2015 г. январь — февраль *т. 70, вып. 1 (421)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 произвольного рода g с полиномиальными коэффициентами

В. С. Оганесян

Если два дифференциальных оператора $L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i$, $L_m = \sum_{i=0}^{m} v_i(x)\partial_x^i$ коммутируют, то существует полином $R(z,w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$ (см. [1]). Кривая Γ, определенная соотношением $R(z,w) = 0$, называется *спектральной кривой*. Если $L_n\psi = z\psi$, $L_m\psi = w\psi$, то $(z,w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z,w) \in \Gamma$ размерность пространства общих собственных функций ψ одна и та же. Размерность пространства общих собственных функций двух коммутирующих дифференциальных операторов называется *рангом*. Ранг является общим делителем порядков операторов m и n. Коэффициенты коммутирующих операторов ранга 1 явно выражаются через тэта-функцию Римана [2]. Случай ранга больше 1 значительно сложней. Первые примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 со спектральной кривой рода $g = 1$ были построены в [3] для невырожденной эллиптической кривой $w^2 = z^3 - \alpha$ с произвольным числом α:

$$L = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^2 + 2x, \qquad M = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^3 + 3x\partial_x^2 + 3\partial_x + 3x(x^2 + \alpha),$$

где L и M – коммутирующая пара операторов Диксмье ранга 2 и рода 1. Общая классификация коммутирующих операторов ранга больше единицы была получена в [4]. Общая форма коммутирующих операторов ранга 2 для произвольной эллиптической кривой была получена в [5]. Общий вид операторов ранга 3 для произвольной эллиптической кривой (общий вид операторов ранга 3 и рода 1 параметризуется двумя произвольными функциями) был найден в [6], [7]. Более того, примеры коммутирующих операторов рода 1 с полиномиальными коэффициентами были построены для произвольного ранга. При этом даже в тех случаях, в которых были получены явные формулы для общего вида коммутирующих операторов, задача выделения коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами является нетривиальной и полностью до сих пор не решена. Задача полного описания коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами поставлена и рассмотрена в [8]. В [9] построены примеры коммутирующих операторов L и M ранга 2 и произвольного рода g:

$$L = (\partial_x^2 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)^2 + g(g+1)A_3x,$$
$$M^2 = L^{2g+1} + a_{2g}L^{2g} + \cdots + a_1L + a_0,$$

где A_i – произвольные константы, $A_3 \neq 0$, a_i – некоторые константы. Примеры коммутирующих операторов произвольного рода и произвольного ранга с полиномиальными коэффициентами были построены в [10]. В настоящей работе найдены новые примеры коммутирующих операторов ранга 2. Доказаны следующие три теоремы.

Работа поддержана программой “Ведущие научные школы” (грант НШ-4833.2014.1).
DOI: 10.4213/rm9644

Теорема 1. *Оператор* $L = (\partial_x^2 + Ax^6)^2 + 16g(g+1)Ax^4$, *где* $g \in \mathbb{N}$, $A \neq 0$, *коммутирует с дифференциальным оператором* M *порядка* $4m+2$ *при любом* $m \geqslant g$. *Операторы* L *и* M *имеют ранг* 2, *а их спектральная кривая определяется соотношением* $w^2 = z^{2m+1} + a_{2m}z^{2m} + \cdots + a_1 z + a_0$.

Теорема 2. *Оператор* $L = (\partial_x^2 + Ax^4)^2 + 4g(g+1)Ax^2$, *где* $g \in \mathbb{N}$, $A \neq 0$, *коммутирует с дифференциальным оператором* M *порядка* $4m+2$ *при любом* $m \geqslant g$. *Операторы* L *и* M *имеют ранг* 2, *а их спектральная кривая определяется соотношением* $w^2 = z^{2m+1} + a_{2m}z^{2m} + \cdots + a_1 z + a_0$.

Теорема 3. 1) *Если оператор* $L = (\partial_x^2 + Ax^n)^2 + Bx^{n-2}$, *где* $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, $A \neq 0$, *коммутирует с оператором* M *порядка* $4g+2$ *и* M, L – *операторы ранга* 2, *то* $B = (n-2)^2 m(m+1)A$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$.

2) *При* $n > 6$ *не существует дифференциального оператора* M *порядка* $4g+2$, *коммутирующего с* L, *где пара* M *и* L *были бы ранга* 2.

3) *Если* $n = 5$, *то оператор* $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 18Ax^3$, $A \neq 0$, *коммутирует с оператором* M *порядка* $4g+2$ *для любого* g *и* M, L – *операторы ранга* 2.

4) *Оператор* $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 9m(m+1)Ax^3$ *при* $m > 1$, $A \neq 0$ *не коммутирует ни с каким оператором* M *порядка* $4g+2$, *с которым он образовывал бы пару ранга* 2.

Выкладки показывают, что для рода меньше 9 при $m = g$ спектральная кривая оператора из теоремы 1 невырождена для любого $A \neq 0$. По-видимому, при $m = g$ спектральная кривая невырождена для любого рода g, но пока это не доказано. При $m > g$, по всей видимости, спектральная кривая получается всегда вырожденной. Приведем примеры. Спектральная кривая оператора из теоремы 1 имеет вид: (i) $w^2 = z(z^2 + 192A)$ при $m = g = 1$; (ii) $w^2 = z(z^2 + 192A)(C_3 + C_2 z + C_1 z^2 + z^3)^2$ при $g = 1$, $m = 4$ (здесь C_1, C_2, C_3 – произвольные константы); (iii) $w^2 = z(z^2 + 288000A)(273715200A^2 + 289152Az^2 + z^4)$ при $m = g = 3$. У оператора из теоремы 2 спектральная кривая является вырожденной для $m = g = 2, 5$. Мы предполагаем, что спектральная кривая является вырожденной только для $m = g = 3k - 1$. Приведем примеры. Мы получаем спектральную кривую вида: (i) $w^2 = (z^3 + 16A^2)$ при $m = g = 1$; (ii) $w^2 = (z^3 + 16A^2)(C_2 + C_1 z + z^2)$ при $g = 1$, $m = 3$ (здесь C_1, C_2 – произвольные константы); (iii) $w^2 = z(3382560000A^4 + 117216A^2 z^3 + z^6)$ при $g = m = 3$. Теорема 3 не выполняется для полиномов более общего вида $Ax^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$ и $Bx^{n-2} + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0$. Например, для любого n существует дифференциальный оператор порядка 6, с которым L коммутирует. Есть основания полагать, что L коммутирует с оператором порядка $4g+2$, где $g > 1$, только при $n = 3, 4, 5, 6$, но пока это не доказано.

Автор выражает благодарность профессору О. И. Мохову за научное руководство и помощь в написании работы.

Список литературы

[1] J. L. Burchnall, I. W. Chaundy, *Proc. London Math. Soc.* (2), **21**:1 (1923), 420–440. **[2]** И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:1 (1977), 15–31. **[3]** J. Dixmier, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 209–242. **[4]** И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 20–31. **[5]** И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 47–68. **[6]** О. И. Мохов, *УМН*, **37**:4(226) (1982), 169–170. **[7]** О. И. Мохов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:6 (1989), 1291–1315. **[8]** О. И. Мохов, *Матем. заметки*, **94**:2 (2013), 314–316. **[9]** A. E. Mironov, *Invent. Math.*, **197**:2 (2014), 417–431. **[10]** O. I. Mokhov, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **234**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 303–316.

В. С. Оганесян (V. S. Oganesyan)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vardan.o@mail.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
05.12.2014