Ю. Г. Тетерин, Действие группы классов на представлениях чисел тернарной квадратичной формой. Формулы Зигеля и Кнезера–Сии–Петерса, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1986, том 151, 141–158

https://www.mathnet.ru/znsl5054

Ю.Г.Тетерин

ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ КЛАССОВ НА ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЧИСЕЛ ТЕРНАРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ. ФОРМУЛЫ ЗИГЕЛЯ И КНЕЗЕРА-СИИ-ПЕТЕРСА

I. Введение. В этой статье будет построена законченная "теория поворотов" целых векторов на эллипсоидах и гиперболоидах, т.е. определено и изучено действие группы классов бинарных квадратичных форм определителя Δm на множестве целых примитивных решений уравнений $f(\vec{x}) = m$, где f пробегает род тернарных квадратичных форм определителя $D = \Delta \omega^2$. Из полученных результатов, в частности, прямо следует элементарное, чисто арифметическое доказательство формулы Зигеля для взвешенного числа представлений родом и формул Кнезера-Сии-Петерса для взвешенного числа представлений спинорным родом тернарных форм.

В следующей статье [6] мы докажем эргодичность операторов, индуцированных этим действием, т.е. покажем, что эти операторы асимптотически равномерно перемешивают представления по классам в спинорном роде, по модулю и по поверхности соответствующих эллипсоидов. Отсюда, в частности, будет следовать асимптотическая формула для числа представлений положительной тернарной формой, лежащих в заданном классе вычетов и в заданной области на поверхности эллипсоида.

Коротко об истории вопроса. В 1922 г. Б.А.Венков [1] построил теорию "целых поворотов" для целых точек на сфере и вывел из нее, в частности, новое доказательство формул Гаусса для числа представлений чисел суммой трех квадратов. (Доказательство Венкова, несколько упрощенное и изложенное на более современном языке, содержится также в статье Рема [11].) Затем "теория поворотов" была частично обобщена Ю.В.Линником [2] на случай форм инвариантов $[\Omega,1]$ где Ω - степень нечетного простого числа. А.В.Малышев перенес эти результаты на произвольные положительные тернарные формы. При этом, однако, действие бинарной формы на целый вектор удавалось определить только в том случае, когда это действие не выводило вектор в другую решетку тернарного рода. В нашей работе это ограничение снимается. Наконец, "теория поворотов" для простейшей неопределенной формы $xy - z^2$ была построена Ю.В.Линником [3] и развита А.В.Малышевым совместно с У.Пачевым [5], а также Райсом [12].

Приношу глубокую благодарность А.В.Малышеву за формулировку задачи и внимание к работе.

2. <u>Определения и обозначения</u>. Мы будем в дальнейшем придерживаться бескоординатного языка и определений [10] и [7]. Пусть V – трехмерное $\mathbb{Q}$-пространство с невырожденной квадратичной функцией f, M – решетка определителя D в V. (На классическом координатном языке этому соответствует задание формы $F(x_1, x_2, x_3)$; тогда $V=\mathbb{Q}^3$, $f=F$, $M=\mathbb{Z}^3$.) Не ограничивая общности, мы будем считать в дальнейшем, что форма f на M является собственно целой, т.е. $f(M)\subset\mathbb{Z}$ в обозначениях [10]. Тогда $D\in\mathbb{Z}$, $f(M)\subset\mathbb{Z}$. Как обычно, cls, spn, gen обозначают класс, спинорный род и род, θ – спинорная норма, $O^+(V)$ – группа собственных автометрий V, $O^+(M)=\{\alpha\in O^+(V)\,|\,\alpha M = M\}$ (см. [7] или [10]).

Пусть $\mathfrak{A}$ – четная алгебра Клиффорда пространства (V, f), $N(X)=X\bar{X}$ – приведенная норма в $\mathfrak{A}$; $\mathcal{O}$ – порядок в $\mathfrak{A}$, отвечающий M, т.е. найдется такое инъективное вложение $V\longrightarrow\mathfrak{A}$, отождествляющее V с пространством "чистых" кватернионов (и, следовательно, $\mathfrak{A}=\mathbb{Q}\oplus V$, $\bar{\vec{x}}=-\vec{x}$ для $\vec{x}\in V$), что $\mathcal{O}=\mathbb{Z}\oplus M$ *) и

$$N(X)=x_0^2+d\cdot f(\vec{x}) \text{ для любого } X=x_0+\vec{x}\in\mathbb{Q}\oplus V. \quad (1)$$

Определение и необходимые нам свойства таких порядков приведены в статье [6] этого сборника. Такой порядок существует для любого $d=\Delta t^2$, $t\in\mathbb{Z}$, где Δ – один из инвариантов порядка формы (f, M) (см. [6]), $\Delta\omega^2=D$, $\omega\in\mathbb{Z}$.

Если R – кольцо (или группа), то R_p – его пополнение относительно p-адической метрики, $R_{\mathbb{A}}\subset\prod_{p\leqslant\infty} R_p$ – его аделизация (см. [10]) и R^* – группа его обратимых элементов, причем $R^*_{\mathbb{A}}=(R_{\mathbb{A}})^*$. Кроме того, $O^+_{\mathbb{A}}(M)=\{\Sigma\in O^+_{\mathbb{A}}(V)\,|\,\Sigma M=M\}$.

Обозначим $X\triangledown Y=XYX^{-1}$ $(X,Y\in\mathfrak{A}^*_{\mathbb{A}})$. Тогда известно (см. [7]), что $h: X\longrightarrow X\triangledown|_V$ есть гомоморфизм $\mathfrak{A}^*$ на $O^+(V)$ с ядром $\mathbb{Q}^*$ (и $\mathfrak{A}^*_{\mathbb{A}}$ на $O^+_{\mathbb{A}}(V)$ с ядром $\mathbb{Q}^*_{\mathbb{A}}$), и $\theta(X\triangledown|_V)=N(X)\cdot\mathbb{Q}^{*2}$. Если $H\subset\mathfrak{A}^*_{\mathbb{A}}$, то мы обозначаем $\tilde{H}=h(H)$.

Для $\vec{x}\in V$ обозначим $O^+(V,\vec{x})=\{\alpha\in O^+(V)\,|\,\alpha\vec{x}=\vec{x}\}$,

$$O^+(K,\vec{x})=O^+(K)\cap O^+(V,\vec{x}),\quad \tilde{\mathcal{O}}^*(\vec{x})=\tilde{\mathcal{O}}^*\cap O^+(V,\vec{x}).$$

---

*) Можно рассматривать и несколько более общие порядки, с условием $\mathcal{O}\cap V=M$ вместо $\mathcal{O}=\mathbb{Z}\oplus M$. Однако в этом случае приходится различать собственно и несобственно примитивные представления. Для последних "теория поворотов" оказывается более сложной – см. [2], [3], [5].

Аналогично для $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}^{+}$.

Пусть $\psi_1\mathcal{O},\dots,\psi_k\mathcal{O}, (\psi_i \in \mathfrak{O}_{\mathbb{A}}^{*})$ – представители всех классов правых $\mathcal{O}$-идеалов, $M_i = \psi_i \triangledown M$ и $\mathcal{O}_i = \psi_i \triangledown \mathcal{O} = \mathbb{Z} \oplus M_i$. Тогда порядки $\mathcal{O}_i$ отвечают M_i при том же вложении V в $\mathfrak{O}$ (и при том же d). Из определения немедленно следует, что $\{M_i\}_{i=1,\dots,k}$ содержит представителей всех классов из рода M. Пусть $(M_i, \vec{x}), \vec{x} \in M_i$, – представление числа $m = f(\vec{x})$ решеткой M_i. $\mathcal{O}$-родом представления $(M_i, \vec{x})$ называем совокупность представлений $(M_j, \vec{y})$, $j = 1,\dots,k$, с условием $\vec{y} = (\psi_j \psi_i^{-1} E) \triangledown \vec{x}$, $E \in \mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}^{*} = \psi_i \triangledown \mathcal{O}_{\mathbb{A}}^{*}$; $\mathcal{O}$-классом – совокупность представлений $(M_i, E \triangledown \vec{x}), E \in \mathcal{O}_i^{*}$. $\varrho(m, M_p/\mathcal{O}_p)$ обозначает число $\mathcal{O}_p$-классов примитивных представлений m решеткой M_p. Тогда из теорем о представлениях родом форм ([7], гл.9) следует, что число $\mathcal{O}$-родов примитивных представлений числа m равно $\prod_p \varrho(m, M_p/\mathcal{O}_p)$ (Если $p \nmid 2Dd$, то $\varrho(m, M_p/\mathcal{O}_p) = 1$ – см. лемму 5.) Если форма f положительна и $d \neq 1$, то из формулы (I) следует, что $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}_i^* = \pm 1$, так что в этом случае каждый $\mathcal{O}$-класс состоит только из одного представления. Напомним также, что обычный класс представления $(K, \vec{x})$ – это совокупность представлений $(\alpha K, \alpha\vec{x}), \alpha \in O^{+}(V)$.

Для фиксированной системы представителей классов идеалов $\psi_i\mathcal{O}$ определим "поворот" $\mathcal{O}$-класса представления $(M_i, \vec{x})$ правым $\mathcal{O}_i$-идеалом $\mathfrak{J}$ следующим образом. $\mathcal{O}$-идеал $\mathfrak{J}\psi_i$ принадлежит ровно одному классу идеалов $\mathfrak{O}^*\psi_j\mathcal{O}$, $(1 \leqslant j \leqslant k)$, т.е. $\mathfrak{J} = A\psi_j\psi_i^{-1}\mathcal{O}_i$, где $A \in \mathfrak{O}^*$, и класс $A\mathcal{O}_j^*$ определяется однозначно. Тогда по определению

$$\mathfrak{J} \triangledown (M_i, \mathcal{O}_i^* \triangledown \vec{x}) = (M_j, \mathcal{O}_j^* A^{-1} \triangledown \vec{x}), \qquad (2)$$

т.е. "поворот" равен $\mathcal{O}$-классу $(M_j, A^{-1} \triangledown \vec{x})$.

Через $[a, 2b, c]$ мы обозначаем бинарную форму $ax^2 + 2bxy + cy^2$ определителя $ac - b^2$, через $\mathcal{L}(m)$ – группу классов (собственной эквивалентности) собственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя m;

$\mathcal{L}^{+}(m) = \mathcal{L}(m)/\{\pm e\}$, где e – "главная" форма: $e(x,y) = x^2 + my^2$; $h^{+}(m) = |\mathcal{L}^{+}(m)|$ – число таких классов. Ясно, что в случае $m > 0$ $\mathcal{L}^{+}(m)$ изоморфно подгруппе положительных классов из $\mathcal{L}(m)$ и $h^{+}(m)$ равно числу таких классов.

Пусть $\theta(V) = \theta(O^{+}(V))$, $\theta_{\mathbb{A}}(M) = \theta(O_{\mathbb{A}}^{+}(M))$; $G = \theta_{\mathbb{A}}(V)/\theta(V)\,\theta_{\mathbb{A}}(M)$, g – гомоморфизм $\mathbb{Q}^* \longrightarrow G$, задаваемый на простых числах так: $g(p) =$

$=i(p)\,\theta(V)\,\theta_{\mathbb{A}}(M)$, где $i(p)=\{i_q\}_q \in \mathbb{Q}^*_{\mathbb{A}}$, $i_p=p$, $i_q=1$ при $q\neq p$. Стандартный изоморфизм приводит G и g к тому виду, который рассматривается в [7], гл.II, если ограничить g на числа a с условием $a\in \mathbb{Z}^*_p$ при $p\notin P$, $a>0$. G действует на множестве спинорных родов в роде M. Пусть $\varphi\in \mathcal{L}^+(dm)$, $m\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$; $a\in\varphi(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$, $(a,2D)=1$. Положим $g(\varphi)=g(a)$. Тогда $g:\mathcal{L}^+(dm)\longrightarrow G$ является корректно определенным гомоморфизмом групп. Это следует из [7], лемма 4.3 гл.II, определения композиции в $\mathcal{L}$ (гл.I4) и того факта, что $\theta(O^+(M_p))\supset \supset N(\theta^*_{M_p})\mathbb{Q}^{*2}_p\supset \mathbb{Z}^*_p\mathbb{Q}^{*2}_p$ при $p\nmid 2d$.

Наконец, пусть

$$N_p(dm)=\{x^2+dmy^2\neq 0\mid x,y\in\mathbb{Q}_p\},$$

$$N_{\mathbb{A}}(dm)=\mathbb{Q}^*_{\mathbb{A}}\cap\prod_{p\leqslant\infty}N_p(dm),$$

$$\mathcal{T}(\mathrm{gen}\,M)=\{m\in\mathbb{Z},m\neq 0\mid -dm\notin\mathbb{Q}^{*2},\ \theta_{\mathbb{A}}(M)\subset N_{\mathbb{A}}(dm)\}.$$

Если $m\in\mathcal{T}(\mathrm{den}\,M)$, то $m=\pm\delta n^2$, где $\delta\mid 2D$, $n\in\mathbb{Z}$.

3. Основные результаты. Здесь мы определим действие группы $\mathcal{L}^+(dm)$ на множестве всех классов примитивных представлений числа m родом M и на множестве $\mathcal{O}$-классов представлений. Первое из них является просто факторизацией второго. Каждое из этих действий обладает своими преимуществами и недостатками. Так, первое действие гораздо проще определяется, не зависит от выбора представителей классов идеалов в $\mathcal{O}\!\iota$ и определяется на полных классах представлений, а не только на представлениях, принадлежащих решеткам M_i, как второе. С другой стороны, при действии $\mathcal{L}^+$ на $\mathcal{O}$-классах стабильная подгруппа любого элемента тривиальна (равна $\{\pm e\}$), а орбиты совпадают с $\mathcal{O}$-родами представлений, в то время как вычисление стабильных подгрупп и орбит для первого действия связано с определенными сложностями. Кроме того, эргодические свойства индуцированных этими действиями операторов наиболее естественно определяются и доказываются именно для операторов на $\mathcal{O}$-классах.

Применяя к полученным $\mathcal{L}^+$-множествам формулу орбит, мы получим элементарное доказательство формулы Зигеля для взвешенного числа представлений тернарным родом. Более того, мы покажем, что при действии $\varphi\in\mathcal{L}^+$ на представление из $\mathrm{Spn}\,K$ получается представление из $g(\varphi)\,\mathrm{Spn}\,K$. Отсюда вытекает элементарное доказательство результата Кнезера [9], что вместе с вычислениями Сии [8] даст нам формулу для взвешенного числа представлений спинорным родом. Подчеркнем, что оба доказательства являются чисто арифметическими. То, что при этом используется язык аделей, несущественно, так как легко проверяется, что все рассуждения могут быть проведены в терминах конечных систем сравнений.

Все эти результаты формулируются в теоремах I, 2 и 3, доказательству которых будут посвящены оставшиеся два раздела статьи.

Итак, пусть $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $K \in gen\, M$, $(K, \vec{x})$ – примитивное представление, $f(\vec{x}) = m$; $\varphi = [a, 2b, c]$ – собственно примитивная форма определителя dm и $(a, 2Dd) = 1$. Тогда примитивный кватернион $b + \vec{x}$ нормы $b^2 + dm = ac$ содержится в однозначно определенном целом правом $\mathcal{O}_K$-идеале $\Sigma\mathcal{O}_K$, $\Sigma \in \mathcal{O}_{KA}$ нормы $N(\Sigma\mathcal{O}_K) = |a|$ ([6], лемма 5; из доказываемой далее леммы I будет следовать, что ограничение $(a, 2Dd) = 1$ в этом случае несущественно). Тогда действие φ на класс $(K, \vec{x})$ определяется как

$$\varphi \circ cls(K, \vec{x}) = cls(\Sigma \triangledown K, \vec{x}). \qquad (3)$$

Если $K = M_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, и значит $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_i$, то действие φ на $\mathcal{O}$-класс $(M_i, \vec{x})$ определяется как его "поворот" идеалом $\Sigma\mathcal{O}_i$ (см. (2)):

$$\varphi \circ (M_i, \mathcal{O}_i^* \triangledown \vec{x}) = \Sigma\mathcal{O}_i \triangledown (M_i, \mathcal{O}_i^* \triangledown \vec{x}). \qquad (4)$$

ТЕОРЕМА I. а) Соотношения (3) и (4) задают на множестве классов примитивных представлений числа m родом M и на множестве $\mathcal{O}$-классов примитивных представлений m решетками M_i, $i = 1, \ldots, k$ структуру $\mathcal{L}^+(dm)$-множеств;

б) $\mathcal{L}^+$-структура множества классов представлений индуцирована факторизацией $\mathcal{L}^+$-множества $\mathcal{O}$-классов на классы представлений;

в) стабильная подгруппа любого $\mathcal{O}$-класса состоит из одного элемента $\mathcal{L}^+$: $St\,(M_i, \mathcal{O}_i^* \triangledown \vec{x}) = \{\pm e\}$; орбита любого $\mathcal{O}$-класса совпадает с его $\mathcal{O}$-родом;

г) если $\varphi \circ (M_i, \mathcal{O}_i^* \triangledown \vec{x}) = (M_j, \mathcal{O}_j^* \triangledown \vec{y})$, то

$$spn\, M_j = g(\varphi)\, spn\, M_i. \qquad (5)$$

ПРИМЕР (см. [5]). Пусть $f(x, y, z) = xz - y^2$. Тогда в качестве $\mathcal{O}$ можно взять порядок целых матриц *) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с нормой $N(X) = \det X$, а $M = \mathbb{Z}^3$ отождествить с решеткой матриц

*) Это определение несколько отличается от принятого в этой статье – см. сноску на стр. 142.

нулевого следа: $\vec{x} = \begin{pmatrix} y & -x \\ z & -y \end{pmatrix}$. Здесь $d=1$, $k=1$. Вектору $\vec{x}$ длины $f(\vec{x}) = m$ отвечает бинарная форма $\psi(\vec{x}) = [x, 2y, z]$ определителя m, при этом O^+-классу векторов отвечает класс бинарных форм $\overline{\psi}(\vec{x})$. Пусть $M' \subset M$ – множество векторов, отвечающих собственно примитивным формам. Тогда определенное выше действие группы $\mathcal{L}^+(m)$ на множестве O-классов из M' отвечает умножению на φ в группе классов, т.е.

$$\overline{\psi}(\varphi \circ \vec{x}) = \varphi \cdot \overline{\psi}(\vec{x}).$$

Для определенной формы f обозначим через $r(m, K)$ число примитивных представлений m f-решеткой K, а через

$$\overline{r}(m, K) = \frac{r(m, K)}{|O^+(K)|}$$

взвешенное число представлений. Мы имеем

$$\overline{r}(m, K) = \sum_{cls(K, \vec{x})} \frac{1}{|O^+(K, \vec{x})|}, \tag{6}$$

где суммирование ведется по всем классам примитивных представлений решеткой K. Эта величина остается определенной и конечной также в случаях $dm > 0$ или $dm < 0$, $-dm \in \mathbb{Q}^{*2}$. В общем случае положим

$$\overline{\overline{r}}(m, K) = \sum_{cls(K, \vec{x})} \frac{1}{[O^+(K, \vec{x}) : \widetilde{O}^*_K(\vec{x})]}. \tag{7}$$

Эта величина корректно определена и является естественным аналогом $\overline{r}$, поскольку группы $\widetilde{O}^*_{K_1}(\vec{x}_1)$ и $\widetilde{O}^*_{K_2}(\vec{x}_2)$ сопряжены [*] в $O^+(V)$, если $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$ и представления $(K_1, \vec{x}_1)$, $(K_2, \vec{x}_2)$ примитивны. Конкретнее, если $\alpha \vec{x}_1 = \vec{x}_2$, $\alpha \in O^+(V)$, то $\alpha \widetilde{O}^*_{K_1}(\vec{x}_1) \alpha^{-1} = \widetilde{O}^*_{K_2}(\vec{x}_2)$. Можно показать, что при $dm < 0$, $-dm \notin \mathbb{Q}^{*2}$ $\overline{\overline{r}}$ отличается от обычного определения меры представимости множителем вида $c(D) \frac{\sqrt{m}}{\log h}$, где h – фундаментальная единица кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-dm}]$.

Для набора классов решеток $\mathfrak{K} \subset gen\, M$ обозначим

$$\overline{r}(m, \mathfrak{K}) = \sum_{cls K \in \mathfrak{K}} \overline{r}(m, K), \quad \overline{\overline{r}}(m, K) = \sum_{cls K \in \mathfrak{K}} \overline{\overline{r}}(m, K).$$

---

[*] И изоморфны группе $\mathbb{Z}[\sqrt{-dm}]^* / \{\pm 1\}$, если $-dm \notin \mathbb{Q}^{*2}$ – см. доказательство теоремы I.

По аналогии с (7) обозначим также

$$\bar{\bar{r}}(m, M_p) = \sum_{cls(M_p,\vec{x})} \frac{1}{[O^+(M_p,\vec{x}) : \tilde{O}^*_{M_p}(\vec{x})]}, \tag{8}$$

где суммирование ведется по всем классам относительно $O^+(M_p)$ примитивных представлений m решеткой M_p. Нетрудно выразить $\bar{\bar{r}}(m, M_p)$ через обычную взвешенную p-адическую меру представимости и "меру" группы $\mathbb{Z}_p[\sqrt{-dm}]^*$.

ТЕОРЕМА 2. I)

$$\bar{\bar{r}}(m, gen\, M) = h^+(dm) \cdot \prod_p \bar{\bar{r}}(m, M_p); \tag{9}$$

$\bar{\bar{r}}(m, M_p) = 1$, если $p \nmid 2Dd$, $p \neq \infty$, поэтому произведение в (9) конечно. Кроме того, $\bar{\bar{r}}(m, M_p) = \rho(m, M_p/\mathcal{O}_p)/[O^+(M_p) : \tilde{O}^*_p]$; $\bar{\bar{r}}(m, M_\infty) = 0$, если f – определенная и $Dm < 0$, и $= 1$ в остальных случаях.

2) Если $dm > 0$ или $dm < 0, -dm \in \mathbb{Q}^{*2}$, то

$$\bar{r}(m, gen\, M) = \frac{2}{w(dm)} h^+(dm) \prod_{\substack{p|2Dd \\ \text{или } p=\infty}} \frac{\rho(m, M_p/\mathcal{O}_p)}{[O^+(M_p) : \tilde{O}^*_p]}, \tag{10}$$

где $w(n) = \begin{cases} 4, \text{ если } n = \pm 1 \\ 2, \text{ иначе} \end{cases}$ – число собственных автоморфизмов бинарной формы определителя n.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Формулы (9) и (10) можно записать и в другом виде. Например, из леммы 2 будет следовать, что

$$\prod_{p|2Dd} [O^+(M_p) : \tilde{O}^*_p] \cdot \sum_{cls\, K \subset gen\, M} \frac{1}{[O^+(K) : \tilde{O}^*_K]} = k, \tag{11}$$

где k – число классов идеалов порядка $\mathcal{O}$. Сумма в (11) является аналогом веса рода M. Тогда, например, в случае положительной формы f и $d \neq 1$ получаем из (10) и (11)

$$\left(\sum_{cls\, K \subset gen\, M} \frac{1}{|O^+(K)|}\right)^{-1} \sum_{cls\, K \subset gen\, M} \frac{r(m,K)}{|O^+(K)|} = \frac{h^+(dm)}{k} \prod_{\substack{p|2Dd \\ \text{или } p=\infty}} \rho(m, M_p/\mathcal{O}_p).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть s – число спинорных родов в роде M. Тогда 1) если $m \notin \mathfrak{G}(gen\, M)$, то

$$\bar{\bar{r}}\left(m, \operatorname{spn} M\right)=\frac{1}{S}\,\bar{\bar{r}}\left(m, \operatorname{gen} M\right). \qquad (12)$$

2) Если $m \in \mathfrak{O}(\operatorname{gen} M)$, то множество решеток в роде M распадается на два полурода $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$, зависящих только от класса $m\,\mathbb{Q}^{*2}$ и состоящих из одинакового числа спинорных родов; каждый $\mathfrak{O}$-род представлений m целиком содержится в $\mathfrak{h}_1$ или в $\mathfrak{h}_2$, и если $K \in \mathfrak{h}_i$, то

$$\bar{\bar{r}}\left(m, \operatorname{spn} K\right)=\frac{2\gamma(m,\mathfrak{h}_i)}{\gamma(m,\operatorname{gen} M)}\cdot\frac{1}{S}\,\bar{\bar{r}}\left(m, \operatorname{gen} M\right), \qquad (13)$$

где $\gamma(m,\mathfrak{h}_i)$ – число $\mathfrak{O}$-родов представлений m, содержащихся в $\mathfrak{h}_i$, $\gamma(m,\operatorname{gen} M)=\prod \varrho(m, M_p/\mathfrak{O}_p)$ – общее число родов представлений.

3) если $dm>0$ или $dm<0$, $-dm\in\mathbb{Q}^{*2}$, то (12) и (13) справедливы и для $\bar{r}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Величины $\gamma(m,\mathfrak{h}_i)$ для произвольного $m\in\mathfrak{O}(\operatorname{gen} M)$ можно выразить через набор значений $\gamma(m,\mathfrak{h}_i)$, $m\,[D_2$ – ср. [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результаты теорем 2 и 3 можно пересчитать для величин $\bar{R}$ и $\bar{\bar{R}}$, характеризующих число всех представлений (а не только примитивных, как $\bar{r}$ и $\bar{\bar{r}}$).

СЛЕДСТВИЕ. Если $\bar{r}(m, \operatorname{spn} M)\neq 0$, то

$$\bar{r}(m,\operatorname{spn} M)\geqslant c(D)\,h^{+}(Dm), \quad \text{где } c(D)>0.$$

То же верно для $\bar{\bar{r}}(m,\operatorname{spn} M)$.

4. Доказательство теоремы I

1°. Покажем, что оператор $\mathcal{J}_0$, определяемый соотношениями (3) и (4), действительно переводит класс (или $\mathfrak{O}$-класс) примитивных представлений в такой же класс (или $\mathfrak{O}$-класс). Во-первых, если $\Sigma' \mathfrak{O}_K=\Sigma\,\mathfrak{O}_K$, то $\Sigma'=\Sigma E$, где $E\in\mathfrak{O}^*_{K,A}$. Поэтому $\Sigma'\triangledown K=\Sigma E\triangledown K=\Sigma\triangledown K$, так что решетка $\Sigma\triangledown K$ определена однозначно. Далее, если $(K',\vec{x}')\in cls(K,\vec{x})$, то $K'=A\triangledown K$, $\vec{x}'=A\triangledown\vec{x}$, где $A\in\mathfrak{A}^*$. Тогда кватернион $b+\vec{x}'=A\triangledown(b+\vec{x})$ содержится в $\mathfrak{O}_{K'}$-идеале $(A\triangledown\Sigma)\mathfrak{O}_{K'}=(A\triangledown\Sigma)(A\triangledown\mathfrak{O}_K)=A\triangledown\Sigma\,\mathfrak{O}_K$. Но $((A\triangledown\Sigma)\triangledown K',\vec{x}')=$

$$=(A\Sigma\nabla(A^{-1}\nabla K'),A\nabla\vec{x})=(A\nabla(\Sigma\nabla K),A\nabla\vec{x})\in cls(\Sigma\nabla K,\vec{x}).$$

Поэтому φ° переводит класс представлений в класс представлений. Поскольку представление $(K,\vec{x})$ примитивно, то $\vec{x}\in K_p$, $\vec{x}\notin pK_p$ для любого p. Пусть $\Sigma=\{\Sigma_p\}_p$. Тогда условие $b+\vec{x}\in\Sigma\,\mathcal{O}_K$ означает, что $b+\vec{x}=\Sigma_p\Phi_p$ для любого p, и $\Phi_p\in\mathcal{O}_{K,p}$. Значит $\Sigma_p^{-1}\nabla\vec{x}=\Phi_p\Sigma_p-b\in$ $\in\mathcal{O}_{K,p}\cap V_p=K_p$ и $\Sigma_p^{-1}\nabla\vec{x}\notin pK_p$, поскольку иначе $\Phi_p\nabla\vec{x}=\Sigma_p\nabla\vec{x}\in pK_p$; тогда в силу леммы 3 [6] $p\,|\,(N(\Sigma_p)$, $N(\Phi_p),N(\vec{x}))$, а поскольку $b^2+N(\vec{x})=N(\Sigma_p)\,N(\Phi_p)$, то $p\,|\,b$. Но это противоречит примитивности φ. Поэтому $\vec{x}\in\Sigma_p\nabla K_p,\vec{x}\notin p\cdot(\Sigma_p\nabla K_p)$. Следовательно, представление $(\Sigma\nabla K,\vec{x})$ примитивно. Точно так же проверяется, что соотношение (4) задает корректно определенный оператор φ° на множестве $\mathcal{O}$-классов примитивных представлений.

2^0. Утверждение б) теоремы I прямо следует из определений (2), (3) и (4). Необходимо только заметить, что поскольку решетки $M_i, i=1,\dots,k$, содержат представителей всех классов из рода M, то множество примитивных представлений решетками M_i содержит представителей всех классов представлений родом M. Поэтому в дальнейшем нам достаточно доказать теорему I только для операторов φ° на множестве $\mathcal{O}$-классов представлений.

3^0. Покажем теперь, что оператор φ° зависит только от класса φ в $\mathcal{L}^+$, т.е. от пары классов форм $\{cls[a,2b,c]$, $cls[-a,2b,-c]\}$. Прежде всего, из определения φ° следует, что операторы φ° и $(-e)\varphi^\circ$ совпадают, поскольку $(-e)\varphi=$ $=[-a,2b,-c]$. То, что операторы φ° совпадают для собственно эквивалентных форм φ, следует из части I следующей леммы.

ЛЕММА I. Пусть представление $(M_i,\vec{x})$ примитивно, $f(\vec{x})=m$. I) Пусть

$$\left.\begin{aligned}&b+\vec{x}=\Sigma\overline{\Phi},\ b\in\mathbb{Z},\ \Sigma,\Phi\in\mathcal{O}_{i,A},\\&N(\Sigma\mathcal{O}_i)=|a|,\ N(\Phi\mathcal{O}_i)=|c|\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I}4)$$

и $ac-b^2=dm$. Тогда $N(\Sigma)=\varepsilon a$, $N(\Phi)=\varepsilon^{-1}c$, где $\varepsilon\in\mathbb{Z}_A^*$. Пусть $(q_{ij})_{i=1,2;\ j=1,2}$ – целая матрица, $\det(q_{ij})=$ $=1$, $E\in\mathcal{O}_{i,A}^*$ и

$$
\left.\begin{aligned}
\Sigma_1 &= (q_{11}\Sigma + \varepsilon q_{21}\Phi)E\,, \\
\Phi_1 &= (\varepsilon^{-1}q_{12}\Sigma + q_{22}\Phi)\frac{E}{N(E)}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{15}
$$

$$
[a_1, 2b_1, c_1] = [a, 2b, c]\,(q_{ij})_{i,j}\,. \tag{16}
$$

Тогда

$$
\left.\begin{aligned}
& b_1 + \vec{x} = \Sigma_1\overline{\Phi}_1\,,\; b_1 \in \mathbb{Z}\,,\;\; \Sigma_1, \Phi_1 \in \mathcal{O}_{i,A}\,, \\
& N(\Sigma_1\mathcal{O}_i) = |a_1|\,,\; N(\Phi_1\mathcal{O}_i) = |c_1|\,,
\end{aligned}\right\} \tag{17}
$$

и если $a\,a_1 \neq 0$, то

$$
\Sigma\,\mathcal{O}_i \nabla (M_i, \mathcal{O}_i^* \nabla \vec{x}) = \Sigma_1\,\mathcal{O}_i \nabla (M_i, \mathcal{O}_i^* \nabla \vec{x}). \tag{18}
$$

2) Обратно, если имеют место равенства (I4) и (I7), $aa_1 \neq 0$ и выполнено (I8), то для некоторой целой матрицы (q_{ij}) определителя +I, для $\varepsilon = N(\Sigma)/a \in \mathbb{Z}_A^*$ и для некоторой адельной единицы $E \in \mathcal{O}_{i,A}^*$ имеют место равенства (I5), а также (I6), если знаки a, c, a_1, c_1 взяты в соответствии с соотношениями $ac - b^2 = dm$, $a_1 = \varepsilon^{-1}N(E)^{-1}N(\Sigma_1)$, $a_1c_1 - b_1^2 = dm$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Если $ac = 0$, то соотношение $N(\Sigma) = \varepsilon a$, $N(\Phi) = \varepsilon^{-1}c$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}_A^*$ очевидно (мы допускаем случай, когда $a = 0$, т.е. $N(\Sigma_p) = 0$ для всех p ; аналогично $c = 0$). Если $ac \neq 0$, то $N(\Sigma) = \varepsilon_1 a$, $N(\Phi) = \varepsilon_2 a$. Тогда в силу (I4) $b^2 + dm = \varepsilon_1\varepsilon_2 ac = ac$, так что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^{-1} = \varepsilon$. Далее, в силу (I4), (I5) и (I6)

$$
\Sigma_1\overline{\Phi}_1 = q_{11}q_{12}\varepsilon^{-1}N(\Sigma) + (q_{11}q_{12} + q_{12}q_{21})b + q_{21}q_{22}\varepsilon N(\Phi) +
$$

$$
+ (q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21})\vec{x} = b_1 + \vec{x}\,,
$$

$$
\begin{aligned}
N(\Sigma_1) &= (q_{11}^2 N(\Sigma) + 2q_{11}q_{21}\varepsilon b + q_{21}^2\varepsilon^2 N(\Phi))N(E) = \varepsilon N(E)a_1, \\
N(\Phi_1) &= (\varepsilon^{-2}q_{12}^2 N(\Sigma) + 2q_{12}q_{22}\varepsilon^{-1}b + q_{22}^2 N(\Phi))N(E)^{-1} = \varepsilon^{-1}N(E)^{-1}c_1,
\end{aligned} \tag{19}
$$

так что $N(\Sigma_1\mathcal{O}_i)=|a_1|$, $N(\Phi_1\mathcal{O}_i)=|c_1|$.

Пусть $\Sigma\mathcal{O}_i=A\Psi_j\Psi_i^{-1}\mathcal{O}_i$, $A\in\mathfrak{A}^*$ (см. определение $\mathcal{G}\nabla$), т.е. $\Sigma=A\Psi_j\Psi_i^{-1}E_1$, $E_1\in\mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}^*$. Тогда $\Phi=\overline{\Sigma^{-1}(b+\vec{x})}=$

$=(b-\vec{x})\Sigma/N(\Sigma)=\frac{1}{\varepsilon a}(b-\vec{x})A\Psi_j\Psi_i^{-1}E_1$, и значит $\Sigma_1=$

$=(g_{11}+\frac{b}{a}-\frac{\vec{x}}{a})A\Psi_j\Psi_i^{-1}E_1E=BA\Psi_j\Psi_i^{-1}E_2$, где $B=$

$=(g_{11}+\frac{b}{a}-\frac{\vec{x}}{a})\in\mathfrak{A}^*$, $E_2=E_1E\in\mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}^*$. Тогда $B\vec{x}=\vec{x}B$,

и следовательно $(BA)^{-1}\nabla\vec{x}=A^{-1}\nabla(B^{-1}\nabla\vec{x})=A^{-1}\nabla\vec{x}$. Поэтому

$$\Sigma_1\mathcal{O}_i\nabla(M_i,\mathcal{O}_i^*\nabla\vec{x})=(M_j,\mathcal{O}_j^*(BA)^{-1}\nabla\vec{x})=(M_j,\mathcal{O}_j^*A^{-1}\nabla\vec{x})=\Sigma\mathcal{O}_i\nabla(M_i,\mathcal{O}_i^*\nabla\vec{x}).$$

2) Обратно, из (I8) следует, что $\Sigma=A\Psi_j\Psi_i^{-1}E'$, $\Sigma_1=$ $=A_1\Psi_j\Psi_i^{-1}E_1'$, где $A,B\in\mathfrak{A}^*$, $1\leqslant j\leqslant k$, $E',E_1'\in\mathcal{O}_{1,\mathbb{A}}^*$, и $A^{-1}\nabla\vec{x}=A_1^{-1}\nabla\vec{x}=\vec{y}$. Обозначим $\varepsilon=N(\Sigma)/a$, $\varepsilon_1=N(\Sigma_1)/a_1\in$ $\in\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}^*$. Как и в п.I), получаем, что $\Phi_1=\varepsilon_1^{-1}C_1\Psi_j\Psi_i^{-1}E_1'$, где $C_1\in\mathfrak{A}^*$, $C_1^{-1}\nabla\vec{x}=A_1^{-1}\nabla\vec{x}=\vec{y}$. Тогда $A_1A^{-1}\nabla\vec{x}=\vec{x}$, $C_1A^{-1}\nabla\vec{x}=\vec{x}$. Следовательно, ([6], лемма 2)

$$A_1A^{-1}=\lambda_{11}+\lambda_{21}\vec{x},\ C_1A^{-1}=\lambda_{12}+\lambda_{22}\vec{x},\ \lambda_{ij}\in\mathbb{Q}. \quad (20)$$

Положим $E=(E')^{-1}E_1'\in\mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}^*$. Тогда в силу (20) и (I4)

$$\Sigma_1=A_1A^{-1}\Sigma E=(\lambda_{11}+\lambda_{21}\vec{x})\Sigma E=$$

$$=\lambda_{11}\Sigma E+\lambda_{21}(b-\Phi\overline{\Sigma})\Sigma E=(g_{11}\Sigma+\varepsilon g_{21}\Phi)E, \quad (21)$$

$g_{11}=\lambda_{11}+\lambda_{21}b\in\mathbb{Q}$, $g_{21}=-\lambda_{21}a\in\mathbb{Q}$. Домножая (21) справа на $E^{-1}\overline{\Phi}$, получаем в силу (I4)

$$\Sigma_1E^{-1}\Phi=g_{11}(b+\vec{x})+\varepsilon g_{21}N(\Phi).$$

Поскольку $\Sigma_1E^{-1}\Phi\in\mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}=\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}\oplus M_{i,\mathbb{A}}$, $g_{11}b+\varepsilon g_{21}N(\Phi)\in\mathbb{Q}_{\mathbb{A}}$,

то $g_{11}\vec{x}\in M_{i,\mathbb{A}}$, откуда в силу примитивности $\vec{x}$ получаем, что $g_{11}\in\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}$. Домножая (2I) справа на $E^{-1}\Sigma$, получаем аналогично, что $g_{21}\in\mathbb{Z}$. Точно так же из (20) и (I4) выводим

$$\Phi_1=(\varepsilon^{-1}g_{12}\Sigma+g_{22}\Phi)\varepsilon_1^{-1}\varepsilon E;\ g_{12},g_{22}\in\mathbb{Z}. \qquad (22)$$

Как и в части I) из (..I) и (22) получаем: $b_1+\vec{x}=b_1'+ +\det(g_{ij})\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 N(E)}\vec{x}$. Поэтому $\det(g_{ij})=\varepsilon_1\varepsilon^{-1}N(E)\in\mathbb{Z}_A^*\cap\mathbb{Z}= =\{\pm 1\}$. Меняя в случае $\det(g_{ij})=-1$ знаки g_{12} и g_{22}, получаем отсюда (I5), а сравнивая с формулой (I9) - также и (I6). Лемма I доказана.

4°. Как уже отмечалось, из леммы I следует, что ограничение $(a,2Dd)=1$ в определении φ° несущественно. Действительно, это ограничение использовалось нами только для доказательства того, что кватернион $b+\vec{x}$ содержится в единственном идеале нормы $|a|$. Однако для примитивной формы φ это же справедливо и в общем случае $a\neq 0$. Действительно, найдется такая целая подстановка G определителя +I, что в форме $\varphi G=[a',2b',c']$ будет $(a',2Dd)=1$. Тогда $b'+\vec{x}=\Sigma'\overline{\Phi}'$, $N(\Sigma'\mathcal{O}_i)=|a'|$ и идеал $\Sigma'\mathcal{O}_i$ определен однозначно. Отсюда в силу части I леммы I следует существование разложения $b+\vec{x}=\Sigma\overline{\Phi}$ с условием $N(\Sigma\mathcal{O}_i)=|a|$ и единственность идеала $\Sigma\mathcal{O}_i$. Небольшие уточнения позволяют включить в эту же схему и случай $a=0$.

5°. Итак, формула (4) действительно задает действие $\mathcal{L}^+$ как множества. Покажем, что это действие согласовано с групповой структурой $\mathcal{L}^+$, т.е. что $\tilde{\varphi}_2\circ(\tilde{\varphi}_1\circ)=\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1\circ$ для любых $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2\in \in\mathcal{L}^+(dm)$. Выберем формы $\varphi_1=[a_1,2b_1,c_1]\in\tilde{\varphi}_1$ и $\varphi_2= =[a_2,2b_2,c_2]\in\tilde{\varphi}_2$ так, чтобы они были согласованы, т.е. чтобы $(a_1,a_2)=1$, $b_1=b_2=b$, $(a_1a_2,2Ddm)=1$. Это можно сделать, и тогда форма $\varphi_3=[a_1a_2,2b,c]$, $c=(dm+b^2)/a_1a_2$, является целой собственно примитивной и содержится в классе $\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1$ ([7], § 2 гл.I4). Пусть $(M_i,\vec{x})$ - примитивное представление. Тогда

$$b+\vec{x}=\Sigma_1\overline{\Phi}_1,\ \Sigma_1,\Phi_1\in\mathcal{O}_{i,A},\ N(\Sigma_1)=\varepsilon_1 a_1,\ \varepsilon_1\in\mathbb{Z}_A^*, \qquad (23)$$

$$\Sigma_1=A_1\Psi_j\Psi_i^{-1}E_1,\ A_1\in\mathfrak{A}^*,\ E_1\in\mathcal{O}_{i,A}^*,$$

$$\varphi_1\circ(M_i,\mathcal{O}_i^*\vee\vec{x})=(M_j,\mathcal{O}_j^*A_1^{-1}\vee\vec{x}), \qquad (24)$$

$$\Sigma_2=A_2\Psi_t\Psi_j^{-1}E_2,\ A_2\in\mathfrak{A}^*,\ E_2\in\mathcal{O}_{j,A}^*,$$

$$\varphi_2\circ(M_j,\mathcal{O}_j^*A^{-1}\vee\vec{x})=(M_t,\mathcal{O}_t^*A_2^{-1}A_1^{-1}\vee\vec{x}) \qquad (25)$$

Тогда

$$b_+ \Sigma_1^{-1} \triangledown \vec{x} = (\psi_j \psi_i^{-1} E_1)^{-1} \triangledown \Sigma_2 \bar{\Phi}_2 = \Sigma_2' \bar{\Phi}_2', \quad (26)$$

где $\Sigma_2' = (\psi_j \psi_i^{-1} E_1)^{-1} \triangledown \Sigma_2$, $\bar{\Phi}_2' = (\psi_j \psi_i^{-1} E_1)^{-1} \triangledown \bar{\Phi}_2$, так что $\Sigma_2', \Phi_2' \in \mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}$, $N(\Sigma_2') = N(\Sigma_2) = \varepsilon_2 a_2$. С другой стороны, в силу (23) $b + \Sigma_1^{-1} \triangledown \vec{x} = \bar{\Phi}_1 \Sigma_1$. Поскольку $(N(\Sigma_1), N(\Sigma_2)) = 1$, отсюда и из (26) следует, что $\bar{\Phi}_2' \Sigma_1^{-1} = \bar{\Phi}_3 \in \mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}$ ([6], лемма 4). Тогда из (26) получаем

$$b + \vec{x} = \Sigma_1 \Sigma_2' \bar{\Phi}_2' \Sigma_1^{-1} = \Sigma_3 \bar{\Phi}_3,$$

где $\Sigma_3 = \Sigma_1 \Sigma_2' = A_1 \Sigma_2 \psi_j \psi_i^{-1} E_1 = A_1 A_2 \psi_t \psi_j^{-1} E_2 \psi_j \psi_i^{-1} E_1 = A_1 A_2 \psi_t \psi_i^{-1} E_3$, $E_3 = ((\psi_i \psi_j^{-1}) \triangledown E_2) \cdot E_1 \in \mathcal{O}^*_{i,\mathbb{A}}$,
и $N(\Sigma_3) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 a_1 a_2$. Поэтому

$$\varphi_3 \circ (M_i, \mathcal{O}_i^* \triangledown \vec{x}) = (M_t, \mathcal{O}_t^* (A_1 A_2)^{-1} \triangledown \vec{x}),$$

что вместе с (24) и (25) дает: $(\varphi_2 \varphi_1) \circ = \varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ)$.

6°. То, что стабильная подгруппа любого $\mathcal{O}$-класса тривиальна, следует из части 2 леммы I. Покажем, что орбита $\mathcal{O}$-класса $(M_i, \vec{x})$ совпадает с его $\mathcal{O}$-родом. Пусть $\varphi \circ (M_i, \mathcal{O}_i^* \triangledown \vec{x}) = (M_j, \mathcal{O}_j^* \triangledown \vec{y})$. Для произвольного p выберем в классе φ форму $\varphi' = [a, 2b, c]$ с условием $(a, 2dmD_p) = 1$. Тогда $\vec{y} = A^{-1} \triangledown \vec{x}$, где $\Sigma = \{\Sigma_q\}_q = A \psi_j \psi_i^{-1} E' \in \mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}$, $E' \in \mathcal{O}^*_{i,\mathbb{A}}$, $N(\Sigma) = \varepsilon a$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}^*_{\mathbb{A}}$. Тогда $N(\Sigma_p) = \varepsilon_p a \in \mathbb{Z}^*_p$, и значит $\Sigma_p \in (\mathcal{O}_i)^*_p$. Положим $E_p = E' \Sigma_p \in (\mathcal{O}_i)^*_p$. Тогда $(\psi_j \psi_i^{-1})_p E_p \triangledown \vec{x} = A^{-1} \triangledown \vec{x} = \vec{y}$. Построим таким образом E_p для всех p и положим $E = \{E_p\}_p \in \mathcal{O}^*_{i,\mathbb{A}}$. Тогда $\vec{y} = (\psi_j \psi_i^{-1} E) \triangledown \vec{x}$. Значит, $(M_j, \vec{y})$ принадлежит $\mathcal{O}$-роду $(M_i, \vec{x})$. Обратно, пусть $(M_j, \vec{y})$ принадлежит $\mathcal{O}$-роду $(M_i, \vec{x})$, т.е. $\vec{y} = (\psi_j \psi_i E) \triangledown \vec{x}$, $E \in \mathcal{O}^*_{i,\mathbb{A}}$. Тогда $(\psi_j \psi_i^{-1} E)^{-1} = \vec{x}\Omega + \Omega\vec{y}$, $\Omega \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}$ ([6], лемма 2). В силу [6], лемма 1 мы можем найти кватернион $T \in \mathfrak{A}$ с условием $T \in \mathcal{O}_{i,p}$ при $p \notin P$, сколь угодно близкий к Ω в p-адической метрике при $p \in P$, где P – множество всех p, для которых один из кватернионов ψ_j, ψ_i или $\vec{y}$ не содержится в $\mathcal{O}^*_{i,p}$ или $p \mid 2dmD$ (множество P конечно). Тогла $A=\vec{x}T+T\vec{y}\in\mathcal{O}_i$, $\Sigma=A\psi_j\psi_i^{-1}\in\mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}$ и Σ может быть сколь угодно близким к E^{-1} в p-адической метрике для $p\,|\,2dmD$. В частности, мы можем выбрать T так, чтобы для $a=N(\Sigma\,\mathcal{O}_i)$ было $(a,2dmD)=1$. Кроме того, $A^{-1}\triangledown\vec{x}=\vec{y}$. Поэтому $\Sigma^{-1}\triangledown\vec{x}=(\psi_j\psi_i^{-1})\triangledown\vec{y}=E\triangledown\vec{x}\in\mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}$. Тогда по лемме 9 [6] $b+\vec{x}\in\Sigma\,\mathcal{O}_i$ для некоторого $b\in\mathbb{Z}$, и значит форма $\varphi=[a,2b,c]$, $c=(b^2+dm)/a$, определителя dm является целой, а в силу условия $(a,2dmD)=1$ также и собственно примитивной. При этом $\varphi\circ(M_i,\mathcal{O}_i^*\triangledown\vec{x})=(M_j,\mathcal{O}_j^*\triangledown\vec{y})$, поэтому $(M_j,\vec{y})$ принадлежит орбите $(M_i,\vec{x})$.

7°. Докажем (5). Возьмем в классе φ форму $[a,2b,c]$ с условием $(a,2dD)=1$. Тогда по определению $\varphi\circ$ имеем: $\Sigma=A\psi_j\psi_i^{-1}E,\ A\in\mathcal{O}_i^*,\ E\in\mathcal{O}_{i,\mathbb{A}}^*,\ N(\Sigma)=\varepsilon a,\ \varepsilon\in\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}^*$. Тогда $M_j=\psi_j\psi_i^{-1}\triangledown M_i=\psi_j\psi_i^{-1}E\triangledown M_i\in cls\,A\psi_j\psi_i^{-1}E\triangledown M_i=$ $=cls\,\Sigma\triangledown M_i\subset spn\,\Sigma\triangledown M_i=g(\Sigma)\,spn\,M_i$, где $g(\Sigma)=$ $=N(\Sigma)\cdot\theta(V)\theta_{\mathbb{A}}(M)\in G$. Если $p\nmid a$, то $N(\Sigma_p)=\varepsilon_p a\in\mathbb{Z}_p^*$, поэтому $\Sigma_p\in\mathcal{O}_{i,p}^*$. Тогда $N(\Sigma_p)\in\theta(\tilde{\mathcal{O}}_{i,p}^*)\subset\theta(M_{i,p})=$ $=\theta(M_p)\subset g(a)$. Если же $p\,|\,a$, то $p\nmid 2Dd$, поэтому $\theta(M_p)=\mathbb{Z}_p^*\,\mathbb{Q}_p^{*2}$ (см. [7], гл.II), и значит $N(\Sigma_p)=\varepsilon_p a\in$ $\in g(a)$. Таким образом, $N(\Sigma)\in g(a)$. Следовательно, $M_j\in g(a)\,spn\,M_i=g(\varphi)\,spn\,M_i$.

5. Доказательство теорем 2 и 3

I°. Из теоремы I следует, что число $\mathcal{O}$-классов примитивных представлений m решетками $M_i,\ i=1,\dots,k$, равно $h^+(dm)$, умноженному на число $\mathcal{O}$-родов примтивных представлений (оно равно $\prod_p\varrho(m,M_p/\mathcal{O}_p)$ - см. раздел 2). Для представления $(K,\vec{x})$ обозначим через $\mathcal{U}(K,\vec{x})$ число $\mathcal{O}$-классов представлений, содержащихся в классе $(K,\vec{x})$. Тогда

$$\sum_{cls\,K\subset gen\,M}\ \sum_{cls(K,\vec{x})}\mathcal{U}(K,\vec{x})=h^+(dm)\prod_p\varrho(m,M_p/\mathcal{O}_p);\qquad(27)$$

внутренняя сумма берется по всем классам примитивных представлений числа m решеткой K . Вычислим $\mathcal{U}(K,\vec{x})$.

ЛЕММА 2. Если $K\in gen\,M$ то число решеток $M_i,\ i=1,\dots,k$, содержащихся в классе K , равно

$$\left[O^+_{\mathbb{A}}(M) : \bar{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}} \right] \Big/ \left[O^+(K) : \bar{\mathcal{O}}^*_K \right]. \tag{28}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кватернионы ψ_i, $i=1,\dots,k$, являются представителями двойных классов $\mathfrak{A}^* \Sigma \mathcal{O}^*_{\mathbb{A}}$, $\Sigma \in \mathfrak{A}^*_{\mathbb{A}}$. Поскольку $\mathfrak{A}^* \supset \mathbb{Q}^*$, $\mathcal{O}^*_{\mathbb{A}} \supset \mathbb{Z}^*_{\mathbb{A}}$ и $\mathbb{Q}^*_{\mathbb{A}} = \mathbb{Q}^* \mathbb{Z}^*_{\mathbb{A}}$, то эти двойные классы совпадают с классами $(\mathbb{Q}^*_{\mathbb{A}} \mathfrak{A}^*) \Sigma (\mathbb{Q}^*_{\mathbb{A}} \mathcal{O}^*_{\mathbb{A}})$, и значит отвечают двойным классам $O^+(V) \tilde{\Sigma} \tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}}$, $\tilde{\Sigma} = \Sigma v |_{V_{\mathbb{A}}} \in O^+_{\mathbb{A}}(V)$, поскольку $\operatorname{Ker}(\Sigma \to \tilde{\Sigma}) = \mathbb{Q}^*_{\mathbb{A}}$. Пусть $K = \psi M$, $\psi \in O^+_{\mathbb{A}}(V)$. Тогда $M_i = \tilde{\psi}_i M \in cls\, K$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\psi}_i \in O^+(V)\, \psi\, O^+_{\mathbb{A}}(M)$, т.е. когда $O^+(V) \tilde{\psi}_i \tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}} \subset O^+(V) \psi O^+_{\mathbb{A}}(M)$. Следовательно, искомое число решеток M_i равно числу двойных классов $O^+(V)\, \Sigma\, \tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}}$, $\Sigma \in O^+_{\mathbb{A}}(V)$, в классе $O^+(V) \psi O^+_{\mathbb{A}}(M)$.

Пусть $\Sigma_\alpha \tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}}$, $\alpha \in \mathcal{A}$ – множество смежных классов $\tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}}$ в $O^+_{\mathbb{A}}(M)$. Тогда $O^+(V) \psi \Sigma_\alpha \tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, пробегают все классы из $O^+(V) \psi O^+_{\mathbb{A}}(M)$. Два таких класса, отвечающих Σ_α и Σ_β, совпадают тогда и только тогда, когда $\psi \Sigma_\beta \tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}} = \xi \psi \Sigma_\alpha \tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}}$, где $\xi \in O^+(V) \cap \psi O^+_{\mathbb{A}}(M) \psi^{-1} = O^+(V) \cap O^+_{\mathbb{A}}(K) = O^+(K)$. Наконец, при фиксированном Σ_α классы $\xi_i \psi \Sigma_\alpha \tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}}$, $\xi_1, \xi_2 \in O^+(K)$, совпадают тогда и только тогда, когда $\xi_1^{-1} \xi_2 \in O^+(K) \cap \cap \psi \Sigma_\alpha \tilde{\mathcal{O}}^*_{\mathbb{A}} (\psi \Sigma_\alpha)^{-1} = \tilde{\mathcal{O}}^*_{\psi \Sigma_\alpha M \Sigma_\alpha^{-1} \psi^{-1}} = \tilde{\mathcal{O}}^*_K$. Поэтому искомое число двойных классов равно (28).

ЛЕММА 3. Пусть $1 \leqslant i \leqslant k$, $M_i \in cls\, K$. Тогда число $\mathcal{O}$-классов представлений в классе $(K, \vec{x})$ равно

$$\left[O^+(K) : \tilde{\mathcal{O}}^*_K \right] \Big/ \left[O^+(K, \vec{x}) : \tilde{\mathcal{O}}^*_K (\vec{x}) \right]. \tag{29}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M_i = \alpha K$. Все представления $(M_i, \vec{y})$ из класса $(K, \vec{x})$ имеют вид $(M_i, \alpha \beta \vec{x})$, $\beta \in O^+(K)$. Два таких представления, отвечающие β_1 и β_2, будут $\mathcal{O}$-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\alpha \beta_2 \vec{x} \in \tilde{\mathcal{O}}^*_i \alpha \beta_1 \vec{x}$, т.е. $\beta_2 \in \alpha^{-1} \tilde{\mathcal{O}}^*_i \alpha \beta_1 O^+(K, \vec{x}) = \beta_1 \tilde{\mathcal{O}}^*_K O^+(K, \vec{x})$. Поэтому искомое число равно $[O^+(K) : \tilde{\mathcal{O}}^*_K O^+(K, \vec{x})]$, что совпадает с (29), поскольку $\tilde{\mathcal{O}}^*_K \cap O^+(K, \vec{x}) = \tilde{\mathcal{O}}^*_K(\vec{x})$.

ЛЕММА 4.

$$\bar{\bar{\tau}}(m, M_\rho) = \frac{\varrho(m, M_\rho / \mathcal{O}_\rho)}{\left[O^+(M_\rho) : \tilde{\mathcal{O}}^*_\rho \right]}. \tag{30}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в лемму 3 $K = M_i = M_p$, получаем, что число $\mathcal{O}_p$-классов представлений в $O^+(M_p)$-классе $(M_p, \vec{x})$ равно $\left[O^+(M_p) : \widetilde{\mathcal{O}}_p^*\right] / \left[O^+(M_p, \vec{x}) : \widetilde{\mathcal{O}}_p^*(\vec{x})\right]$. Суммируя по всем классам примитивных представлений, получаем отсюда (30).

ЛЕММА 5. Если $p \nmid 2dD$, $p \neq \infty$, то

$$\bar{\bar{r}}(m, M_p) = \rho(m, M_p/\mathcal{O}_p) = \left[O^+(M_p) : \widetilde{\mathcal{O}}_p^*\right] = 1. \tag{31}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $\rho = 1$ следует из леммы 7 [6]. Пусть $\alpha \in O^+(M_p)$. Тогда $\alpha = X\nabla\big|_{V_p}$ для некоторого примитивного кватерниона $X \in \mathcal{O}_p$, причем $X\vec{x}\bar{X} \in N(X)\cdot M_p$ для любого $\vec{x} \in M_p$. Подставляя $\vec{x} = i_j$, $j = 1,2,3$, где $M_p = \mathbb{Z}_p i_1 \perp \mathbb{Z}_p i_2 \perp \mathbb{Z}_p i_3$, получим, что $X = x_0 + \vec{x}$, где $\vec{x} \in N(X) M_p$. Тогда в силу примитивности X получим, что $N(X) \in \mathbb{Z}_p^*$ т.е. $X \in \mathcal{O}_p^*$ и $\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}_p^*$. Отсюда следует последнее равенство в (31), а в силу (30) также и первое. Лемма 5 доказана.

Из лемм 2 и 3 получаем

$$\mathcal{U}(K, \vec{x}) = \left[O_{\mathbb{A}}^+(M) : \widetilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}}^*\right] / \left[O^+(K, \vec{x}) : \widetilde{\mathcal{O}}_K^*(\vec{x})\right].$$

Тогда (9) следует из (7), (27) и лемм 4 и 5, поскольку $\left[O_{\mathbb{A}}^+(M) : \widetilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}}^*\right] = \prod_p \left[O^+(M_p) : \widetilde{\mathcal{O}}_p^*\right]$. Утверждение о $\bar{\bar{r}}(m, M_\infty)$ очевидно.

2°. Из леммы 2 [6] и из примитивности представления $(K, \vec{x})$ следует, что $\mathcal{O}_K^*(\vec{x}) = \{u + v\vec{x} \mid u, v \in \mathbb{Z},\ u^2 + dmv^2 = \pm 1\}$. (Поэтому при $-dm \notin \mathbb{Q}^{*2}$ соответствие $u + v\vec{x} \to u + v\sqrt{-dm}$ является изоморфизмом между $\mathcal{O}_K^*(\vec{x})$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{-dm}]^*$.) Легко проверяется, что при $dm > 0$ или $dm < 0, -dm \in \mathbb{Q}^{*2}$ порядок этой группы совпадает с величиной w из (10). Кроме того, $\widetilde{\mathcal{O}}_K^*(\vec{x}) = \mathcal{O}_K^*(\vec{x}) / \{\pm 1\}$, поскольку $\mathcal{O}_K^*(\vec{x}) \cap \mathbb{Q}_{\mathbb{A}}^* = \{\pm 1\}$. Следовательно, $\left|\widetilde{\mathcal{O}}_K^*(\vec{x})\right| = w/2$, и формула (10) вытекает из (9), (6), (7) и леммы 4.

3°. Докажем теорему 3.

ЛЕММА 6.

$$g(\mathcal{L}^+(dm)) = N_{\mathbb{A}}(dm)\, \theta(V)\, \theta_{\mathbb{A}}(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $g(\mathcal{L}^+(dm))$ состоит из аделей $g(a) = i(a)\,\theta(V)\,\theta_{\mathbb{A}}(M)$, где $i(a)=\{i_p\}_p \in \mathbb{Q}^*_{\mathbb{A}}$, и $i_p = p^{\nu_p}$, $p^{\nu_p}\| a$, причем достаточно рассматривать числа a с условием $(a, 2Ddm)=1$. Тогда $\left(\frac{-dm}{p}\right)=1$ для всех $p|a$; следовательно, $p^{\nu_p}\in N_p(dm)$. Поэтому $i(a)\in N_{\mathbb{A}}(dm)$. Обратно, пусть $r=\{r_p\}\in N_{\mathbb{A}}(dm)$. Тогда $u_p^2 r_p = x_p^2 + dmy^2$, $u_p\in\mathbb{Q}_p^*$, $x_p, y_p\in\mathbb{Z}_p$, $(x_p,y_p)=1$. Пусть $p^{\nu_p}\| u_p^2 r_p$, $\vartheta=\prod_{p|2Ddm} p^{\nu_p}$. Выберем в $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ примитивный вектор $(x,y)\equiv(x_p,y_p)$ $(\mathrm{mod}\ \vartheta\cdot 8Ddm)$ и положим $x^2+dmy^2 = a\vartheta$. Тогда $a\in\mathbb{Z}$, $(a,2Ddm)=1$, $a\vartheta\in r_p\mathbb{Q}_p^{*2}$ для $p|2D$ и $\left(\frac{-dm}{p}\right)=1$ для всех $p|a$. Поэтому $i(a)\in g(\mathcal{L}^+(dm))$ и $r\in$ $\in i(a)^{-1}a\vartheta\ \theta_{\mathbb{A}}(M)$, поскольку $\theta(M_p)=\mathbb{Z}_p^*\mathbb{Q}_p^{*2}$ при $p\nmid 2D$. Кроме того, $a\vartheta\in\theta(V)$ ([7], гл.II). Следовательно, $r\in g(\mathcal{L}^+(dm))$. Лемма 6 доказана.

Согласно вычислениям [8]

$$[\theta_{\mathbb{A}}(V):N_{\mathbb{A}}(dm)\theta(V)\theta_{\mathbb{A}}(M)] = \begin{cases} 1, & \text{если } m\notin\mathcal{Y}(\mathrm{gen}\,M)\\ 2, & \text{если } m\in\mathcal{Y}(\mathrm{gen}\,M).\end{cases}$$

Поэтому при $m\notin\mathcal{Y}(\mathrm{gen}\,M)$ имеем:

$$g(\mathcal{L}^+(dm))=G,\ |\mathrm{Ker}(g:\mathcal{L}^+\longrightarrow G)| = \frac{|\mathcal{L}^+|}{|G|} = \frac{h^+(dm)}{s}.$$

Тогда для каждого $\mathcal{O}$-рода $(K,\vec{x})$ найдется форма $\psi\in\mathcal{L}^+(dm)$ с условием $\mathrm{spn}\,M = g(\psi)\,\mathrm{spn}\,K$, и в силу теоремы I, часть г) все $\mathcal{O}$-классы представлений m спинорным родом M, содержащиеся в $\mathcal{O}$-роде $(K,\vec{x})$, имеют вид $\psi\,\mathcal{S}^\circ(K,\mathcal{O}_K^*\nabla\vec{x})$, $\mathcal{S}\in\mathrm{Ker}(g:\mathcal{L}^+\longrightarrow G)$ Используя снова леммы 2 – 5 и сравнивая с теоремой 2, получаем отсюда (I2).

Если $m\in\mathcal{Y}(\mathrm{gen}\,M)$, то в силу леммы 6 $[G:g(\mathcal{L}^+(dm))]=2$, $|\mathrm{Ker}\,g| = 2h^+(dm)/s$ и $g(\mathcal{L}^+(dm))$ зависит только от класса $dm\mathbb{Q}^{*2} = D\cdot m\mathbb{Q}^{*2}$. Все спинорные роды в роде M распадаются на два полурода $\mathfrak{h}_1 = g(\mathcal{L}^+)\,\mathrm{spn}\,M$ и $\mathfrak{h}_2 = g_0\mathfrak{h}_1$, где $g_0\in G$, $g_0\notin g(\mathcal{L}^+)$. В силу теоремы I, г) каждый $\mathcal{O}$-род представлений (являющийся $\mathcal{L}^+$-орбитой) целиком содержится в $\mathfrak{h}_1$ или в $\mathfrak{h}_2$. Формула (I3) получается тогда точно так же, как (I2).

Пункт 3) теоремы очевиден, поскольку $\bar{r} = \frac{2}{w}\bar{\bar{r}}$.

Следствие получается из теоремы 3 и формулы (I0), если рассмотреть порядок $\mathcal{O}$ с $d=D$ и учесть, что $\prod[\mathcal{O}^+(M_p):\tilde{\mathcal{O}}_p^*]\leqslant c(D)$.

Литература

1. В е н к о в Б.А. Об арифметике кватернионов. I,II. – Изв.Рос. АН, сер.6, 1922, т.16, с.205–220; с.221–246; III–IV. – Изв.АН СССР, сер.7, отд.физ.-мат.наук, 1929, № 5, с.489–504; № 6, с.535–562; № 7, с.607–622. (= Избранные труды. Исследования по теории чисел. Л., 1981, с.5–87).
2. Л и н н и к Ю.В. On certain results relating to positive ternary quadratic forms. – Мат.сб., 1939, т.5, № 3, с.453–471. (Русск.пер. в кн.: Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и L -функции. Л., 1979, с.40–59).
3. Л и н н и к Ю.В. Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского. I–III. – Вестник ЛГУ, 1955, № 2, с.3–23; № 5, с.3–32; № 8, с.15–27 (= Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и L – функции. Л., 1979, с.141–200).
4. М а л ы ш е в А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. Труды МИАН, 1962, т.65. 212 с.
5. М а л ы ш е в А.В., П а ч е в У.М. Об арифметике матриц второго порядка. – Зап.научн. семин. ЛОМИ, 1980, т.93, с.41–86.
6. Т е т е р и н Ю.Г. Эргодические свойства операторов на целых точках эллипсоидов. – В кн.: Исследования по теории чисел. 9. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1986, т.151, с. 159–175.
7. C a s s e l s J.W.S. Rational quadratic forms. London, 1978, xvi + 413 p. (Русск.пер.: Касселс Дж. Рациональные квадратичные формы. М., 1982. 440 с.)
8. H s i a J.S. Representations by spinor genera. – Pacific J.Math., 1976, v.63, N 1, p.147–152.
9. K n e s e r M. Darstellungsmasse indefiniter quadratischer Formen. – Math.Z., 1961, Bd.77, N 2, S.188–194.
10. O' M e a r a O.T. Introduction to quadratic forms, Berlin, 1963, xi + 342 p.
11. R e h m H.P. On a theorem of Gauss conserning the number of integral solutions of the equation $x^2 + y^2 + z^2 = m$. – in: Ternary quadratic forms and norms. Lect.Notes in pure and appl.Math., 1982, v.79, p.31–38.
12. R i c e B. Quaternions and binary quadratic forms. – Proc. Amer.Math.Soc., 1971, v.27, N 1, p.1–7.
13. S c h u l z e - P i l l o t R. Darstellungsmasse von Spinorgeschlechter ternärer quadratischer Formen. – J.reine angew.Math., 1984, Bd.352, S.114–132.