Пусть задана последовательность целых чисел p: $0<p_s<p_{s-1}<\dots$ $\dots<p_1=n-1$.

Рассмотрим флаг, т. е. последовательность вложенных аналитических многообразий $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_s$.

Выберем в окрестности точки m такую локальную систему координат, что многообразия $N_1, \dots, N_s$ являются координатными, т. е.

$$N_s=\{x \mid x_1=\dots=x_{\nu_s}=0\},\ N_{s-1}=\{x \mid x_1=\dots=x_{\nu_{s-1}}=0\}, \dots, N_1=$$
$$=\{x \mid x_1=\dots=x_{\nu_1}=0\},$$

где $0<\nu_s<\nu_{s-1}<\dots<\nu_1<k$ — последовательность целых чисел.

Напомним, что пространством джетов $J^p_N=J^p_N(M)$ на флаге N называется фактор-пространство $J^p_N=O_{N_s}/\mu^p_N$, где $\mu^p_N=\mu^{p_s}_{N_s}\mu^{p_{s-1}-p_s}_{N_{s-1}}\dots$ $\dots\mu^{p_1-p_2}_{N_1}$.

Присоединим к системе (1) дополнительные условия (данные Коши) на вектор-функцию $u(x)$, задав джет функции $u(x)$ на флаге. Получим задачу

$$\mathscr{F}(j^n(u(x)))=f(x), \tag{2}$$

$$j_N^p(u(x))=v, \tag{3}$$

где v — некоторый элемент из $J_N^p(M)$.

Задача (2), (3) называется задачей Коши для системы дифференциальных уравнений на флаге N.

Введем конечномерное фактор-пространство

$$J_{m,N}^{n,p}=O_{N_s}(M)/(\mu_N^p+\mu_m^{n+1}). \tag{4}$$

Очевидно, пространство (4) есть пространство всех производных функции $u(x)$ порядка меньше $n+1$, которые могут быть вычислены из данных Коши.

Рассмотрим проекцию $J_m^n \xrightarrow{\pi} J_{m,N}^{n,p}$.

Обозначим через $\tilde{\mathscr{F}}$ — сужение оператора $\mathscr{F}$ на прообраз данных Коши при проекции π:

$$\tilde{\mathscr{F}}=\mathscr{F}\,|\,\pi^{-1}(v).$$

Пусть $\tilde{\mathscr{F}}_*$ — касательное отображение к отображению $\tilde{\mathscr{F}}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть задача (2), (3) разрешима в формальных рядах. Тогда если оператор $\tilde{\mathscr{F}}_*$ является мономорфизмом, то существует голоморфное решение этой задачи в некоторой окрестности начала координат.*

2. Доказательство теоремы для квазилинейных систем. Рассмотрим сначала случай переопределенных квазилинейных систем дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant n} a^{\tau}_{\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2}(x',x'',D^{\bar{\beta}}_{x},D^{\bar{\gamma}}_{x''}u)\,D^{\bar{\alpha}_1}_{x'}D^{\bar{\alpha}_2}_{x''}u=$$
$$=P^{\tau}(x',x'',D^{\bar{\beta}}_{x'}D^{\bar{\gamma}}_{x''}u),\quad \tau=1,\ldots,l,$$

где l — количество уравнений в системе. Здесь через x' обозначены переменные, касательные к N_1, а через x'' — трансверсальные к N_1, т. е. $x'=(x_{\nu_1+1},\ldots,x_k)$, $x''=(x_1,\ldots,x_{\nu_1})$, $a^{\tau}_{\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2}(x',x'',p_{\bar{\beta}\bar{\gamma}})$, $P^{\tau}(x',x'',p_{\bar{\beta}\bar{\gamma}})$ — голоморфные функции от переменных x', x'' и $p_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}$, где $p_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}$, $|\bar{\beta}|+|\bar{\gamma}|\leqslant n-1$ — координаты в пространстве джетов порядка $n-1$, $\bar{\beta}=(\beta_{\nu_1+1},\ldots,\beta_k)$, $\bar{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_{\nu_1})$, $\bar{\alpha}_1=(\alpha_{\nu_1+1},\ldots,\alpha_k)$, $\bar{\alpha}_2=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1})$ — мультииндексы.

Перенесем в правую часть системы слагаемые с производными, которые в точке m определяются из условий Коши. Получим

$$\sum_{(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)\notin\mathscr{A}} a^{\tau}_{\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2}(x',x'',D^{\bar{\beta}}_{x'}D^{\bar{\gamma}}_{x''}u)\,D^{\bar{\alpha}_1}_{x'}D^{\bar{\alpha}_2}_{x''}u=$$
$$=\sum_{(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)\in\mathscr{A}} a_{\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2}(x',x'',D^{\bar{\beta}}_{x'}D^{\bar{\gamma}}_{x''}u)\,D^{\bar{\alpha}_1}_{x'}D^{\bar{\alpha}_2}_{x''}u+$$
$$+P^{\tau}(x',x'',D^{\bar{\beta}}_{x'}D^{\bar{\gamma}}_{x''}u),$$

где $\mathscr{A}$ — множество пар мультииндексов $(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)$, $|\bar{\alpha}_1|+|\bar{\alpha}_2|=n$, для которых соответствующие производные выражаются из условий Коши. Разрешим эту систему относительно старших производных, стоящих в ее левой части. Это возможно, поскольку по условию теоремы оператор $\tilde{\mathscr{F}}_*$ является мономорфизмом. Получим

$$D^{\bar{\alpha}_1}_{x'}D^{\bar{\alpha}_2}_{x''}u=\sum_{|\bar{\delta}_1|+|\bar{\delta}_2|\in\mathscr{A}} F^{\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2}_{\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2}(x',x'',D^{\bar{\beta}}_{x'}D^{\bar{\gamma}}_{x''}u)\,D^{\bar{\delta}_1}_{x'}D^{\bar{\delta}_2}_{x''}u+$$

$$+P^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}(x', x'', D^{\bar\beta}_{x'} D^{\bar\gamma}_{x''} u), \quad \bar\alpha_1, \bar\alpha_2 \notin \mathscr{A}. \tag{5}$$

Условия Коши для этой системы имеют вид $j^{p_1}_{N_1}(u)=0$, $j^{p_2}_{N_2}(u)=0, \ldots$ $\ldots, j^{p_s}_{N_s}(u)=0$.

Доказательство теоремы будем проводить методом мажорант. Пусть функция $\Phi^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}(x', x'', p_{\bar\beta\bar\gamma})$ является мажорантой одновременно для всех функций F и P, т. е. $F^{\tau}_{k,p}$ и P^{τ};

$$F^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}_{\bar\delta_1,\bar\delta_2}(x', x'', D^{\bar\beta}_{x'} D^{\bar\gamma}_{x''} u) \prec \Phi^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}(x', x'', D^{\bar\beta}_{x'} D^{\bar\gamma}_{x''} u),$$
$$P^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}(x', x'', D^{\bar\beta}_{x'} D^{\bar\gamma}_{x''} u) \prec \Phi^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}(x', x'', D^{\bar\beta}_{x'} D^{\bar\gamma}_{x''} u).$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$D^{\bar\alpha_1}_{x'} D^{\bar\alpha_2}_{x''} w = \Phi^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}(x', x'', D^{\bar\beta}_{x'} D^{\bar\gamma}_{x''} w)\Big(\sum_{|k|+|p|\in\mathscr{A}} D^k_{x'} D^p_{x''} w + 1\Big), \tag{6}$$

$(\bar\alpha_1, \bar\alpha_2) \notin \mathscr{A}$, со следующими данными Коши: $j^{p_1}_{N_1}(w)=0, \ldots, j^{p_s}_{N_s}(w)=0$. Докажем, что функция w, удовлетворяющая уравнению (6), мажорирует u. Продифференцируем $D^{\bar\alpha_1}_{x'} D^{\bar\alpha_2}_{x''} u$ по x. Тогда из равенства (5) следует, что

$$D^{\sigma}_{x} D^{\bar\alpha_1}_{x'} D^{\bar\alpha_2}_{x''} u\,|_{x=0} = L^{\sigma,\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}[F, P, u], \tag{7}$$

где $L^{\sigma,\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}[F, P, u]$ представляют собой многочлены с положительными коэффициентами от функций $F^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}_{\bar\delta_1,\bar\delta_2}$, $P^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}$, u и их производных, причем порядок производных функции $u(x)$ в правой части последнего соотношения не превосходит $|\sigma|-1$.

Прежде всего очевидно, что все производные функции u порядка, меньшего или равного $n-1$, оцениваются через соответствующие производные функции w. Далее, из соотношений (5), (6) очевидно, что то же самое имеет место и для всех производных порядка n.

Соотношение (7) позволяет теперь доказать по индукции, что функция w мажорирует решение u задачи (2), (3), т. е. любая производная функции $u(x)$ оценивается соответствующей производной функции $w(x)$.

Пусть r — минимальный радиус аналитичности для $F^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}_{\bar\delta_1,\bar\delta_2}$ и $P^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}$. Тогда при некоторых постоянных $M^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}$ будет выполнено:

$$\Phi^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}(x', x'', D^{\beta}_{x'} D^{j}_{x''} u) = M^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}\Big[1 - r^{-1}\Big(x_{\nu+1} + \ldots$$
$$\ldots + x_k + \rho\sum_{i=1}^{\nu} x_i + \sum_{|\beta|+|j|<n} D^{\beta}_{x'} D^{j}_{x''} u\Big)\Big]^{-1};$$

здесь ρ — некоторая постоянная $\rho > 1$.

Полагая $s = r^{-1}\big(x_{\nu+1} + \ldots + x_k + \rho\sum_{i=1}^{\nu} x_i\big)$, перепишем систему (6) в виде

$$\frac{\rho^{|\alpha_2|}}{r^n} w^{(n)} = M^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}\Big(1 - s - \sum_{|\beta|+|j|<n} \frac{\rho^{|\beta|}}{r^{|\beta|+|j|+1}} w^{(|\beta|+|j|)}\Big)^{-1} \times$$
$$\times \Big(\sum_{p} \frac{\rho^{|p|}}{r^n} w^{(n)} + 1\Big).$$

Решая полученную систему относительно $w^{(n)}$, получим

$$w^{(n)} = \frac{r^n}{\rho^{|\alpha_2|}} M^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}\Big(1 - s - \sum_{|\beta|+|j|<n} \frac{\rho^{|\beta|}}{r^{|\beta|+|j|+1}} w^{(|\beta|+|j|)} -$$
$$- M^{\bar\alpha_1,\bar\alpha_2}\sum \rho^{|p|-|\alpha_2|}\Big)^{-1}.$$

Поскольку в силу условий Коши все производные $D^k_x w$ при $|k|<n$ на

N_1 равны нулю, то все производные функции w по s до порядка $n-1$ равны нулю. Теперь, взяв достаточно большое число $\bar{M}$, в некоторой окрестности начала координат, а именно при

$$|s|<1-\bar{M}\sum_p \rho^{|p|-|\alpha_2|},\quad \bar{M}=\max_{(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)\notin\mathscr{A}}(M^{\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2}),$$

можно заключить, что существует голоморфное решение системы при достаточно малом ρ.

Доказательство теоремы для квазилинейного случая завершено.

3. Доказательство теоремы для общих нелинейных систем. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\Phi^\tau(u, D_x^1 u, \dots, D_x^\alpha u, \dots, D_x^n u, x)=0,\quad \tau=1, 2, \dots, l, \tag{8}$$

с условиями Коши на флаге (для простоты)*) двух вложенных многообразий N:

$$N_1:\{x_1=\dots x_{\nu_1}=0\},\ N_2:\{x_1=\dots x_{\nu_2-1}\},\ N=\{N_1\subset N_2\}.$$

Здесь, очевидно, $\nu_2-1<\nu_1$. Условия Коши для системы (8) имеют вид

$$j_{N_1}^{n-1}(u(x))=0,\ j_{N_2}^{p_2}(u(x))=0. \tag{9}$$

Напомним [1], что дифференциальным уравнением порядка n на расслоении E называется гладкое подрасслоение $R_n\subset J_n(E)$. Сечение $s\in\Gamma(U,E)$ называется решением дифференциального уравнения R_n, если $j_n(s)\in\Gamma(U,R_n)$. Совокупность решений обозначается через $s(R_n)$ (см. [4]).

Определение 2. Продолжением задачи Коши (2), (3) называется задача

$$D_x\mathscr{F}\,(j^n(u(x)))=D_xf(x),\ j_N^{p+1}(u)=\tilde{v}_1, \tag{10}$$

где джет $\tilde{v}_1$ определяется по задаче (8), (9) способом, описанным ниже.

Задача (10) получается путем дифференцирования системы (8) по всем переменным x_i, $i=1,\dots,k$, иными словами, это система $D_{x_i}\Phi^\tau(u, D_xu, \dots, D_x^\alpha u, \dots, D_x^n u, x)=0$, $\tau=1,\dots,l$.

Таким образом, продолжением задачи (8), (9) назовем задачу (10) с условиями Коши на флаге $j_{N_1}^n(u(x))=v_1$, $j_{N_2}^{p_2+1}(u(x))=v_2$.

Покажем теперь, каким образом из задачи (8), (9) могут быть получены данные Коши задачи (10).

Лемма 1. *Если в задаче (2), (3) оператор $\tilde{\mathscr{F}}_*$ является мономорфизмом, то джет $\tilde{v}_1$, входящий в данные Коши задачи (10), определяется задачей (8), (9) однозначно.*

Доказательство. Продифференцировав систему (2) по всем переменным, получим систему (10). Таким образом, имеем систему квазилинейных дифференциальных уравнений порядка $n+1$ с данными Коши на флаге N. Найдем продолжение условий Коши на флаге. Так как джеты $j_{N_1}^{n-1}(u(x))$ и $j_{N_2}^{p_2}(u(x))$ определяются из условий Коши на флаге, то очевидно, что для определения джетов $j_{N_1}^n(u(x))$ и $j_{N_2}^{p_2+1}(u(x))$ достаточно определить все старшие производные на N_1 и все производные порядка p_2+1 на N_2.

Введем новые обозначения. Через x'' будем обозначать переменные, трансверсальные к N_2, через x' — касательные к N_2 и трансверсальные к N_1, через $\bar{x}$ — касательные к N_1. Иными словами, $x''=\{x_1,\dots,x_{\nu_2-1}\}$, $x'=\{x_{\nu_2},\dots,x_{\nu_1}\}$, $\bar{x}=\{x_{\nu_1+1},\dots,x_k\}$.

Определим все производные порядка n на подмногообразии N_1, т. е. производные вида $D_{x''}^{l_1}D_{x'}^{l_2}u(0,x)$, $|l_1|+|l_2|=n$. Положим $x_1=\dots=x_{\nu_1-1}=$

*) Случай флага, состоящего из произвольного числа многообразий, доказывается аналогично.

$=0$. Тогда все функции, кроме старших производных $D^n_{x''}u$, т. е. $D^p_{x''}D^l_{x'}D^{l_1}_{\bar{x}}$, $|p|+|l|+|l_1|=n$, $|p|\neq n$, будут определяться из системы. Далее, поскольку оператор $\tilde{\mathcal{F}}_*$ является мономорфизмом, то по теореме о неявной функции находим все старшие производные.

Теперь найдем производные порядка p_2+1 на многообразии N_2. Положим $x_1=\ldots=x_{\nu_1-1}=0$. Очевидно, что производные вида $D^{k_1}_{x''}D^{k_2}_{x'}D^{k_3}_{\bar{x}}u$ определены при $k_1<p_2$ на всем N_2 из условий Коши. Решим систему, как и ранее, относительно тех старших производных, которые не определяются из условий Коши ни в одной точке, иными словами, относительно производных $D^l_{x_{\nu_1}}D^p_{x''}u$, $|l|+|p|=n$, $|p|>|p_2|$, которые выражаются через производные вида $D^p_{x''}D^{l_2}_{\bar{x}}u$, $n\geqslant|p|>|p_2|$, $|l_2|+|p|\leqslant n$ (последние определяются на многообразии N_1 из условий Коши, а на многообразии N_2 — из системы):

$$D_{x_{\nu_1}}D^{n-1}_{x''}u=f^1(D^{l_2}_{\bar{x}}D^p_{x''}u, 0, x_{\nu_1}, \ldots, x_k),\ D^2_{x_{\nu_1}}D^{n-2}_{x''}u=$$
$$=f^2(D^{l_2}_{\bar{x}}D^p_{x''}u, 0, x_{\nu_1}, \ldots, x_k), \ldots, D^{n-p_2-1}_{x_{\nu_1}}D^{p_2+1}_{x''}u= \tag{11}$$
$$=f^{n-p_2-1}(D^{l_2}_{\bar{x}}D^p_{x''}u, 0, x_{\nu_1}, \ldots, x_k).$$

Обозначим через u_i производные $D^i_{x''}u$. Перепишем систему (11) в виде

$$D^1_{x_{\nu_1}}u_{n-1}(0, x_{\nu_1}, \bar{x})=f^1(D^{l_2}_{\bar{x}}u_p, 0, x_{\nu_1}, \bar{x}), \ldots$$
$$\ldots, D^{n-p_2-1}_{x_{\nu_1}}u_{p_2+1}(0, x_{\nu_1}, \bar{x})=f^{n-p_2-1}(D^{l_2}_{\bar{x}}u_p, 0, x_{\nu_1}, \bar{x}). \tag{12}$$

Итак, имеем систему уравнений относительно неизвестных функций $u_{p_2+1}, \ldots, u_{n-1}$. Количество уравнений, очевидно, равно числу неизвестных функций. Из данных Коши (9) следуют равенства

$$u_{n-1}(0, 0, \bar{x})=0,\ u_{n-2}(0, 0, \bar{x})=0, \ldots, u_{p_2+1}(0, 0, \bar{x})=0;$$
$$D^1_{x_{\nu_1}}u_{n-2}(0, 0, \bar{x})=0, \ldots, D^1_{x_{\nu_1}}u_{p_2+1}(0, 0, \bar{x})= \tag{13}$$
$$=0; \ldots; D^{n-p_2-2}_{x_{\nu_1}}u_{p_2+1}(0, 0, \bar{x})=0,$$

так как система равенств (13) эквивалентна системе условий

$$D^{n-1}_{x''}u(0, 0, \bar{x})=0,\ D^{n-2}_{x''}u(0, 0, \bar{x})=0, \ldots, D^{p_2+1}_{x''}u(0, 0, \bar{x})=0;$$
$$D^1_{x_{\nu_1}}D^{n-2}_{x''}u(0, 0, \bar{x})=0, \ldots, D^1_{x_{\nu_1}}D^{p_2+1}_{x''}u(0, 0, \bar{x})=0; \ldots$$
$$\ldots; D^{n-p_2-2}_{x_{\nu_1}}D^{p_2+1}_{x''}u(0, 0, \bar{x})=0,$$

которые прямо следуют из данных Коши.

Таким образом, получена классическая задача Коши (12), (13) с условиями Коши на подмногообразии коразмерности 1. Решая эту систему, найдем все производные до порядка n на многообразии $\{x_1=\ldots=x_{\nu_1-2}=0\}$, затем, повторяя проделанную процедуру, найдем все производные до порядка n на многообразиях $\{x_1=\ldots=x_{\nu_1-2}=0\}$, $\{x_1=\ldots=x_{\nu_1-3}=0\}$ и т. д. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Задача Коши на флаге эквивалентна своему продолжению в том смысле, что их решения совпадают.*

Доказательство. Из изложенного следует, что продолжение задачи Коши на флаге является ее следствием. Докажем, что и обратно задача Коши является следствием своего продолжения.

Рассмотрим продолженную систему (10) и проинтегрируем первую систему по x_1, вторую — по x_2, k-ю — по x_k. Тогда получим

$$\Phi^\tau(x_1, \ldots, x_{\nu_1}, \bar{x}, D^\alpha_x u)=C^\tau_1(x_2, \ldots, x_k),\ \Phi^\tau(x_1, \ldots, x_{\nu_1}, \bar{x}, D^\alpha_x u)=$$
$$=C^\tau_2(x_1, x_3, \ldots, x_k), \ldots, \Phi^\tau(x_1, \ldots, x_{\nu_1}, \bar{x}, D^\alpha_x u)=C^\tau_k(x_2, \ldots, x_{k-1}).$$

Поскольку $C^\tau_1(x_2, x_3, \ldots, x_k)=C^\tau_2(x_1, x_3, \ldots, x_k)=C^\tau_k(x_1, \ldots, x_{k-1})$, то $C^\tau_i(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_k)=\mathrm{const}$, $i=1, \ldots, k$.

Положим $x_1 = \dots x_{\nu_1} = 0$. Так как все производные определены из продолженных условий Коши, то, подставляя данные Коши в систему, получим, что $C_i^\tau(0, \dots, 0, \bar{x}) = 0$. Отсюда $C_i^\tau = 0$. Лемма 2 доказана.

Из лемм 2 и 1 следует, что задача Коши на флаге для системы нелинейных уравнений эквивалентна задаче Коши для системы квазилинейных уравнений. Для доказательства теоремы осталось установить, что соответствующий оператор полученного квазилинейного уравнения является мономорфизмом. Очевидно, что оператору $\tilde{\mathcal{F}}_*$ соответствует матрица вида

$$\begin{vmatrix} D_{u_x^{(n)}}\Phi^1 & D_{u_{x_1x_2}^{(n-1,1)}}\Phi^1 & \dots & D_{u_{x_k}^{(n)}}\Phi^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{u_x^{(n)}}\Phi^l & D_{u_{x_1x_2}^{(n-1,1)}}\Phi^l & \dots & D_{u_{x_k}^{(n)}}\Phi^l \end{vmatrix}.$$

Вычисляя в явном виде матрицу оператора $\tilde{\mathcal{F}}_*$, отвечающего продолженной задаче (10), легко показать, что этот оператор является мономорфизмом.

Доказательство теоремы завершено.

Литература

1. Поммаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М., 1983.
2. Коровина М. В. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 75—85.
3. Коровина М. В. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 163—164.
4. Guillemin V. // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. P. 270—284.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 24 сентября 1993 г.