А.В.Соболев

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

§ I. Введение

Полное сечение рассеяния на потенциале $gV(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, квантовой частицы с энергией κ^2 при условии

$$V(x) = O(|x|^{-\alpha}),\ 2\alpha > m+1, \qquad (I.I)$$

конечно. Полное сечение, проинтегрированное по направлению падения частиц, обозначается через $\sigma(\kappa, gV)$ (точное определение см. в § 2) и также называется полным сечением рассеяния. Известные результаты о поведении $\sigma(\kappa, gV)$ при $\kappa \to \infty$, $g \to \infty$, $N := g\kappa^{-1} \to \infty$ обсуждались в статье [I]. Подчеркнем здесь еще раз, что характер асимптотики сечения рассеяния существенно зависит от поведения $V(x)$ при $|x| \to \infty$. Так для потенциалов со степенной асимптотикой

$$V(x) = \varphi(x/|x|)\,|x|^{-\alpha} + O(|x|^{-\alpha}),\ |x| \to \infty, \qquad (I.2)$$
$$\varphi \in C(\mathbb{S}),\quad \mathbb{S} = \{x : |x| = 1\},$$

в статье [2] было высказано предположение, что асимптотика при $N \to \infty$ сечения рассеяния может быть найдена следующим образом. Пусть Λ_ω – ортогональное дополнение вектора $\omega \in \mathbb{S}$ в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{S}^\omega = \Lambda_\omega \cap \mathbb{S}$. Положим $\varkappa = (m-1)(\alpha-1)^{-1}$,

$$\theta_\alpha = 2^{-\varkappa-1}\pi\,[\Gamma(\varkappa)\sin(\pi\varkappa/2)]^{-1} \times \qquad (I.3)$$
$$\times \int_{\mathbb{S}} d\omega \int_{\mathbb{S}^\omega} d\psi \left| \int_0^\pi \varphi(\omega\cos\theta + \psi\sin\theta)\sin^{\alpha-2}\theta\, d\theta \right|^{\varkappa}.$$

Гипотеза из [2] заключается в том, что при $N \to \infty$, $\kappa \geq \kappa_0 > 0$

$$\sigma(\kappa, gV) \sim \theta_\alpha N^{\varkappa}. \qquad (I.4)$$

Для центральных потенциалов $V(x) = V(|x|)$ (при $m=3$) асимптотика (I.4) оправдана в [3] при

$$N \to \infty,\ M_\alpha := g^{3-\alpha}\kappa^{2(\alpha-2)} \to \infty. \qquad (I.5)$$

Условия (I.5) допускают для всех $\alpha > 0$ квазиклассический предельный переход $g = c\kappa^2 \to \infty$ и становится шире с уменьшением α. Для неотрицательных потенциалов соотношение (I.4) справедливо в более широкой области

$$N \to \infty, \quad Q_\alpha := g\kappa^{\alpha-2} \to \infty. \tag{I.6}$$

Отметим (см. [I]), что без условия $V \geqslant 0$ асимптотика (I.4) (во всяком случае при $\alpha > 5$) во всей области (I.6) заведомо не имеет места.

Без предположения $V(x) = V(|x|)$ соотношение (I.4) установлено в [4] при $g \leqslant C(V)\kappa^2$, $N \to \infty$. Постоянная $C(V) > 0$ может принимать любое значение, если потенциал удовлетворяет условиям типа отталкивания. В общем случае в [4] требуется малость $C(V)$. При произвольном C случай $g = C\kappa^2 \to \infty$ рассматривался в [5], где на соответствующую классическую систему накладывалось условие неловушечности (отсутствие захвата). Для потенциалов, удовлетворяющих (I.I), в [5] установлена точная по порядку оценка $\sigma(\kappa, gV) \leqslant c N^{\varkappa}$. В существенно более широкой области $\kappa \geqslant \kappa_0 > 0$, $N \geqslant N_0 > 0$ известны [6] аналогичные оценки сверху для величины $\sigma(\kappa, gV)$, усредненной по какому-либо интервалу волновых чисел κ.

Укажем, что для справедливости результатов работ [2], [4], [6] интегрирования по направлению падения не требуется.

Цель настоящей работы состоит в доказательстве соотношения (I.4) для потенциалов с асимптотикой (I.2). Область изменения параметров κ, g оказывается при этом близкой к найденной в [3] для центральных потенциалов. Основные результаты содержатся в теоремах I и 2. В первой из них утверждается справедливость (I.4) в той же области (I.5), что и при $V(x) = V(|x|)$. Теорема I устанавливает также оценку сверху для сечения рассеяния при $N \geqslant c > 0$, $Q_\alpha \geqslant c > 0$. В теореме 2 – показано, что при дополнительных предположениях $V > 0$, $\varphi > 0$ асимптотика (I.4) сохраняется в области

$$N \to \infty, \quad Q_\alpha \geqslant c N^{\delta}, \quad \delta > 0. \tag{I.7}$$

Эта область, разумеется, включает в себя (I.5), но несколько уже, чем (I.6). Подчеркнем, что как и в [3], мы не требуем никаких предположений о соответствующей классической системе.

Наше доказательство (I.4) следует схеме работы [4], но отличается от нее в аналитическом отношении. Мы порознь рассматрива-

ем две области пространства $\mathbb{R}^m$: $|x| \geqslant \varepsilon N^{\nu}$, $\nu=(\alpha-1)^{-1}$, $\varepsilon>0$ и $|x| \leqslant \varepsilon N^{\nu}$. Оказывается, асимптотика сечения рассеяния определяется только первой из них. Рассмотрение вспомогательной задачи в области $|x| \geqslant \varepsilon N^{\nu}$ основано на редукции к случаю $N=\mathrm{const}$ и проводится в существенном так же, как в [4].

Основную трудность представляет оценка вклада шара $|x| \leqslant \varepsilon N^{\nu}$. В работе [4] этот вклад изучался на основе априорной оценки для резольвенты оператора Шредингера, окаймленной убывающими весами. В области $g=cK^2$, где c достаточно велико, и тем более, когда $gK^{-2} \to \infty$, такая оценка, вообще говоря, отсутствует. Выясняется, однако, что априорная оценка сохраняется для s-чисел окаймленной резольвенты с достаточно большим номером. Это обстоятельство объясняется тем, что оценка для нормы нарушается лишь на подпространстве конечной размерности. Это подпространство, грубо говоря, определяется собственными функциями подходящей граничной задачи для оператора $-\Delta+gV$ в шаре $|x| \leqslant \rho=\varepsilon N^{\nu}$, отвечающими собственным числам из некоторой окрестности точки K^2. Таким образом оценку для s-чисел удается связать со свойствами функции распределения $n(\lambda,\rho,gV)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, регулярной граничной задачи. В отличие от общего случая при $V>0, \varphi>0$ функция $n(\lambda,\rho,gV)$ для фиксированных ρ, λ ограничена равномерно по $g \geqslant 0$. Это позволяет рассматривать потенциалы, удовлетворяющие условиям $V>0, \varphi>0$, в области (I.7) более широкой чем (I.5). Нужные нам свойства $n(\lambda,\rho,gV)$ мы извлекаем из недавних результатов В.Я.Иврия о точной оценке остатка в равномерной асимптотике $n(\lambda,\rho,gV)$. С помощью оценки для s-чисел окаймленной резольвенты устанавливается, что вклад в сечение рассеяния от шара $|x| \leqslant \varepsilon N^{\nu}$ не превосходит $c(\varepsilon)N^{\varkappa}$, где $c(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Этого достаточно для оправдания асимптотики (I.4).

Отметим, что для рассмотрения области $|x| \geqslant \varepsilon N^{\nu}$ достаточно условий $N \to \infty$, $gK^{\alpha-2} \to \infty$, а ограничения (I.5) или (I.7) при $V>0, \varphi>0$ требуются лишь для оценки вклада от шара $|x| \leqslant \varepsilon N^{\nu}$.

Опишем коротко план работы. Ее результаты формулируются в § 2. В § 3 собраны оценки s-чисел некоторых вспомогательных операторов. Они применяются в § 4 для рассмотрения случая $N=\mathrm{const}$. С помощью результатов § 4 в § 5 устанавливаются оценки для s-чисел окаймленной резольвенты оператора Шредингера и затем доказываются основные теоремы. Вывод из результатов В.Я.Иврия нужных оценок для функции распределения $n(\lambda,\rho,gV)$ помещен в § 6.

Автор выражает свою признательность Д.Р.Яфаеву за постоянное

внимание и помощь в работе.

§ 2. Основные обозначения. Результаты

I. Пусть $H(V)=H_0+V$ – самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m\geqslant 3$, где $H_0=-\Delta$, V – оператор умножения на функцию V, удовлетворяющую условию

$$|V(x)|\leqslant c\,(1+|x|)^{-\alpha},\quad \alpha>1. \qquad (2.I)$$

Здесь и в дальнейшем через c и C обозначаются различные положительные постоянные, точное значение которых безразлично. В случае необходимости зависимость C от некоторых параметров отражается в обозначениях. Через $R_0(\kappa,\varepsilon)$, $R(\kappa,\varepsilon,V)$ обозначаем резольвенты операторов H_0, $H(V)$ в точке $\kappa^2+i\varepsilon$, $\varepsilon\neq 0$; X_β – умножение на функцию $(1+|x|)^{-\beta}$, $\beta\in\mathbb{R}$; χ_r – умножение на индикатор шара $B_r=\{x\in\mathbb{R}^m: |x|\leqslant r\}$; $\mathbb{S}_r$ – сфера $\{x\in\mathbb{R}^m: |x|=r\}$, $r>0$, $\mathbb{S}:=\mathbb{S}_1$. Напомним, что оператор-функция $X_\beta R(\kappa,\varepsilon,V)X_\beta$ при $2\beta>1$ имеет пределы при $\varepsilon\to\pm 0$, и эти пределы являются компактными операторами, непрерывными по $\kappa>0$. Обозначим $R(\kappa,+0,V)$ через $R(\kappa,V)$, подразумевая, что этот оператор корректно определен лишь при умножении с обеих сторон на X_β, $2\beta>1$.

Мы будем также рассматривать в $L^2(\mathbb{R}^m)$ операторы $H_\rho(V)$ вида $-\Delta+V$ с условием Дирихле на сфере $\mathbb{S}_\rho$; $R_\rho(\kappa,\varepsilon,V)=(H_\rho(V)-\kappa^2-i\varepsilon)^{-1}$ – резольвента $H_\rho(V)$. Через $H_\rho^{(i)}(V)$ обозначается часть оператора $H_\rho(V)$ в $L^2(B_\rho)$. Введем также обозначения $T_\rho(\kappa,\varepsilon,V)=R(\kappa,\varepsilon,V)-R_\rho(\kappa,\varepsilon,V)$, $T_{0\rho}(\kappa,\varepsilon)=T_\rho(\kappa,\varepsilon,0)$. При $\varepsilon\to 0$ оператор-функция $X_\beta R_\rho(\kappa,\varepsilon,V)X_\beta$, $2\beta>1$, может иметь полюсную особенность при приближении к (конечнократному) собственному числу оператора $H_\rho^{(i)}(V)$. Если κ^2 не является собственным числом, то пределы при $\varepsilon\to\pm 0$ оператора $X_\beta R_\rho(\kappa,\varepsilon,V)X_\beta$ существуют. Для сингулярных чисел $s_n(X_\beta R_\rho(\kappa,\varepsilon,V)X_\beta)$ с достаточно большим номером n такие пределы существуют и в точках дискретного спектра. Мы используем обозначение $s_n(X_\beta R_\rho(\kappa,V)X_\beta)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0} s_n(X_\beta R_\rho(\kappa,\varepsilon,V)X_\beta)$, коль скоро последний предел существует. Аналогичное соглашение принимается и для s-чисел других операторов такого типа.

Чтобы определить матрицу рассеяния, рассмотрим на классе Шварца отображение

$$(Z_0(\kappa)u)(\omega)=2^{-1/2}\kappa^{m/2-1}(2\pi)^{-m/2}\int e^{-i\kappa\langle\omega,x\rangle}u(x)\,dx. \qquad (2.2)$$

При $2\beta > 1$ отображение $Z_0(\kappa) X_\beta$ по непрерывности продолжается до компактного оператора из $L^2(\mathbb{R}^m)$ в $\mathcal{H} := L^2(S)$. Отметим тождество

$$2\pi i Z_0^*(\kappa) Z_0(\kappa) = R_0(\kappa) - R_0^*(\kappa). \qquad (2.3)$$

Матрица рассеяния $S(\kappa, V): \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ для пары $H_0, H(V)$ определяется соотношением

$$S(\kappa, V) = I - 2\pi i Z_0(\kappa)(V - VR(\kappa, V)V) Z_0^*(\kappa)$$

и является унитарным оператором в $\mathcal{H}$. Если $2\alpha > m+1$, то $S(\kappa, V) - I$ - оператор Гильберта-Шмидта. В этом случае конечна величина

$$\sigma(\kappa, V) = (2\pi)^{m-1} \kappa^{-m+1} \| S(\kappa, V) - I \|_2^2, \qquad (2.4)$$

называемая полным сечением рассеяния.

Введем также матрицу рассеяния $S(\kappa, V, V_1)$ для пары $H(V_1), H(V)$, где V_1 удовлетворяет (2.I) при $\alpha = \alpha_1$. Пусть $V_2 = V - V_1$,

$$Z_1(\kappa) = Z_1(\kappa, V) = Z_0(\kappa)[I - V_1 R^*(\kappa, V_1)]. \qquad (2.5)$$

Тогда

$$S(\kappa, V, V_1) = 1 - 2\pi i Z_1(\kappa)[V_2 - V_2 R(\kappa, V) V_2] Z_1^*(\kappa). \qquad (2.6)$$

Аналогично $\sigma(\kappa, V)$ введем "относительное" сечение рассеяния

$$\sigma(\kappa, V, V_1) = (2\pi)^{m-1} \kappa^{-m+1} \| S(\kappa, V, V_1) - I \|_2^2. \qquad (2.7)$$

Эта величина заведомо конечна, если $2\alpha > m+1$, $2\alpha_1 > m+1$. Из теоремы умножения волновых операторов вытекает, что

$$S(\kappa, V) = S(\kappa, V_1) S(\kappa, V, V_1).$$

Используя неравенство треугольника для норм Гильберта-Шмидта, отсюда и из (2.4), (2.7) нетрудно получить следующие оценки

$$\sigma(\kappa, V) \leqslant 2[\sigma(\kappa, V, V_1) + \sigma(\kappa, V_1)], \qquad (2.8а)$$

$$|\sigma(\kappa, V) - \sigma(\kappa, V_1)| \leqslant 2\sigma^{1/2}(\kappa, V, V_1)[\sigma^{1/2}(\kappa, V, V_1) + \sigma^{1/2}(\kappa, V_1)]. \qquad (2.8в)$$

В дальнейшем нам потребуется также связь между сечениями рассеяния на потенциалах $V(x)$ и $V^{(\rho)}(x)=\rho^2 V(\rho x)$, $\rho>0$:

$$\sigma(\kappa,V)=\rho^{m-1}\sigma(\kappa\rho,V^{(\rho)}). \qquad (2.9)$$

2. Приведем точные формулировки результатов работы. Предположим, что $V\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет оценкам

$$|(D^\ell V)(x)|\leqslant C_\ell(1+|x|)^{-\alpha-|\ell|},\ \alpha>1,\ |\ell|\geqslant 0. \qquad (2.10)$$

Введем обозначения $N:=g\kappa^{-1}$, $Q_\alpha:=g\kappa^{\alpha-2}$, $M_\alpha:=g^{3-\alpha}\kappa^{2(\alpha-2)}$.

Следующая теорема устанавливает оценку сверху и асимптотику $\sigma(\kappa,gV)$ без условий на знак V .

ТЕОРЕМА I. Пусть $m\geqslant 3$ и выполнено (2.10) при $2\alpha>m+1$; $N\geqslant c$, $Q_\alpha\geqslant c$. Тогда имеет место оценка

$$\sigma(\kappa,gV)\leqslant c(M_\alpha^{-\varkappa/2}+1)N^{\varkappa},\quad \varkappa=(m-1)(\alpha-1)^{-1}. \qquad (2.11)$$

Если V удовлетворяет еще (I.2), то при $M_\alpha\to\infty$, $N\to\infty$ справедлива асимптотика (I.4).

Вторая теорема дает оценку сверху и асимптотику $\sigma(\kappa,gV)$ при дополнительном условии

$$V(x)\geqslant c(1+|x|)^{-\alpha}. \qquad (2.12)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m\geqslant 3$ удовлетворяет (2.10), (2.12) при $2\alpha>m+1$; $N\geqslant c$, $Q_\alpha\geqslant cN^\delta$ с каким-нибудь $\delta>0$. Тогда справедлива оценка

$$\sigma(\kappa,gV)\leqslant cN^{\varkappa}. \qquad (2.13)$$

Если при этом V имеет асимптотику (I.2), то при $Q_\alpha\geqslant cN^\delta$, $N\to\infty$ справедлива асимптотика (I.4).

Обсудим условия справедливости асимптотики (I.4). Прежде всего отметим, что при всех $\alpha>(m+1)/2$ соотношение (I.4) выполнено в области $g\leqslant C\kappa^2$, $N\to\infty$ для любого C . Теорема 2 допускает также предел $g\to\infty$, $\kappa=const$ (и даже $\kappa\to 0$). Без условия (2.12) соотношение (I.4) при $g\to\infty$, $\kappa=const$ следует из теоремы I лишь для $\alpha<3$. Поскольку $2\alpha>m+1$, эта асимптотика может иметь место только при $m=3,4$. Напротив, при $m\geqslant 5$ условие $M_\alpha\to\infty$ требует, чтобы $\kappa\to\infty$.

Сравним теперь оценки (2.11) и (2.13). Обратим внимание на

множитель $M^{-\varkappa/2}+1$ в (2.II). Ясно, что при $M_\alpha \geqslant C$ оценка (2.II) принимает вид (2.I3). Однако при $M_\alpha \leqslant C$ наличие дополнительного множителя приводит к неравенству $\sigma(\kappa, gV) \leqslant C(g\kappa^{-2})^{(m-1)/2}$

Доказательство теорем I и 2 основано на свойствах функции распределения $n(\lambda, \rho, V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, дискретного спектра оператора $H_\rho^{(i)}(V)$. Чтобы точно сформулировать результат, введем некоторые обозначения. Для $p \in \mathbb{R}$ положим

$$\lambda_p^{\pm} = \lambda_p^{\pm}(\lambda, \rho) = \lambda \pm C\rho^{-2}\left(|\lambda|^{1/2}\rho + 1\right)^{-p}. \qquad (2.I4)$$

Пусть

$$n_p(\lambda, \rho, V) = n(\lambda_p^+, \rho, V) - n(\lambda_p^-, \rho, V) \qquad (2.I5)$$

– число собственных значений $H_\rho^{(i)}(V)$ на промежутке $[\lambda_p^-, \lambda_p^+)$. Далее, пусть

$$\tau(\mu_1, \mu_2) = \mu_1^{m-1} + \mu_2^{(m-1)/2} + 1, \ \mu_{1,2} \geqslant 0. \qquad (2.I6)$$

Мы будем изучать сечение рассеяния $\sigma(\kappa, gV)$, предполагая, что число $n_p(\kappa^2, \rho, gV)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий.

УСЛОВИЕ I_p. Для некоторого $p \in \mathbb{R}$ и всех $\rho \geqslant \rho_0 > 0$, $\kappa > 0$ и $g \geqslant 0$ справедлива оценка

$$n_p(\kappa^2, \rho, gV) \leqslant C\tau(\kappa\rho, g). \qquad (2.I7)$$

УСЛОВИЕ Π_p. Для некоторого $p \in \mathbb{R}$ и всех $\rho \geqslant \rho_0 > 0$, $\kappa > 0$ и $g \geqslant 0$ справедлива оценка

$$n_p(\kappa^2, \rho, gV) \leqslant C\tau(\kappa\rho, 0). \qquad (2.I8)$$

Отметим, что если условие I_p или Π_p выполнено для какого-нибудь $p = p_0$, то оно справедливо и при всех $p > p_0$. Отметим также, что условие Π_p более ограничительно, чем I_p. Действительно, в отличие от (2.I7) неравенство (2.I8) требует, чтобы количество собственных чисел $H_\rho^{(i)}(gV)$ на промежутке $[\lambda_p^-, \lambda_p^+)$ оставалось ограниченным равномерно по $g \geqslant 0$. Далее, оба эти условия допускают при $\kappa\rho \to \infty$ накопление (не слишком быстрое) собственных чисел на промежутке $[\lambda_p^-, \lambda_p^+)$, причем накопление может происходить даже при $\lambda_p^+ - \lambda_p^- \to 0$ (когда $p > 0$).

Следующие теоремы показывают, что поведение сечения рассеяния

зависит от того, какое из двух условий I_p, Π_p выполнено.

ТЕОРЕМА I′. Пусть $m \geqslant 3$, $V(x)$ дважды дифференцируема по $|x|$, удовлетворяет (2.I) при $2\alpha > m+1$ и

$$|x| \left|\frac{\partial V(x)}{\partial |x|}\right| + |x|^2 \left|\frac{\partial^2 V(x)}{\partial |x|^2}\right| \leqslant c < \infty. \quad (2.I9)$$

Пусть выполнено условие I_p. Тогда при $N \geqslant c$, $Q_\alpha \geqslant c$ имеет место оценка (2.II). Если же V имеет асимптотику (I.2), то при $M_\alpha \to \infty$, $N \to \infty$ справедлива асимптотика (I.4).

ТЕОРЕМА 2′. Пусть V удовлетворяет условиям теоремы I′, но вместо условия I_p выполнено Π_p. Тогда при $N \geqslant c$, $Q_\alpha \geqslant c N^\delta$, $\delta > 0$, справедлива оценка (2.I3). Если к тому же V имеет асимптотику (I.2), то при $Q_\alpha \geqslant c N^\delta$, $N \to \infty$ справедлива асимптотика (I.4).

Отметим, что условие I_p при $p=-1$ вытекает из предположения (2.I0). Для выполнения условия Π_p надо потребовать еще (2.I2). Более точно, справедлива

ЛЕММА I. Пусть $m \geqslant 3$ и $V \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет (2.I0) при $\alpha > 2$. Тогда выполнено условие I_{-1}. Если V удовлетворяет еще (2.I2), то выполнено условие Π_{-1}.

Доказательство леммы отнесено в § 6. Хотя мы можем утверждать справедливость (2.I8) лишь при условии (2.I2), оценка (2.I8), по-видимому, выполняется при более слабом ограничении $V \geqslant 0$. Коль скоро лемма I установлена, для доказательства теорем I, 2 достаточно проверить теоремы I′, 2′. Этому посвящены следующие параграфы.

3. Приведем некоторые сведения об s - числах ограниченных операторов [7], необходимые в дальнейшем. Пусть $\mathcal{K}_n$ - множество n - мерных операторов. По определению для ограниченного оператора A

$$s_{n+1}(A) = \min_{L \in \mathcal{K}_n} \|A - L\|. \quad (2.20)$$

Для любых ограниченных A_1, A_2 справедливы неравенства

$$s_{n+p-1}(A_1 A_2) \leqslant s_n(A_1)\, s_p(A_2),$$

$$s_{n+p-1}(A_1 + A_2) \leqslant s_n(A_1) + s_p(A_2).$$

Отметим также следующее элементарное утверждение [I].

ЛЕММА 2. Пусть A - компактен, точка -1 не является точкой

спектра A и $s_n(A) \leqslant \gamma < 1$ для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда $s_n((I+A)^{-1}) \leqslant (1-\gamma)^{-1}$.

§ 3. Оценки s - чисел операторов T_{0d}, Z_0

I. При доказательстве теорем I′, 2′ нам потребуются некоторые оценки s - чисел операторов $X_\beta T_{0d}(\kappa,\varepsilon) X_\beta$, $Z_0(\kappa)\chi_d$. Изучение этих операторов начнем с обсуждения вспомогательной задачи. Обозначим через h_ν и $h_{\nu,d}$ самосопряженные операторы в $L^2(\mathbb{R}_+)$, порожденные дифференциальным выражением

$$hu = -\frac{d^2}{dy^2}u + (\nu^2 - 1/4)y^{-2}u, \quad \nu \geqslant 0, \; y > 0,$$

и граничными условиями $u(0)=0$ (для h_ν) и $u(0)=u(d)=0$, $d>0$ (для $h_{\nu,d}$). Часть оператора $h_{\nu,d}$ в $L^2(0,d)$ обозначим $h^{(i)}_{\nu,d}$. Для любого $\kappa > 0$ при $\varepsilon \to \pm 0$ существуют пределы $X_\beta(h_\nu - \kappa^2 - i\varepsilon)^{-1}X_\beta$, $2\beta > 1$. Если $\kappa^2 > 0$ не является собственным числом $h^{(i)}_{\nu,d}$, то при $2\beta > 1$ существуют пределы $X_\beta(h_{\nu,d} - \kappa^2 - i\varepsilon)^{-1}X_\beta$, $\varepsilon \to \pm 0$. Поэтому для (одномерного) оператора $t_{\nu,d}(\kappa,\varepsilon) = (h_\nu - \kappa^2 - i\varepsilon)^{-1} - (h_{\nu,d} - \kappa^2 - i\varepsilon)^{-1}$ существует предел $X_\beta t_{\nu,d}(\kappa) X_\beta := \lim\limits_{\varepsilon \to +0} X_\beta t_{\nu,d}(\kappa,\varepsilon) X_\beta$.

Нас будут интересовать оценки нормы $X_\beta t_{\nu,d}(\kappa) X_\beta$ при больших ν и κ. Для этого потребуется явное выражение для ядра $t_{\nu,d}(y,y',\kappa)$ оператора $t_{\nu,d}(\kappa)$. Пусть $J_\nu, H^{(1)}_\nu$ - функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка ν. Введем функции

$$j_\nu(x) = \sqrt{2^{-1}\pi x}\; J_\nu(x), \quad w_\nu(x) = i\sqrt{2^{-1}\pi x}\; H^{(1)}_\nu(x) \qquad (3.1)$$

Для дальнейшего удобно переписать выражения для j_ν, w_ν через "модуль" и "фазу". Положим $b_\nu(x) = |w_\nu(x)|^2$ и введем такую функцию $\omega_\nu(x)$, что

$$j_\nu(x) = b_\nu^{1/2}(x)\sin\omega_\nu(x), \quad w_\nu(x) = b_\nu^{1/2}(x)\, e^{i\omega_\nu(x)} \qquad (3.2)$$

Можно считать [3], что $\omega_\nu(0)=0$ и $\omega_\nu(x)$ непрерывно зависит от $x \geqslant 0$. Выпишем выражение для ядра $t_{\nu,d}(\kappa)$:

$$t_{\nu,d}(y,y',\kappa) = \kappa^{-1}\,\mathrm{sign}(\sin\omega_\nu(\kappa d))\,\varphi_\nu(y,\kappa)\,\varphi_\nu(y',\kappa). \qquad (3.3)$$

Здесь

$$\varphi_\nu(y,\kappa)=\begin{cases} j_\nu(\kappa y)\,|\sin\omega_\nu(\kappa d)|^{-1/2} e^{i/2\,\omega_\nu(\kappa d)}, & y<d; \\ w_\nu(\kappa y)\,|\sin\omega_\nu(\kappa d)|^{1/2} e^{-i/2\,\omega_\nu(\kappa d)}, & y\geqslant d. \end{cases} \tag{3.4}$$

Собственные числа оператора $h^{(i)}_{\nu,d}$ находятся из уравнения $\sin\omega_\nu(\kappa d)=0$. Нам формулы (3.4) понадобятся при $\sin\omega_\nu(\kappa d)\neq 0$.

Приведем свойства функций $\omega_\nu(\nu s)$, $b_\nu(\nu s)$, $\nu\geqslant 0$, необходимые для изучения $t_{\nu,d}(\kappa)$. Поведение $\omega_\nu(\nu s)$, $b_\nu(\nu s)$ существенно различно при $s<1$ и $s>1$. Пусть вначале $s<1$ и

$$\zeta(s)=\int_s^1 y^{-1}(1-y^2)^{1/2}\,dy. \tag{3.5}$$

При $s<1$ справедливы оценки

$$b_\nu(\nu s)\leqslant c\,s(1-s^2)^{-1/2}e^{2\nu\zeta(s)}, \tag{3.6}$$

$$c e^{-2\nu\zeta(s)}\leqslant\omega_\nu(\nu s)\leqslant C e^{-2\nu\zeta(s)},\quad \omega_\nu(\nu s)<\frac{\pi}{2}. \tag{3.7}$$

При $s>1$ нам понадобится информация только о функции $b_\nu(\nu s)$:

$$b_\nu(\nu s)\leqslant C\,s(s^2-1)^{-1/2},\quad s>1. \tag{3.8}$$

Вывод неравенств (3.6) - (3.8) можно найти в [3].

Отметим некоторые следствия из (3.6), (3.7). При $s_1\leqslant s_2\leqslant s_0<1$ из (3.5) следует неравенство $\zeta(s_1)-\zeta(s_2)\geqslant c\ln(s_2 s_1^{-1})$, $c=c(s_0)$. Отсюда и из (3.7) получаем, что

$$\omega_\nu(\nu s_1)\,[\omega_\nu(\nu s_2)]^{-1}\leqslant c\,(s_1 s_2^{-1})^{c\nu}. \tag{3.9}$$

Из (3.6), (3.7) следует также, что при $s<1$

$$b_\nu(\nu s)\,\omega_\nu(\nu s)\leqslant c\,s(1-s^2)^{-1/2}. \tag{3.10}$$

Для $j_\nu(\nu s)$ из (3.2) и (3.6), (3.7) вытекает, что

$$j_\nu^2(\nu s)\leqslant c\,s(1-s^2)^{-1/2}e^{-2\nu\zeta(s)},\quad s<1.$$

Следовательно,

$$\int_0^s j_\nu^2(\nu s')\,ds' \leqslant Ce^{-c\nu}, \quad s \leqslant s_0 < 1, \quad c = c(s_0). \tag{3.11}$$

С помощью (3.7) можно убедиться, что при $\nu \geqslant a\kappa$, $a > d$, $\kappa > 0$ оператор $X_\beta t_{\nu,d}(\kappa) X_\beta$, $2\beta > 1$, корректно определен. Действительно, так как $s := \nu^{-1}\kappa d < 1$, то $0 < \omega_\nu(\kappa d) < \pi/2$ и поэтому $\sin\omega_\nu(\kappa d) \neq 0$.

Нужную нам информацию о $t_{\nu,d}(\kappa)$ содержит

ЛЕММА 3. Пусть r, d, a – фиксированные числа, причем $0 < r < d < a$. Тогда при $2\beta > 1$ для всех $\nu \geqslant a\kappa$, $\kappa \geqslant \kappa_0 > 0$ справедливы оценки

$$\| X_\beta t_{\nu,d}(\kappa) X_\beta \| \leqslant c\nu^{-2}, \tag{3.12}$$

$$\| \chi_r t_{\nu,d}(\kappa) X_\beta \| \leqslant Ce^{-c\nu}. \tag{3.13}$$

○ Предварительно оценим интегралы

$$I_\nu^{(1)}(r,\kappa) = \kappa^{-1} |\sin\omega_\nu(\kappa d)|^{-1} \int_0^r j_\nu^2(\kappa y)\,dy, \quad r \leqslant d,$$

$$I_\nu^{(2)}(\kappa) = \kappa^{-1} |\sin\omega_\nu(\kappa d)| \int_d^\infty |w_\nu(\kappa y)|^2 (1+y)^{-2\beta}\,dy.$$

При этом используем обозначения $s_0 = d\kappa\nu^{-1}$, $s_1 = r\kappa\nu^{-1}$, так что $s_1 \leqslant s_0 \leqslant da^{-1}$. Рассмотрим $I_\nu^{(1)}$. Согласно (3.2) $j_\nu^2(\nu s) \leqslant b_\nu(\nu s)\,\omega_\nu^2(\nu s)$. Поскольку $\sin\omega_\nu(\nu s_0) \geqslant c\omega_\nu(\nu s_0)$, то

$$I_\nu^{(1)}(r,\kappa) \leqslant c\nu\kappa^{-2}\omega_\nu(\nu s_1)[\omega_\nu(\nu s_0)]^{-1} \int_0^{s_1} [b_\nu(\nu s)\,\omega_\nu(\nu s)]\,\omega_\nu(\nu s)[\omega_\nu(\nu s_1)]^{-1}\,ds.$$

Используя (3.9), (3.10), получаем, что

$$I_\nu^{(1)}(r,\kappa) \leqslant C\kappa^{-2}(s_1 s_0^{-1})^{c\nu} s_1 \leqslant C(rd^{-1})^{c\nu} r^2 \nu^{-2}. \tag{3.14}$$

Теперь оценим $I_\nu^{(2)}(\kappa)$. После замены $r = \kappa^{-1}\nu s$ интеграл $I_\nu^{(2)}$ принимает вид $I_\nu^{(2)} = \int_{s_0}^\infty f(s)\,ds$, где

$$f(s) = f(s,\nu,\kappa) = \nu\kappa^{-2} |\sin\omega_\nu(\nu s_0)|\, b_\nu(\nu s)(1+\nu\kappa^{-1}s)^{-2\beta}.$$

Рассмотрим порознь интегралы

$$\mathcal{J}_1 = \int_{s_0}^{\sigma} f(s)\,ds\,, \qquad \sigma = (2d)^{-1}(d+a)s_0 < (d+a)(2a)^{-1},$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_{\sigma}^{1} f(s)\,ds\,, \quad \mathcal{J}_3 = \int_{1}^{\infty} f(s)\,ds\,.$$

Для функции $f(s)$ справедливы оценки

$$f(s,\nu,\kappa) \leqslant \nu\kappa^{-2}\omega_\nu(\nu s_0)[\omega_\nu(\nu s)]^{-1} b_\nu(\nu s)\omega_\nu(\nu s), \quad s \in [s_0,\sigma], \tag{3.15}$$

$$f(s,\nu,\kappa) \leqslant \nu\kappa^{-2}\omega_\nu(\nu s_0)\, b_\nu(\nu s)\,, \qquad s \in (\sigma, 1]\,, \tag{3.16}$$

$$f(s,\nu,\kappa) \leqslant C\kappa^{-1}(\nu\kappa^{-1})^{-2\beta+1} s^{-2\beta}\omega_\nu(\nu s_0)\, b_\nu(\nu s)\,, \quad s \in (1,\infty). \tag{3.17}$$

С помощью (3.9), (3.10) из (3.15) выводится неравенство

$$\mathcal{J}_1 \leqslant C\nu\kappa^{-2}\int_{s_0}^{\sigma}(s_0 s^{-1})^{c\nu} s(1-s^2)^{-1/2}ds \leqslant C\kappa^{-2}s_0^2 = C\nu^{-2}d^2. \tag{3.18}$$

В силу (3.6), (3.7) из (3.16) следует, что

$$\mathcal{J}_2 \leqslant C\nu\kappa^{-2}\int_{\sigma}^{1} e^{-2\nu[\zeta(s_0)-\zeta(s)]} s(1-s^2)^{-1/2}ds \leqslant C e^{-c\nu}. \tag{3.19}$$

И, наконец, поскольку $2\beta > 1$, то (3.17) с учетом (3.8) приводит к оценке $\mathcal{J}_3 \leqslant C e^{-c\nu}$. Это неравенство вместе с (3.18), (3.19) дает

$$I_\nu^{(2)}(\kappa) \leqslant C\nu^{-2}. \tag{3.20}$$

Докажем (3.12), (3.13). Согласно (3.3)

$$\|X_\beta t_{\nu,d}(\kappa) X_\beta\| \leqslant I_\nu^{(1)}(d,\kappa) + I_\nu^{(2)}(\kappa),$$

$$\|\chi_r t_{\nu,d}(\kappa) X_\beta\| \leqslant [I_\nu^{(1)}(r,\kappa)]^{1/2}\,[I_\nu^{(1)}(d,\kappa) + I_\nu^{(2)}(\kappa)]^{1/2}.$$

Остается сослаться на (3.14), (3.20) ●

2. Перейдем к оценкам s – чисел операторов $X_\beta T_{\nu d}(\kappa,\varepsilon) X_\beta$ и $Z_0(\kappa)\chi_d$ в $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m \geqslant 3$. Рассмотрим $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ как функцию радиальной $r = |x|$ и угловой $\omega = x/|x|$ переменных,

так что $u(x)=u(r,\omega)$. Стандартной заменой $u(r,\omega)\to r^{(m-1)/2}u(r,\omega)$ пространство $L^2(\mathbb{R}^m)$ отождествляется с $L^2(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{N}=:\mathcal{H}$, $\mathcal{N}:=L^2(\mathbb{S})$. Можно считать, что $T_{od}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, $Z_o:\mathcal{H}\to\mathcal{N}$.

В $\mathcal{N}$ рассмотрим подпространства $\mathcal{N}_\ell$ сферических функций степени $\ell\geqslant 0$, $\sum\oplus\mathcal{N}_\ell=\mathcal{N}$. Через $P_\ell:\mathcal{N}\to\mathcal{N}_\ell$ обозначим ортопроектор на $\mathcal{N}_\ell$. Как известно [8],

$$n_\ell:=\dim\mathcal{N}_\ell=(2\ell+m-2)\frac{(\ell+m-3)!}{(m-2)!\,\ell!}. \qquad (3.21)$$

Подпространства $\mathcal{H}_\ell:=L^2(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{N}_\ell$, $\ell\geqslant 0$, приводят оператор $T_{od}(\kappa,\varepsilon)$ и поэтому

$$T_{od}(\kappa,\varepsilon)=\sum_{\ell\geqslant 0}\oplus Q_{\ell,d}(\kappa,\varepsilon),\ Q_{\ell,d}:\mathcal{H}_\ell\to\mathcal{H}_\ell, \qquad (3.22)$$

где

$$Q_{\ell,d}(\kappa,\varepsilon)=t_{\nu,d}(\kappa,\varepsilon)\otimes P_\ell,\ \nu=\nu_\ell:=\ell+(m-2)/2. \qquad (3.23)$$

Тем самым $\dim Q_{\ell,d}=n_\ell$.

Аналогичным образом,

$$Z_o(\kappa)\chi_d=\sum_{\ell\geqslant 0}\oplus D_\ell(\kappa),\ D_\ell(\kappa):=P_\ell Z_o(\kappa)\chi_d:\mathcal{H}_\ell\to\mathcal{N}_\ell. \qquad (3.24)$$

Пусть $j_\nu(x)$ определяется (3.I), а

$$\mathcal{J}_\ell(\kappa)u=(-i)^\ell(\pi\kappa)^{-1/2}\int_0^d j_\nu(\kappa y)u(y)\,dy \qquad (3.25)$$

– линейный непрерывный функционал на $u\in L^2(\mathbb{R}_+)$. Тогда, раскладывая экспоненту в (2.2) по сферическим функциям, найдем, что

$$D_\ell(\kappa)=\mathcal{J}_\ell(\kappa)\otimes P_\ell,\ \dim D_\ell=n_\ell.$$

Используя представления (3.22), (3.24) и результаты п.I, докажем следующие оценки для T_{od}, Z_o.

ЛЕММА 4. Пусть d,r – фиксированные числа, $0<r<d$. Тогда при $2\beta>1$ и всех $\kappa\geqslant\kappa_o>0$, $n\geqslant a_1\kappa^{m-1}$ с некоторым $a_1>0$ справедливы оценки

$$s_n(X_\beta T_{od}(\kappa)X_\beta)\leqslant cn^{-2/(m-1)}, \qquad (3.26)$$

$$s_n(\chi_\gamma T_{0d}(\kappa)\chi_\beta) \leqslant C\exp(-cn^{1/(m-1)}), \quad (3.27)$$

$$s_n(Z_0(\kappa)\chi_d) \leqslant C\exp(-cn^{1/(m-1)}). \quad (3.28)$$

○ Рассмотрим операторы

$$T^{(p)}(\kappa,\varepsilon)=\sum_{\ell\geqslant p}\oplus Q_{\ell,d}(\kappa,\varepsilon),\ Z^{(p)}(\kappa)\chi_d=\sum_{\ell\geqslant p}\oplus D_\ell(\kappa),\ p\geqslant 1.$$

Сравнивая эти формулы с (3.22), (3.24), видим, что размерности операторов $T_{0d}-T^{(p)}$, $(Z_0-Z^{(p)})\chi_d$ равны $\sum_{\ell=0}^{p-1} n_\ell$ и в силу (3.21) не превосходят Cp^{m-1}. Согласно (2.20) отсюда следует, что при $n\geqslant Cp^{m-1}$ справедливы оценки

$$s_n(fT_{0d}\chi_\beta)\leqslant\|fT_{0d}\chi_\beta-f(T_{0d}-T^{(p)})\chi_\beta\|=\|fT^{(p)}\chi_\beta\|, \quad (3.29)$$

$$s_n(Z_0\chi_d)\leqslant\|Z_0\chi-(Z_0-Z^{(p)})\chi_d\|=\|Z^{(p)}\chi_d\| \quad (3.30)$$

для любой ограниченной функции f. Будем считать, что $f(x)=f(|x|)$, $|f|\leqslant c\chi_\beta$. Если $p\geqslant a\kappa$, $a>d$, то существует предел

$$fT^{(p)}(\kappa)\chi_\beta:=\lim_{\varepsilon\to+0} fT^{(p)}(\kappa,\varepsilon)\chi_\beta=\sum_{\ell\geqslant p}\oplus(ft_{\nu,d}(\kappa)\chi_\beta\otimes P_\ell).$$

Отсюда и из (3.29) следует, что

$$s_n(fT_{0d}(\kappa)\chi_\beta)\leqslant\|fT^{(p)}(\kappa)\chi_\beta\|,\ n\geqslant Cp^{m-1},\ p\geqslant a\kappa. \quad (3.31)$$

Согласно (3.30) и (3.31) для вывода (3.26) – (3.28) достаточно доказать, что при $p\geqslant a\kappa$, $\kappa\geqslant\kappa_0$ справедливы оценки

$$\|\chi_\beta T^{(p)}(\kappa)\chi_\beta\|\leqslant Cp^{-2},\quad \|\chi_\gamma T^{(p)}(\kappa)\chi_\beta\|\leqslant Ce^{-cp}, \quad (3.32)$$

$$\|Z^{(p)}(\kappa)\chi_d\|\leqslant Ce^{-cp}. \quad (3.33)$$

Поскольку $\|fT^{(p)}(\kappa)\chi_\beta\|=\max_{\ell\geqslant p}\|ft_{\nu,d}(\kappa)\chi_\beta\|$, неравенства (3.32) следуют из (3.12), (3.13). Для доказательства (3.33)

отметим, что в силу (3.25) при $\nu \geqslant p \geqslant a\kappa$, $\kappa \geqslant \kappa_0$

$$\|D_\ell(\kappa)\| \leqslant c\int_0^d j_\nu^2(\kappa y)\,dy \leqslant C\nu\kappa^{-1}\int_0^{da^{-1}} j_\nu^2(\nu s)\,ds.$$

Так как $da^{-1} < 1$, то согласно (3.II) $\|D_\ell(\kappa)\| \leqslant Ce^{-c\nu}$.
Остается заметить, что $\|Z^{(p)}(\kappa)\chi_d\| = \max\limits_{\ell \geqslant p} \|D_\ell(\kappa)\|$ ●

§ 4. Оценки s - чисел операторов T_d, Z_1 в случае $N=const$

I. Здесь мы получим оценки s - чисел операторов $T_d(\kappa,\varepsilon,gV)$, $Z_1(\kappa,gV)$, $N=const$, аналогичные оценкам (3.27) и (3.28) для $T_{0d}(\kappa,\varepsilon)$, $Z_0(\kappa)$. При этом мы исходим из результатов § 3 и следующей оценки для резольвенты [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $V(x)$ дважды дифференцируема по $|x|$, удовлетворяет (2.I) с $\alpha=0$ и (2.I9). Тогда для всех $N \leqslant N_1$, $\kappa \geqslant \kappa_1(N_1)$ справедлива оценка

$$\|\chi_\beta R(\kappa,gV)\chi_\beta\| \leqslant c\kappa^{-1}, \quad 2\beta > 1. \tag{4.I}$$

Постоянную в (4.I) можно выбрать одинаковой для всех потенциалов удовлетворяющих (2.I) и (2.I9) равномерно.

В дальнейшем через a обозначаются различные положительные постоянные, не зависящие от N. Основной в этом параграфе является

ЛЕММА 5. Пусть V удовлетворяет (2.I) с $\alpha > 1$ и (2.I9); $d, r > 0$ - некоторые фиксированные числа, $r < d$. Тогда для любых $\mu > 0$, $N_1 > 0$ можно найти такие постоянные $a = a(\mu)$, $\kappa_1 = \kappa_1(N_1, \mu)$, что при всех $N \leqslant N_1$, $\kappa \geqslant \kappa_1$ и $n \geqslant a\kappa^{m-1}$ справедливы оценки

$$s_n(\chi_r T_d(\kappa,gV)\chi_\beta) \leqslant cn^{-\mu}, \quad 2\beta > 1, \tag{4.2}$$

$$s_n(Z_1(\kappa,gV)\chi_d) \leqslant cn^{-\mu}, \quad c = c(N_1,\mu). \tag{4.3}$$

Постоянные a, κ_1 и c в (4.2), (4.3) одинаковы для потенциалов, удовлетворяющих (2.I) и (2.I9) равномерно.

2. При доказательстве леммы 5 нам потребуется одно утверждение общего характера. Рассмотрим самосопряженные операторы A_j и $\hat{A}_j = A_j + W$, $j = 1,2$, где W - ограниченный самосопряженный оператор, $W = U|W| = |W|U$ - его полярное представление. Пусть $R_j = R_j(\lambda) = (A_j - \lambda)^{-1}$, $\hat{R}_j = \hat{R}_j(\lambda) = (\hat{A}_j - \lambda)^{-1}$, $\lambda \notin \mathbb{R}$ -

– резольвенты $A_j, \hat{A}_j$, $j = 1,2$. Введем также обозначения

$$F = (R_1 - R_2)(I - W\hat{R}_2), \tag{4.4}$$

$$G = (I - \hat{R}_2 W)F. \tag{4.5}$$

Следующая лемма позволяет, грубо говоря, оценить s – числа $\hat{R}_1 - \hat{R}_2$, если известны оценки s – чисел $R_1 - R_2$ и оператора $\hat{R}_2$.

ЛЕММА 6. Пусть оператор $|W|^{1/2} F |W|^{1/2}$ компактен и при некотором $\tilde{n} \geqslant 1$ имеет место неравенство

$$s_{\tilde{n}}(|W|^{1/2} F |W|^{1/2}) \leqslant \gamma < 1. \tag{4.6}$$

Тогда при всех $n \geqslant 1$ для любых ограниченных операторов φ_1, φ_2 справедлива оценка

$$\begin{aligned} s_{3n+\tilde{n}-3}(\varphi_1(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)\varphi_2) \leqslant s_n(\varphi_1 G \varphi_2) + \\ + (1-\gamma)^{-1} s_n(\varphi_1 G |W|^{1/2}) s_n(|W|^{1/2} F \varphi_2). \end{aligned} \tag{4.7}$$

○ Выпишем резольвентное тождество для R_j, $\hat{R}_j$:

$$\hat{R}_j = R_j - \hat{R}_j W R_j, \quad j = 1,2. \tag{4.8}$$

Вычтем из тождества с $j=1$ тождество с $j=2$ и прибавим к обеим частям $(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)WR_2$. Тогда

$$(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)(I + WR_2) = (I - \hat{R}_2 W)(R_1 - R_2) - (\hat{R}_1 - \hat{R}_2)W(R_1 - R_2). \tag{4.9}$$

Из (4.8) с $j=2$ следует, что $(I + WR_2)^{-1} = I - W\hat{R}_2$. Поэтому (4.9) эквивалентно тождеству

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 - \hat{R}_2 = (I - \hat{R}_2 W)(R_1 - R_2)(I - W\hat{R}_2) - \\ - (\hat{R}_1 - \hat{R}_2)W(R_1 - R_2)(I - W\hat{R}_2) = G - (\hat{R}_1 - \hat{R}_2)WF. \end{aligned} \tag{4.10}$$

После умножения слева на φ_1 и справа на $|W|^{1/2}$ из (4.10) получаем уравнение для $Y = \varphi_1(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)|W|^{1/2}$ следующего вида

$$Y = \varphi_1 G |W|^{1/2} - Y W^{1/2} F |W|^{1/2}, \quad W^{1/2} = U|W|^{\frac{1}{2}}. \tag{4.11}$$

Нетрудно доказать, что точка $-I$ не является точкой спектра компактного оператора $W^{1/2} F |W|^{1/2}$. Следовательно, решение (4.II) есть

$$Y = (I + W^{1/2} F |W|^{1/2})^{-1} \varphi_1 G |W|^{1/2}. \tag{4.I2}$$

В силу леммы 2 из (4.6) получаем, что

$$s_{\tilde{n}}((I + W^{1/2} F |W|^{1/2})^{-1}) \leq (1-\gamma)^{-1}.$$

С учетом этой оценки равенство (4.I2) дает

$$s_{n+\tilde{n}-1}(Y) \leq (1-\gamma)^{-1} s_n(\varphi_1 G |W|^{1/2}). \tag{4.I3}$$

Для доказательства (4.7) умножим (4.I0) слева на φ_1, справа на φ_2. Тогда

$$s_{3n+\tilde{n}-3}(\varphi_1(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)\varphi_2) \leq s_n(\varphi_1 G \varphi_2) + s_{n+\tilde{n}-1}(Y) s_n(|W|^{\frac{1}{2}} F \varphi_2).$$

Остается использовать (4.I3) ●

3. Доказательство леммы 5 состоит в применении леммы 6 при $A_1 = H_{od}$, $A_2 = H_0$, $W = gV$, $\lambda = \kappa^2 + i\varepsilon$. При этом $R_1 - R_2 = -T_{od}(\kappa, \varepsilon)$, $\hat{A}_1 = H_d(gV)$, $\hat{A}_2 = H(gV)$, $\hat{R}_1 - \hat{R}_2 = -T_d(\kappa, \varepsilon, gV)$ и операторы F, G, определенные формулами (4.4), (4.5), имеют вид

$$F = F(\kappa, \varepsilon) = -T_{od}(\kappa, \varepsilon)[I - gVR(\kappa, \varepsilon, gV)], \tag{4.I4}$$

$$G = G(\kappa, \varepsilon) = [I - gR(\kappa, \varepsilon, gV)V] F(\kappa, \varepsilon). \tag{4.I5}$$

Вначале выпишем оценки s - чисел операторов $f F X_\beta$, $X_\beta G X_\beta$, $|f| \leq c X_\beta$, $\beta > 1/2$, необходимые для доказательства. Без потери общности считаем, что $\beta < \alpha/2$, где $\alpha > 1$ - постоянная из (2.I). Согласно (4.I) для оператора (4.I4) при $n \geq a\kappa^{m-1}$, $\kappa \geq \kappa_1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} s_n(f F(\kappa) X_\beta) &\leq s_n(f T_{od}(\kappa) X_\beta)(1 + C\kappa \|X_\beta R(\kappa, gV) X_\beta\|) \leq \\ &\leq \tilde{C} s_n(f T_{od}(\kappa) X_\beta). \end{aligned} \tag{4.I6}$$

При $f = X_r$, $r < d$, из (4.I6) и (3.27) вытекает оценка

$$s_n(\chi_\eta F(\kappa) X_\beta) \leq C \exp(-cn^{1/(m-1)}),\ n \geq a\kappa^{m-1},\ \kappa \geq \kappa_1 \quad (4.17)$$

При $f = X_\beta$ из (4.16) и (3.26) вытекает, что

$$s_n(X_\beta F(\kappa) X_\beta) \leq C n^{-2/(m-1)},\ n \geq a\kappa^{m-1},\ \kappa \geq \kappa_1. \quad (4.18)$$

Вместе с (4.1) эта оценка дает неравенство для s - чисел оператора (4.15):

$$s_n(X_\beta G(\kappa) X_\beta) \leq c n^{-2/(m-1)},\ n \geq a\kappa^{m-1},\ \kappa \geq \kappa_1. \quad (4.19)$$

Перейдем непосредственно к доказательству леммы 5. Прежде всего установим оценку вида (4.2) при $\mu = 2(m-1)^{-1}$:

$$s_n(\chi_\eta T_d(\kappa, gV) X_\beta) \leq c n^{-2/(m-1)},\ n \geq a\kappa^{m-1},\ \kappa \geq \kappa_1. \quad (4.20)$$

Для этого проверим условие (4.6) леммы 6. Согласно (4.18) при $W = gV$, $|V| \leq c X_\alpha$

$$s_{\tilde{n}}(|W|^{1/2} F(\kappa) |W|^{1/2}) \leq C\kappa \tilde{n}^{-2/(m-1)} \leq (C\kappa^{-1}) a^{-2/(m-1)} \quad (4.21)$$

для любого $\tilde{n} \geq a\kappa^{m-1}$ и $\kappa \geq \kappa_1$. Выберем число $\kappa_1 = \kappa_1(N_1)$ так, чтобы при $\kappa \geq \kappa_1$ правая часть (4.21) не превосходила какого-либо $\gamma < 1$. Из (4.7) сразу же следует, что при всех $n \geq a\kappa^{m-1}$, $\kappa \geq \kappa_1$

$$s_{3n+\tilde{n}-3}(\chi_\eta T_d(\kappa, gV) X_\beta) \leq s_n(\chi_\eta G(\kappa) X_\beta) + C\kappa s_n(\chi_\eta G(\kappa) X_\beta) s_n(X_\beta F(\kappa) X_\beta).$$

Отсюда в силу (4.18) вытекает, что

$$s_{3n+\tilde{n}-3}(\chi_\eta T_d(\kappa, gV) X_\beta) \leq (1 + c\kappa n^{-2/(m-1)}) s_n(\chi_\eta G(\kappa) X_\beta) \leq c\, s_n(\chi_\eta G(\kappa) X_\beta),\ n \geq a\kappa^{m-1},\ \kappa \geq \kappa_1. \quad (4.22)$$

Ссылка на (4.19) завершает доказательство (4.20).

Чтобы доказать (4.2) для любого $\mu > 2(m-1)^{-1}$, предположим, что при $N \leq N_1$, $\kappa \geq \kappa_1$, $n \geq a\kappa^{m-1}$ оценка (4.2) справедлива для некоторого $\mu = \mu_0 > 0$. Покажем, что тогда при $N \leq N_1$, $\kappa \geq \hat{\kappa}_1$, $n \geq \hat{a}\kappa^{m-1}$ имеет место оценка

$$s_n(\chi_r T_d(\kappa, gV)\chi_\beta) \leq c\, n^{-\mu_0-(m-1)^{-1}}. \qquad (4.23)$$

Согласно (4.22), чтобы проверить (4.23), достаточно установить для $D(\kappa,\varepsilon)=\chi_r G(\kappa,\varepsilon)\chi_\beta$ оценку

$$s_n(D(\kappa)) \leq C n^{-\mu_0-(m-1)^{-1}}, \quad n \geq \hat{a}\kappa^{m-1}, \kappa \geq \hat{\kappa}_1. \qquad (4.24)$$

Пусть $b \in (r,d)$ – некоторое фиксированное число. В силу (4.I5) $D(\kappa,\varepsilon)$ можно представить в виде суммы $D=\sum_{j=1} D_j$, где

$$D_1(\kappa,\varepsilon) = \chi F(\kappa,\varepsilon)\chi_\beta,$$

$$D_2(\kappa,\varepsilon,b) = -g\chi_r R_b(\kappa,\varepsilon,gV)VF(\kappa,\varepsilon)\chi_\beta,$$

$$D_3(\kappa,\varepsilon,b) = -g\chi_r T_b(\kappa,\varepsilon,gV)VF(\kappa,\varepsilon)\chi_\beta.$$

Оператор D_1 удовлетворяет (4.24) в соответствии с (4.I7). Рассмотрим D_2. Так как $\chi_r R_b(\kappa,\varepsilon,gV)=\chi_r R_b(\kappa,\varepsilon,gV)\chi_b$, то

$$D_2(\kappa,\varepsilon,b) = -g[\chi_r R_b(\kappa,\varepsilon,gV)\chi_b]V[\chi_b F(\kappa,\varepsilon)\chi_\beta].$$

Поскольку $R_b(\kappa,\varepsilon,gV)=-T_b(\kappa,\varepsilon,gV)+R(\kappa,\varepsilon,gV)$, в силу (4.20) и (4.I)

$$s_n(\chi_r R_b(\kappa,gV)\chi_b) \leq c\,(n^{-2/(m-1)}+\kappa^{-1}), \; n \geq a\kappa^{m-1}, \kappa \geq \kappa_1.$$

Используя для $\chi_b F(\kappa,\varepsilon)\chi_\beta$ оценку (4.I7), убеждаемся, что D_2 удовлетворяет (4.24). Рассмотрим D_3. Из неравенства (4.2) для $\mu=\mu_0$ и из (4.I8) вытекает, что при $n \geq a\kappa^{m-1}$, $\kappa \geq \kappa_1$

$$s_{2n-1}(D_3(\kappa)) \leq C\kappa\, s_n(\chi_r T_b(\kappa,gV)\chi_\beta)\, s_n(\chi_\beta F(\kappa)\chi_\beta) \leq$$

$$\leq C\kappa\, n^{-\mu_0} n^{-2/(m-1)}.$$

Поскольку здесь $\kappa n^{-1/(m-1)} \leq C$, то для D_3 имеет место оценка вида (4.24). Доказательство (4.24) завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО(4.3). Согласно определению (2.5)

$$\chi_d Z_1^*(\kappa,gV) = \chi_d Z_0^*(\kappa) - gE_1 - gE_2. \qquad (4.25)$$

Здесь

$$E_1 = E_1(\kappa,\tau) = \chi_d R(\kappa, gV) V \chi_\tau Z_0^*(\kappa),$$

$$E_2 = E_2(\kappa,\tau) = \chi_d R(\kappa, gV)(1-\chi_\tau) V Z_0^*(\kappa)$$

с произвольным $\tau > d$. Операторы E_1, E_2 представим в следующем виде

$$E_1(\kappa,\tau) = L_1(\kappa)(VX_{-\alpha}) L_2(\kappa,\tau),$$

$$E_2(\kappa,\tau) = L_3(\kappa,\tau)(VX_{-\alpha}) L_4(\kappa),$$

где

$$L_1(\kappa) = \chi_d R(\kappa, gV) X_\alpha, \; L_2(\kappa,\tau) = \chi_\tau Z_0^*(\kappa),$$

$$L_3(\kappa,\tau) = \chi_d R(\kappa, gV) X_{\alpha/2}(1-\chi_\tau), \; L_4(\kappa) = X_{\alpha/2} Z_0^*(\kappa).$$

Оценка вида (4.3) для первого слагаемого в (4.25) вытекает из (3.28). Далее, поскольку $L_1(\kappa), L_2(\kappa,\tau)$ удовлетворяют соответственно (4.I) и (3.28), то для E_1 также справедлива оценка вида (4.3), Рассмотрим E_2. Согласно (2.3) $\pi \|X_{\alpha/2} Z_0^*(\kappa)\|^2 \leqslant$ $\leqslant \|X_{\alpha/2} R_0(\kappa) X_{\alpha/2}\|$. В силу (4.I) при $N=0$ отсюда следует, что $\|L_4(\kappa)\| \leqslant c\kappa^{-1/2}$. Для оценки $s_n(L_3)$ заметим, что $\chi_d R_b(\kappa,\varepsilon,gV)(1-\chi_\tau)=0$ при любом $b \in (d,\tau)$, а потому

$$s_n(L_3(\kappa,\tau)) \leqslant s_n(\chi_d T_b(\kappa, gV) X_{\alpha/2}(1-\chi_\tau)), \; n \geqslant a\kappa^{m-1}, \kappa \geqslant \kappa_1.$$

Теперь оценка вида (4.3) для E_2 следует из (4.2)●

§ 5. Доказательство теорем I′, 2′

I. При доказательстве основных теорем мы сведем задачу с помощью соотношения (2.9) к изучению сечения рассеяния $\sigma(\kappa, gV_\rho)$ для случая $N = const$ с потенциалом $V_\rho(x) = \rho^\alpha V(\rho x)$. Здесь $\rho \geqslant \rho_0 > 0$ – некоторый дополнительный параметр, причем для нас важно, что ρ может стремиться к бесконечности. Пусть V удовлетворяет (2.I) с $2\alpha > m+1$; числа $\lambda_\rho^\pm(\lambda,\rho)$, $n_\rho(\lambda,\rho,V)$, $\tau(\mu_1,\mu_2)$ определены равенствами (2.I4) – (2.I6). Как и в § 4, через a (возможно, с индексами) обозначаются положительные постоянные, не зависящие от N. Установим вначале оценки для s- чисел резольвенты $R(\kappa, gV_\rho)$. В зави-

симости от того, какое из условий I_p или Π_p выполнено, рассматриваются числа s_n, для которых соответственно

$$n \geqslant a_1 \tau(\kappa, (N+1)\kappa\rho^{\alpha-2}) \qquad (5.1)_I$$

или

$$n \geqslant a_1 \tau(\kappa, 0). \qquad (5.1)_\Pi$$

ЛЕММА 7. Пусть V удовлетворяет условиям теоремы I'; $d>0$ – некоторое фиксированное число и $N \leqslant N_1$. Если выполнено условие I_p, то для всех $\rho \geqslant \rho_0$ и n, подчиняющихся $(5.1)_I$ с некоторым a_1, справедлива оценка

$$s_n(\chi_{d/2} R(\kappa, gV_\rho)\chi_{d/2}) \leqslant c\kappa^p, \quad \kappa \geqslant \kappa_1(N_1). \qquad (5.2)$$

Если выполнено условие Π_p и $\kappa \geqslant c\rho^\delta$, $\delta>0$, то оценка (5.2) справедлива для всех $\rho \geqslant \rho_0$ и n, подчиняющихся $(5.1)_\Pi$.

Вначале докажем оценку для s- чисел $R_d(\kappa, \varepsilon, gV_\rho)$, аналогичную (5.2).

ЛЕММА 8. Пусть выполнено условие I_p или Π_p. Тогда для всех $\rho \geqslant \rho_0$ и n, удовлетворяющих $(5.1)_I$ или $(5.1)_\Pi$ с некоторым a_1, справедлива оценка

$$s_n(\chi_{d/2} R_d(\kappa, gV_\rho)\chi_{d/2}) \leqslant c(\kappa+1)^p, \quad \kappa>0. \qquad (5.3)$$

○ Поскольку для любого $n \geqslant 1$

$$s_n(\chi_{d/2} R_d(\kappa, \varepsilon, gV_\rho)) = s_n(\chi_{d/2}(H_d^{(i)} - \kappa^2 - i\varepsilon)^{-1}), \; H_d^{(i)} = H_d^{(i)}(gV_\rho),$$

то достаточно установить оценку

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s_n((H_d^{(i)} - \kappa^2 - i\varepsilon)^{-1}) \leqslant C(\kappa+1)^p, \quad \kappa>0, \qquad (5.4)$$

при всех n, подчиняющихся $(5.1)_I$ или $(5.1)_\Pi$. Ниже без потери общности считаем $d=1$, $H^{(i)} := H_d^{(i)}$. Пусть $\lambda = \kappa^2 > 0$ и $P = P(\lambda, \rho, g)$ – спектральный проектор оператора $H^{(i)}$, отвечающий интервалу $[\lambda_\rho^-, \lambda_\rho^+)$, где $\lambda_\rho^\pm = \lambda_\rho^\pm(\lambda, 1) = \lambda \pm c(\lambda^{1/2}+1)^{-p}$. Тогда оператор $(H^{(i)} - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(I-P)$ непрерывен по норме при $\varepsilon \to 0$ и справедлива оценка

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|(H^{(i)} - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(I-P)\| \leqslant c(\lambda^{1/2}+1)^p.$$

Теперь для (5.4) остается доказать, что

$$\left.\begin{array}{ll} \dim P(\lambda,\rho,g) \leq a_1 \tau(\lambda^{1/2}, g\rho^{\alpha-2}) \text{ при условии } & \mathrm{I}_\rho, \\ \dim P(\lambda,\rho,g) \leq a_1 \tau(\lambda^{1/2}, 0) \text{ при условии } & \mathrm{II}_\rho . \end{array}\right\} \quad (5.5)$$

По определению (2.I5) $\dim P(\lambda,\rho,g) = n_\rho(\lambda,1,gV_\rho)$. Для оценки n_ρ воспользуемся соотношением $n(\lambda,1,gV_\rho) = n(\lambda\rho^{-2},\rho,g\rho^{\alpha-2}V)$ между функциями распределения операторов $H^{(i)} = H_1^{(i)}(gV_\rho)$ и $H_\rho^{(i)}(g\rho^{\alpha-2}V)$. Так как $\lambda_\rho^{\pm}(\lambda,1) = \lambda_\rho^{\pm}(\lambda\rho^{-2},\rho)\rho^2$, то отсюда следует, что $n_\rho(\lambda,1,gV_\rho) = n_\rho(\lambda\rho^{-2},\rho,g\rho^{\alpha-2}V)$. Ссылка на (2.I7), (2.I8) завершает доказательство (5.5) ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Пусть $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ – такая функция, что $\eta(x) = 1$, $|x| \geq d/2$; $\eta(x) = 0$, $|x| \leq d/4$. Представим V_ρ в виде суммы

$$V_\rho = V_\rho^{(1)} + V_\rho^{(2)}, \quad V_\rho^{(1)} = \eta V_\rho, \quad V_\rho^{(2)} = (1-\eta)V_\rho. \quad (5.6)$$

Отметим, что потенциал $V_\rho^{(1)}$ удовлетворяет (2.I) и (2.I9) равномерно по $\rho > 0$. Следовательно, для $V_\rho^{(1)}$ справедлива оценка вида (4.2) с постоянной, не зависящей от ρ. Используя этот факт и лемму 6, мы выведем оценку (5.2) из (5.3). Положим в лемме 6 $A_1 = H(gV_\rho^{(1)})$, $A_2 = H_d(gV_\rho^{(1)})$, $W = gV_\rho^{(2)}$, $\lambda = \kappa^2 + i\varepsilon$. Тогда $\hat{A}_1 = H(gV_\rho)$, $\hat{A}_2 = H_d(gV_\rho)$ и согласно (4.4), (4.5)

$$F(\kappa,\varepsilon) = T_d(\kappa,\varepsilon,gV_\rho^{(1)})\left[I - gV_\rho^{(2)} R_d(\kappa,\varepsilon,gV_\rho)\right], \quad (5.7)$$

$$G(\kappa,\varepsilon) = \left[I - gR_d(\kappa,\varepsilon,gV_\rho)V_\rho^{(2)}\right] F(\kappa,\varepsilon). \quad (5.8)$$

Выпишем необходимые нам оценки s – чисел операторов F и G. Пусть номер n удовлетворяет $(5.I)_{\mathrm{I}}$ или $(5.I)_{\mathrm{II}}$. Будем считать, что постоянная a_1 в (5.I) настолько велика, что выполнены условия лемм 5 и 8. Заметим еще, что $V_\rho^{(2)} = V_\rho^{(2)}\chi_{d/2}$ и $|V_\rho^{(2)}| \leq c\rho^\alpha$. Тогда для операторов (5.7), (5.8) справедливы оценки

$$s_{2n-1}(\chi_{d/2}F(\kappa)\chi_{d/2}) \leq s_n(\chi_{d/2}T_d(\kappa,gV_\rho^{(1)})\chi_{d/2}) \times$$

$$\times\left[1 + c\kappa\rho^\alpha s_n(\chi_{d/2}R_d(\kappa,gV_\rho)\chi_{d/2})\right];$$

$$s_{3n-2}(\chi_{d/2}G(\kappa)\chi_{d/2}) \leq s_n(\chi_{d/2}T_d(\kappa, gV_\rho^{(1)})\chi_{d/2}) \times$$
$$\times [1 + C\kappa\rho^\alpha s_n(\chi_{d/2}R_d(\kappa, gV_\rho)\chi_{d/2})]^2.$$

Используем для T_d оценку вида (4.2), и для R_d – оценку (5.3). Тогда для любого $\mu > 0$ при $N \leq N_1$, $\kappa \geq \kappa_1(N_1, \mu)$

$$s_n(\chi_{d/2}F(\kappa)\chi_{d/2}) \leq C(\kappa+1)^p \kappa \rho^\alpha n^{-\mu}, \qquad (5.9)$$

$$s_n(\chi_{d/2}G(\kappa)\chi_{d/2}) \leq C\kappa^2(\kappa+1)^{2p}\rho^{2\alpha}n^{-\mu}. \qquad (5.10)$$

Теперь мы убедимся, что в условиях леммы 7 для любого $\mu_1 > 0$ существует такое $\kappa_1(\mu_1)$, что

$$s_n(\chi_{d/2}F(\kappa)\chi_{d/2}) \leq C\kappa^{-\mu_1}\rho^{-\mu_1}, \qquad (5.11)$$

$$s_n(\chi_{d/2}G(\kappa)\chi_{d/2}) \leq C\kappa^{-\mu_1}\rho^{-\mu_1} \qquad (5.12)$$

при $\kappa \geq \kappa_1$, $\rho \geq \rho_0$ и всех n, удовлетворяющих (5.I) с подходящей постоянной a_1. Пусть вначале выполнено условие I_p. В силу $(5.I)_I$ $n \geq a_1(\kappa^{m-1} + (\kappa\rho^{\alpha-2})^{\frac{m-1}{2}})$ и значит $n^{-1} \leq (2a_1)^{-1} \times$ $\times(\kappa^3\rho^{\alpha-2})^{-(m-1)/2}$. Так как $\alpha > (m+1)/2 \geq 2$, то отсюда и из (5.9) при достаточно большом μ следует (5.II). Пусть выполнено условие Π_p и $\kappa \geq c\rho^\delta$. Согласно $(5.I)_\Pi$ $n \geq a_1\kappa^{m-1}$, а потому $n^{-1} \leq C(\kappa\rho^\delta)^{-(m-1)/2}$ и (5.10) приводит к (5.12).

Проверим теперь условие (4.6) леммы 6. Поскольку для $W = N\kappa V_\rho^{(2)}$ верна оценка $|W| \leq CN_1\kappa\rho^\alpha\chi_{d/2}$, то из (5.II) при достаточно большом μ_1 следует, что

$$s_{\tilde{n}}(|W|^{1/2}F(\kappa)|W|^{1/2}) \leq c\kappa^{-\mu_2}, \ \mu_2 = \mu_1 - 1 > 0, \ \kappa \geq \kappa_1, \qquad (5.13)$$

если $\tilde{n}$ удовлетворяет (5.I). За счет увеличения κ_1 можно добиться того, чтобы правая часть (5.13) не превосходила $\gamma < 1$ при $\kappa \geq \kappa_1$. Из леммы 6 следует, что

$$s_{3n+\tilde{n}-3}(\chi_{d/2}T_d(\kappa, gV_\rho)\chi_{d/2}) \leq s_n(\chi_{d/2}G(\kappa)\chi_{d/2}) +$$
$$+ c\kappa\rho^\alpha s_n(\chi_{d/2}G(\kappa)\chi_{d/2})\, s_n(\chi_{d/2}F(\kappa)\chi_{d/2})$$

для всех n, подчиняющихся (5.I). С помощью (5.II), (5.12) убеждаемся, что правая часть этой оценки во всяком случае не

превосходит $C\kappa^p$. В силу равенства $R = R_d + T_d$ и оценки (5.3) отсюда следует также (5.2) ●

2. Здесь изучается сечение рассеяния $\sigma(\kappa, gV_\rho)$, $N=const$. Напомним, что θ_α определяется равенством (I.3).

ЛЕММА 9. Предположим, что V удовлетворяет условиям (2.I) с $2\alpha > m+1$ и (2.I9). I) Пусть выполнено условие I_p. Тогда при $N \leq N_1$, $\rho \geq \rho_0$

$$\sigma(\kappa, gV_\rho) \leq C\left[1 + \left((N+1)\kappa^{-1}\rho^{\alpha-2}\right)^{(m-1)/2}\right], \kappa \geq \kappa_1(N_1). \qquad (5.I4)$$

Если, кроме того, потенциал имеет асимптотику (I.2), то для любого $N > 0$ при $\kappa^{-1}\rho^{\alpha-2} \to 0$, $\rho \to \infty$

$$\overline{\lim}\, \left| N^{-\varkappa}\sigma(\kappa, gV_\rho) - \theta_\alpha \right| \leq a\left(N^{-\varkappa/2} + N^{-\varkappa}\right), \varkappa = (m-1)(\alpha-1)^{-1}. \qquad (5.I5)$$

2) Пусть выполнено условие Π_p и $\kappa \geq c\rho^\delta$, $\delta > 0$. Тогда для $N \leq N_1$, $\rho \geq \rho_0$

$$\sigma(\kappa, gV_\rho) \leq C, \quad \kappa \geq \kappa_1(N_1). \qquad (5.I6)$$

Если V удовлетворяет еще (I.2), то для любого $N > 0$ при $\kappa \geq c\rho^\delta$, $\rho \to \infty$ имеет место оценка (5.I5).

При доказательстве леммы мы будем использовать асимптотику $\sigma(\kappa, gV)$, установленную в [4]. Введем некоторые обозначения. Для $\omega \in S$ обозначим через Λ_ω плоскость, ортогональную к ω, так что $x = b + \omega z$, $b \in \Lambda_\omega$, $z \in \mathbb{R}$. Для функции q, удовлетворяющей (2.I) при $2\alpha > m+1$, положим

$$\sigma_0(\omega, q) = 4\int_{\Lambda_\omega} db \sin^2\left[4^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} q(b+\omega z)\,dz\right], \qquad (5.I7)$$

$$\sigma_0(q) = \int_S \sigma_0(\omega, q)\,d\omega. \qquad (5.I8)$$

Пусть функции q_ρ, $\rho \geq \rho_0 > 0$ также удовлетворяют (2.I). Введем обозначение

$$\varepsilon(\rho) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} (1+|x|)^\alpha \left| q_\rho(x) - q(x) \right|.$$

В [4] установлено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если функция q непрерывна и удовлетворяет

(2.I9), функции q_ρ подчиняются (2.I9) равномерно по ρ, то при $N \leqslant N_1$, $\kappa \geqslant \kappa_1(N_1)$

$$\sigma(\kappa, g q_\rho) \leqslant a N^{\varkappa}. \tag{5.I9}$$

Если при этом $\varepsilon(\rho) \to 0$, когда $\rho \to \infty$, то равномерно по $N \leqslant N_1$ справедливо соотношение

$$\lim_{\substack{\kappa \to \infty \\ \rho \to \infty}} \sigma(\kappa, g q_\rho) = \sigma_0(N q). \tag{5.20}$$

Отметим, что этот результат неприменим непосредственно к семейству потенциалов V_ρ, поскольку V_ρ стремится к бесконечности в окрестности нуля. Поэтому вначале мы рассмотрим сечение рассеяния на потенциале $V_\rho^{(1)}$ (см. (5.6)), "обрезанном" вблизи нуля. Тогда в силу (5.I9)

$$\sigma(\kappa, g V_\rho^{(1)}) \leqslant a N^{\varkappa}, \; N \leqslant N_1, \; \kappa \geqslant \kappa_1(N_1). \tag{5.2I}$$

Вычислим асимптотику $\sigma(\kappa, g V_\rho^{(1)})$ при $\rho \to \infty$, $\kappa \to \infty$ при условии (I.2). Обозначим $V^{(as)}(x) = \Phi(x/|x|)|x|^{-\alpha}$, так что $V_\rho^{(1)}(x) - V^{(as)}(x)\eta(x) = (1+|x|)^{-\alpha} O(1)$ при $\rho \to \infty$. Согласно (5.20) $\sigma(\kappa, g V_\rho^{(1)}) \to \sigma_0(N V^{(as)} \eta)$ при $\rho \to \infty$, $\kappa \to \infty$. Рассматривая (5.I7), (5.I8), можно непосредственно убедиться, что

$$|\sigma_0(N V^{(as)} \eta) - \sigma_0(N V^{(as)})| \leqslant a.$$

В [4] показано, что $\sigma_0(N V^{(as)}) = N^{\varkappa} \theta_\alpha$. Следовательно, при $\kappa \to \infty$, $\rho \to \infty$

$$\overline{\lim} \, |N^{-\varkappa} \sigma(\kappa, g V_\rho^{(1)}) - \theta_\alpha| \leqslant a N^{-\varkappa}. \tag{5.22}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9. Вначале оценим сечение $\sigma(\kappa, g V_\rho, g V_\rho^{(1)})$.

Докажем, что для любого $\mu_1 > 0$ при $N \leqslant N_1$, $\kappa \geqslant \kappa_1(N_1, \mu_1)$ справедливы неравенства

$$\sigma(\kappa, g V_\rho, g V_\rho^{(1)}) \leqslant a \left[1 + ((N+1)\kappa^{-1} \rho^{\alpha-2})^{(m-1)/2}\right] + \kappa^{-\mu_1}, \tag{5.23$_{\mathrm{I}}$}$$

при условии I_p;

или

$$\sigma(\kappa, g V_\rho, g V_\rho^{(1)}) \leqslant a + c\kappa^{-\mu_1},$$

при условии Π_p и $\kappa \geqslant C\rho^{\delta}$. (5.23$_{\Pi}$)

Обозначим через $\gamma_n = \gamma_n(\kappa, \rho, g)$ s-числа оператора $S(\kappa, gV_\rho, gV_\rho^{(1)})$. Тогда, по определению (2.7)

$$\kappa^{m-1}(2\pi)^{1-m}\sigma(\kappa, gV_\rho, gV_\rho^{(1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 . \tag{5.24}$$

Пусть число n_0 удовлетворяет оценке

$$a_1\tau(\kappa,(N+1)\kappa\rho^{\alpha-2}) \leqslant n_0 \leqslant a_1\tau(\kappa,(N+1)\kappa\rho^{\alpha-2})+1 , \tag{5.25$_{\mathrm{I}}$}$$

при условии I_p;

или

$$a_1\tau(\kappa,0) \leqslant n_0 \leqslant a_1\tau(\kappa,0)+1, \tag{5.25$_{\mathrm{II}}$}$$

при условии II_p.

В силу леммы 7 можно считать, что при $n=n_0$ справедлива оценка (5.2). Оценим суммы вида (5.24) по $n<3n_0$ и $n \geqslant 3n_0$ порознь. В силу унитарности $S(\kappa, gV_\rho, gV_\rho^{(1)})$ выполнено $\gamma_n^2 \leqslant 4$, и поэтому $\sum_{n<3n_0} \gamma_n^2 \leqslant 12 n_0$. Следовательно, при $\kappa \geqslant \kappa_1(N_1)$, $\rho \geqslant \rho_0$ имеют место неравенства

$$\sum_{n<3n_0} \gamma_n^2 \leqslant \begin{cases} a\left[\kappa^{m-1}+((N+1)\kappa\rho^{\alpha-2})^{(m-1)/2}+1\right], & \text{при условии } \mathrm{I}_p, \\ a(\kappa^{m-1}+1), & \text{при условии } \mathrm{II}_p. \end{cases} \tag{5.26}$$

Для оценки суммы по $n \geqslant 3n_0$ используем представление (2.6). Положим

$$G_1(\kappa,\rho,g) = I - g|V_\rho^{(2)}|^{1/2} R(\kappa, gV_\rho)(V_\rho^{(2)})^{1/2}, \quad (V_\rho^{(2)})^{1/2} = V_\rho^{1/2}|V_\rho^{(2)}|^{-1/2},$$

$$G_2(\kappa,\rho,g) = Z_1(\kappa, gV_\rho^{(1)})|V_\rho^{(2)}|^{1/2}.$$

Из (2,6) следует, что

$$\sum_{n\geqslant 3n_0} \gamma_n^2 = \sum_{n\geqslant n_0+1} \gamma_{n_0+2n-2}^2 + \sum_{n\geqslant n_0+1} \gamma_{n_0+2n-1}^2 \leqslant \tag{5.27}$$

$$\leqslant c N_1^2 \kappa^2 s_{n_0}^2(G_1) \sum_{n\geqslant n_0+1} s_n^4(G_2).$$

Так как $|V_\rho^{(2)}| \leqslant c\rho^\alpha \chi_{d/2}$, то из (5.2) вытекает оценка

$$s_{n_0}(G_1) \leqslant C\rho^\alpha \kappa^{1+\rho}, \ \kappa \geqslant \kappa_1. \tag{5.28}$$

Далее, поскольку $V_\rho^{(1)}$ удовлетворяет (2.I), (2.I9) равномерно по ρ, то согласно (4.3)

$$s_n(G_{-2}) \leqslant C\rho^{\alpha/2} n^{-\mu} \tag{5.29}$$

при $n \geqslant a\kappa^{m-1}$, $\kappa \geqslant \kappa_1$. Оценим правую часть (5.27) с помощью (5.28) и (5.29), считая, что $\mu > 1/4$:

$$\sum_{n \geqslant 3n_0} \gamma_n^2 \leqslant C\kappa^{4+2p}\rho^{4\alpha} n_0^{-4\mu+1}. \tag{5.30}$$

При условии I_p или условии $П_p$ и дополнительном требовании $\kappa \geqslant c\rho^\delta$ с помощью $(5.25)_I$ или $(5.25)_П$ можно доказать, выбирая достаточно большое μ в (5.30), что правая часть (5.30) оценивается через $C\kappa^{-\mu_1}$ с произвольным $\mu_1 > 0$. Отсюда и из (5.26) с учетом (5.24) получаем (5.23).

Для доказательства оценок (5.I4), (5.I6) применим неравенство (2.8а), в котором для $\sigma(\kappa, gV_\rho, gV_\rho^{(1)})$ используем $(5.23)_I$ или $(5.23)_П$, а для $\sigma(\kappa, gV_\rho^{(1)})$ – оценку (5.2I). Для доказательства (5.I5) прежде всего отметим, что согласно $(5.23)_I$ при условии I_p и $\kappa^{-1}\rho^{\alpha-2} \to 0$, $\rho \to \infty$

$$\overline{\lim}\ \sigma(\kappa, gV_\rho, gV_\rho^{(1)}) \leqslant a. \tag{5.3I}$$

Аналогичным образом, согласно $(5.23)_П$ оценка (5.3I) выполняется при условии $П_p$ и $\rho \to \infty$, $\kappa \geqslant c\rho^\delta$. Теперь воспользуемся неравенством (2.8в) в сочетании с (5.3I):

$$\overline{\lim}\, N^{-\varkappa}|\sigma(\kappa, gV_\rho) - \sigma(\kappa, gV_\rho^{(1)})| \leqslant 2N^{-\varkappa}a^{1/2}\left[a^{1/2} + \overline{\lim}\,\sigma^{1/2}(\kappa, gV_\rho^{(1)})\right]. \tag{5.32}$$

Здесь подразумевается, что $\kappa^{-1}\rho^{\alpha-2} \to 0$, $\rho \to \infty$ (при условии I_p) или $\rho \to \infty$, $\kappa \geqslant c\rho^\delta$ (при условии $П_p$). Согласно (5.2I) правая часть (5.32) не превосходит $\tilde{a}(N^{-\varkappa/2} + N^{-\varkappa})$. Остается сослаться на (5.22)●

3. Здесь мы докажем, наконец, теоремы I′, 2′. Для этого воспользуемся леммой 9 при $\rho = \rho_{N_0} = (NN_0^{-1})^\nu$, $\nu = (\alpha-1)^{-1}$, где $N_0 > 0$ – некоторое постоянное число. Положим еще

$$\hat{\kappa} = \rho\kappa, \quad \hat{g} = \rho^{2-\alpha} g, \quad \hat{N} = \hat{g}\hat{\kappa}^{-1} = N_0.$$

Тогда имеют место соотношения

$$\hat{\kappa}=N_0^{-\nu}\,Q_\alpha^{\nu}\ ,\ \ N_0\hat{\kappa}^{-1}\rho^{\alpha-2}=M_\alpha^{-\nu}\,N_0^{2\nu}. \tag{5.33}$$

Согласно (2.9)

$$N^{-\varkappa}\,\sigma(\kappa,gV)=N_0^{-\varkappa}\,\sigma(\hat{\kappa},\hat{g}V). \tag{5.34}$$

Таким образом, задача сведена к случаю $\hat{N}=const$ и поэтому можно применить лемму 9.

Действительно, проверим с ее помощью вначале оценки сверху (2.II), (2.I3). Так как $N\geqslant c$, $Q_\alpha\geqslant c$, то $\rho\geqslant cN_0^{-\nu}$ и, согласно первому из равенств (5.33) $\hat{\kappa}\geqslant cN_0^{-\nu}$. Выбирая достаточно малое N_0, добьемся выполнения неравенств $\hat{\kappa}\geqslant\kappa_1$, $\rho\geqslant\rho_0$. Теперь из (5.I4) следует, что при условии I_p

$$\sigma(\hat{\kappa},\hat{g}V_\rho)\leqslant c\left[1+\left((N_0+1)\,\hat{\kappa}^{-1}\rho^{\alpha-2}\right)^{(m-1)/2}\right]\leqslant\tilde{c}\left[1+M_\alpha^{-\varkappa/2}\right].$$

Для вывода (2.II) остается сослаться на (5.34). Далее, пусть выполнены условия теоремы 2′. Тогда $Q_\alpha\geqslant cN^{\delta}$ и, следовательно, $\hat{\kappa}\geqslant c\rho^{\delta}$. Поэтому в силу леммы 9 справедлива оценка (5.I6). Из нее с помощью (5.34) выводится (2.I3).

Докажем асимптотику (I.4). Так как $N\to\infty$ и $Q_\alpha\to\infty$, то $\hat{\kappa}\to\infty$ и $\rho_{N_0}\to\infty$ для любого $N_0>0$. Кроме того, согласно второму из равенств (5.33) $\hat{\kappa}^{-1}\rho^{\alpha-2}\to 0$ при $M_\alpha\to\infty$. Из (5.34) и из первой части леммы 9 следует, что при $M_\alpha\to\infty$, $N\to\infty$

$$\overline{\lim}\,|N^{-\varkappa}\sigma(\kappa,gV)-\theta_\alpha|\leqslant c\left(N_0^{-\varkappa/2}+N_0^{-\varkappa}\right),\ \forall N_0>0. \tag{5.35}$$

Аналогичным образом, в условиях теоремы 2′ из второй части леммы 9 выводится оценка (5.35) при $N\to\infty$, $Q_\alpha\geqslant cN^{\delta}$. В силу произвольности N_0 (5.35) приводит к (I.4).

§ 6. Приложение. Доказательство леммы I

Пусть V удовлетворяет (2.I0) с $\alpha>2$. Введем обозначения $2V_\pm=|V|\pm V$, $V_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^m}(1+|x|)^{\alpha}V_-(x)$. Для доказательства леммы I достаточно установить оценку

$$n_{-1}(\lambda,\rho,gV)\leqslant c\,\tau(\lambda^{1/2}\rho,gV_0),\ \lambda>0,\ \rho\geqslant\rho_0>0,\ g\geqslant 0. \tag{6.I}$$

В самом деле, при $V_0 \neq 0$ оценка (6.I) совпадает с (2.I7) при $p=-1$. Если же V удовлетворяет (2.I2), то $V_0 = 0$, а потому (6.I) совпадает с (2.I8) при $p=-1$.

Положим

$$\hat{n}(\lambda,\rho,gV)=|B_1|(2\pi)^{-m}\int_{B_\rho}[\lambda-gV(x)]_+^{m/2}\,dx$$

($|B_1|$ – объем шара B_1) и

$$F_1(\lambda,\rho)=|\lambda|^{(m-1)/2}\int_{B_\rho}(1+|x|)^{-1}\,dx,$$

$$F_2(\lambda,\rho,g)=\int_{B_\rho}[\lambda-gV(x)]_+^{(m-1)/2}(1+|x|)^{-1}\,dx.$$

Рассмотрим область $\Omega_\varepsilon=\Omega_\varepsilon(\lambda,\rho,g)\subset B_\rho$, $\varepsilon\in(0,1]$ следующего вида $\Omega_\varepsilon=\{x\in B_\rho : gV(x)\leqslant \varepsilon g(1+|x|)^{-\alpha}+2|\lambda|\}$ и обозначим

$$F_3(\lambda,\rho,g,\varepsilon)=\int_{\Omega_\varepsilon(\lambda,\rho,g)}[g(1+|x|)^{-\alpha}]^{(m-1)/2}(1+|x|)^{-1}\,dx.$$

Следующая оценка для функции распределения $n(\lambda,\rho,gV)$ установлена В.Я.Иврием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $m\geqslant 3$, $V\in C^\infty(B_\rho)$ и удовлетворяет (2.I0) при $\alpha>2$. Тогда для всех $\rho\geqslant\rho_0>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $g\geqslant 0$ справедлива оценка

$$|n(\lambda,\rho,gV)-\hat{n}(\lambda,\rho,gV)|\leqslant c(\varepsilon)[F_1(\lambda,\rho)+F_2(\lambda,\rho,g)+F_3(\lambda,\rho,g,\varepsilon)],\quad \forall\varepsilon\in(0,1]. \tag{6.2}$$

Теперь мы можем проверить (6.I). Согласно (6.2)

$$n_{-1}(\lambda,\rho,gV)\leqslant \hat{n}_{-1}(\lambda,\rho,gV)+c(\varepsilon)[F_1(\lambda,\rho)+F_2(\lambda,\rho,g)+F_3(\lambda,\rho,g,\varepsilon)], \tag{6.3}$$

где

$$(2\pi)^m|B_1|^{-1}\hat{n}_{-1}(\lambda,\rho,gV)=\int_{B_\rho}\left\{[\lambda^+-gV(x)]_+^{\frac{m}{2}}-[\lambda^--gV(x)]_+^{\frac{m}{2}}\right\}dx, \tag{6.4}$$

и $\lambda^\pm:=\lambda^\pm_{-1}(\lambda,\rho)$ определены равенством (2.I4) при $p=-1$. Для (6.I) достаточно доказать, что каждое слагаемое в правой части (6.3) оценивается сверху через $\tau(\lambda^{1/2}\rho, gV_0)$.

Рассмотрим вначале F_j, $j=1,2,3$. Очевидно, для F_1 справедливо неравенство

$$F_1(\lambda,\rho) \leqslant c\lambda^{(m-1)/2}\rho^{m-1} \leqslant c\tau(\lambda^{1/2}\rho,\, gV_0). \qquad (6.5)$$

Чтобы оценить F_2, F_3 отметим одно очевидное неравенство. Так как $\alpha > 2$, то для любого $\rho \geqslant \rho_0 > 0$

$$I(\rho) := \int_{B_\rho} (1+|x|)^{-\alpha(m-1)/2}(1+|x|)^{-1}dx \leqslant c < \infty. \qquad (6.6)$$

Далее, так как $[\lambda - gV(x)]_+ \leqslant \lambda + cgV_0(1+|x|)^{-\alpha}$, то $[\lambda - gV(x)]_+^{\frac{m-1}{2}} \leqslant c\lambda^{\frac{m-1}{2}} + c(gV_0)^{\frac{m-1}{2}}(1+|x|)^{-\frac{\alpha(m-1)}{2}}$, и вследствие (6.5), (6.6)

$$F_2(\lambda,\rho,g) \leqslant c\,F_1(\lambda,\rho) + c\,(gV_0)^{\frac{m-1}{2}}\, I(\rho) \leqslant c\tau(\lambda^{1/2}\rho, gV_0).$$

Рассмотрим F_3. Предположим вначале, что $V_0 \neq 0$. Тогда в силу (6.6)

$$F_3(\lambda,\rho,g,\varepsilon) \leqslant C g^{(m-1)/2} I(\rho) \leqslant c\tau(\lambda^{1/2}\rho, gV_0).$$

Допустим, что выполнено условие (2.I2). Тогда $cg(1+|x|)^{-\alpha} \leqslant V(x) \leqslant \varepsilon g(1+|x|)^{-\alpha} + 2\lambda$ при $x \in \Omega_\varepsilon$ и поэтому $g(1+|x|)^{-\alpha} \leqslant c\lambda$, $x \in \Omega_\varepsilon$ при достаточно малом ε. Следовательно,

$$F_3(\lambda,\rho,g,\varepsilon) \leqslant c\,F_1(\lambda,\rho) \leqslant c\tau(\lambda^{1/2}\rho, gV_0).$$

Таким образом, F_j, $j=1,2,3$ удовлетворяют оценке вида (6.I).

Остается рассмотреть $\hat{n}_{-1}$. Введем обозначение $\Omega_\pm = \Omega_\pm(\lambda,\rho,g) = \{x \in B_\rho : gV(x) \leqslant \lambda^\pm\}$ и запишем (6.4) в виде

$$(2\pi)^m |B_1|^{-1}\hat{n}_{-1}(\lambda,\rho,gV) = J_1(\lambda,\rho,g) + J_2(\lambda,\rho,g),$$

где

$$J_1 = \int_{\Omega_-} \left\{[\lambda^+ - gV(x)]^{m/2} - [\lambda^- - gV(x)]^{m/2}\right\} dx,$$

$$J_2 = \int_{\Omega_+ \setminus \Omega_-} [\lambda^+ - gV(x)]^{m/2} dx.$$

Оценим $\mathcal{J}_1$. Легко убедиться, что

$$\mathcal{J}_1 = \frac{m}{2}\int_{\Omega_-} dx \int_{\lambda^-}^{\lambda^+} d\lambda\,(\lambda - gV(x))^{m/2-1}.$$

Так как $0 \leqslant \lambda - gV(x) \leqslant \lambda^+ + c\,gV_0\,(1+|x|)^{-\alpha}$ при $\lambda \in [\lambda^-, \lambda^+]$, то для $\mathcal{J}_1$ справедлива оценка

$$\mathcal{J}_1 \leqslant c(\lambda^+ - \lambda^-)\Big[(\lambda^+)^{m/2-1}\int_{B_\rho} dx + (gV_0)^{m/2-1}\int_{B_\rho}(1+|x|)^{-\alpha(m/2-1)}dx\Big].$$

По определению (2.I4) $\lambda^+ = \lambda + C\rho^{-2}(\lambda^{1/2}\rho + 1)$ и $\lambda^+ - \lambda^- = C\rho^{-2}(\lambda^{1/2}\rho+1)$. Стало быть

$$\mathcal{J}_1 \leqslant C\rho^{-2}(1+\lambda^{1/2}\rho)\Big\{\big[\lambda^{m/2-1} + \rho^{-m+2}(1+\lambda^{1/2}\rho)^{m/2-1}\big]\rho^m + (gV_0)^{m/2-1}\int_0^\rho (1+r)^{-\alpha(m/2-1)+m-1}\,dr\Big\}.$$

Поскольку $\alpha > 2$, интеграл в правой части не превосходит $C\rho^2$. Окончательно получаем

$$\mathcal{J}_1 \leqslant c\big[1 + \lambda^{1/2}\rho + (gV_0)^{1/2}\big]^{m-1} \leqslant c\tau(\lambda^{1/2}\rho,\, gV_0). \qquad (6.7)$$

Оценим $\mathcal{J}_2$. Так как $|gV(x) - \lambda^+| \leqslant \lambda^+ - \lambda^- \leqslant C\rho^{-2}(1+\lambda^{1/2}\rho)$ при $x \in \Omega_+ \setminus \Omega_-$, то

$$\mathcal{J}_2 \leqslant C\rho^{-m}\big[1 + (\lambda^{1/2}\rho)^{m/2}\big]\int_{B_\rho} dx \leqslant c\tau(\lambda^{1/2}\rho,\, gV_0).$$

В сочетании с (6.7) последнее неравенство дает $\hat{n}_{-1}(\lambda,\rho,g) \leqslant c\tau(\lambda^{1/2}\rho, gV_0)$. Доказательство (6.I) завершено.

Литература

I. S o b o l e v A.V., Y a f a e v D.R. On the quasi-classical limit of the total scattering cross-section in non relativistic quantum mechanics. - Ann.Inst.H.Poincaré, 1986, v.44, N 2, p.195-210.

2. Б и р м а н М.Ш., Я ф а е в Д.Р. Асимптотика спектра S - матрицы при потенциальном рассеянии. - Докл.АН СССР, I980, т.255, № 5, с.I085-I087.

3. С о б о л е в А.В., Я ф а е в Д.Р. Фазовый анализ в задаче рассеяния на радиальном потенциале. - В кн.: Краевые задачи

математической физики и смежные вопросы теории функций, I7. Зап.научн.семинаров ЛОМИ, I985, т.I47, с.I55-I78.
4. Y a f a e v D.R. The eikonal approximation and the asymptotics of the total scattering cross-section for the Schrödinger equation. - Ann.Inst.H.Poincaré,1986,v.44,N4,p.397-425.
5. R o b e r t D., T a m u r a H. Asymptotique semi-classique pour la densite spectrale locale d' operateurs de Schrödinger.Preprint École Polytechnique,expose nIV, 1985.
6. E n s s V., S i m o n B. Finite total cross-sections in nonrelativistic quantum mechanics. - Commun.Math.Phys.,1980, 76, p.177-209.
7. Г о х б е р г И.Ц., К р е й н М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Москва, Наука, I965.
8. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции, II. Москва, „Наука", I974.

Sobolev A.V. The quasi-classical asymptotics of the scattering cross-section for asymptotically homogeneous potentials.

The total scattering cross-section by a potential $g\,V(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $m>3$, is considered for large coupling constants g and wave numbers κ. It is supposed that $V(x) \sim \Phi(x/|x|)\,|x|^{-\alpha}$, $2\alpha > m+1$, as $|x| \to \infty$. It is shown that as $g\kappa^{-1} \to \infty$, $g^{3-\alpha}\kappa^{2(\alpha-2)} \to \infty$ the cross-section asymptotically equals $\theta_\alpha (g\kappa^{-1})^{\varkappa}$, $\varkappa = (m-1)(\alpha-1)^{-1}$. Here the coefficient θ_α is determined only by the function Φ and the number α. Under additional sssumptions $\Phi>0$, $V>0$ this asymptotics holds in the broader region $g\kappa^{-1} \to \infty$, $g\kappa^{\alpha-2} \geqslant c(g\kappa^{-1})^{\delta}$, $\delta > 0$.