«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №4)

1. $\frac{4}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{20}{21}$, $\frac{4}{3}:\frac{7}{5}=\frac{20}{21}$, $\frac{9}{7}-\frac{1}{3}=\frac{20}{21}$, $\frac{4}{6}+\frac{2}{7}=\frac{20}{21}$.

Есть и другие примеры. Интересно, что в последнем задании не удается обойтись несократимыми дробями.

2. а) Представим себе, что кубик сложен из восьми единичных кубиков, и посмотрим на кубик, закрашенный на рисунке 1. Что бы Буратино ни написал на его нижней грани, требование Мальвины будет нарушено. Если там будет крестик, то нолик на его передней грани будет граничить с тремя крестиками. Если там будет нолик, то крестик на боковой грани будет граничить с тремя ноликами.

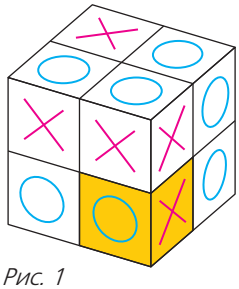

Рис. 1

б) Существуют (с точностью до поворотов куба) три различные расстановки крестиков и ноликов. Можно (рис.2) на верхней грани нарисовать нолики, на нижней крестики, а боковые грани разметить «слоями». Второй способ (рис.3) заключается в том, чтобы представить себе куб сложенным из восьми единичных кубиков (на четырех из которых нарисованы только крестики, а на четырех только нолики) в шахматном порядке. Наконец, третий способ представлен на рисунке 4. Невидимые грани будут размечены «противоположно» видимым: в клетках, симметричных клеткам с крестиками относительно центра кубика, стоят нолики, и наоборот.

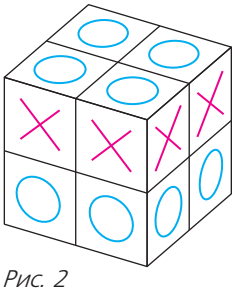

Рис. 2

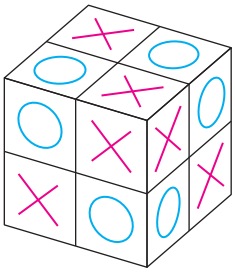

Рис. 3

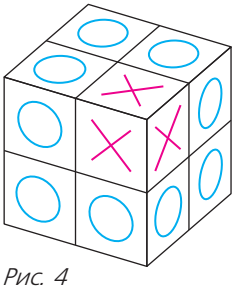

Рис. 4

3. 5 минут.

Давайте на одном мониторе запустим получившийся ролик, а на другом – Петино видео целиком с конца. Тогда мониторы будут показывать разное, пока братья не окажутся в одной точке пути, а после этого они будут показывать одно и то же. Поэтому длительности таких двух видео равны.

4. 21.

Первое решение. Пусть прямоугольник занимает a клеток по вертикали и b клеток по горизонтали, $a+b=50:2=25$ (рис.5). Аналогично, пусть размеры дырки равны x клеток по вертикали и y по горизонтали, $x+y=32:2=16$. Если бы дырки не было, было бы a горизонтальных полосок. Дырка разрезает x из них на две части, так что всего горизонтальных полосок $a+x$, что по условию равно 20. Аналогично, вертикальных полосок будет $b+y$. Но $a+b+x+y=25+16=41$ и $a+x=20$. Значит, $b+y=41-20=21$.

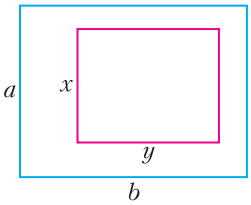

Рис. 5

Второе решение. Для каждой горизонтальной полоски отметим ее левую и правую стороны, а для каждой вертикальной – верхнюю и нижнюю. Ясно, что мы по одному разу отметили все границы клеток на контуре прямоугольника и контуре дырки, т.е. $50+32=82$ границы. Каждая полоска давала нам по две границы, так что всего полосок $82:2=41$. Горизонтальных среди них 20, значит, вертикальных 21.

Комментарий. Второе решение более общее – оно работает и в том случае, когда фигура и дырка имеют сложную многоугольную форму (рис.6).

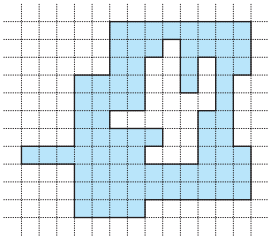

Рис. 6

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №3)

25. 45°.

В треугольниках обязательно встретится угол 45° – это может быть как угол CBK, так и угол BCK.

Рассмотрим два случая.

Если $\angle BCK \neq 45°$, то прямые AK и CK не совпадают, поэтому K лежит на их пересечении (рис.7). Эти прямые симметричны относительно диагонали

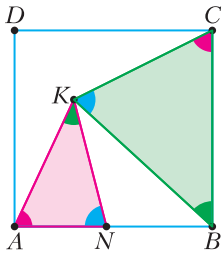

Рис. 7

BD, так как $\angle BAK = \angle BCK$, поэтому K лежит на BD, а значит, $\angle ABK = 45°$.

Если же $\angle BCK = 45°$, то точка K не обязательно лежит на диагонали BD. Но это неважно, так как мы уже обнаружили в треугольниках угол в 45°.

26. Число синих граней четно (по 6 на каждом синем кубике). Внутри куба находится нечетное число синих граней, потому что это удвоенное число пар соседних синих кубиков плюс число изолирующих квадратиков. Значит, на поверхности нечетное число синих граней. Если бы красных граней было столько же, то общее число квадратиков на поверхности не делилось бы на 4, но оно равно 600, противоречие.

27. 8.

Введем координаты так, чтобы оси шли вдоль линий сетки и единичный отрезок был равен стороне клетки. Точка пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ имеет координаты $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$. Эта точка является узлом в том и только в том случае, когда обе суммы $x_1 + x_2 + x_3$ и $y_1 + y_2 + y_3$ делятся на 3.

Это соображение позволяем нам перейти к рассмотрению остатков при делении на 3 координат всех узлов набора. Всего есть 9 возможных пар остатков, расположим их в виде таблицы 3×3 (рис.8). Будем класть в ячейку таблицы фишку для каждого узла, координаты которого при делении на 3 дают такие остатки.

(0,2)	(1,2)	(2,2)
(0,1)	(1,1)	(2,1)
(0,0)	(1,0)	(2,0)

Рис. 8

В наборе, подходящем под условие задачи, не может быть трех фишек, обе суммы координат которых делятся на 3. Сумма трех чисел делится на 3 в том и только в том случае, когда либо все три слагаемых дают одинаковые остатки при делении на 3, либо все они дают три разных остатка при делении на 3. Поэтому запрещены следующие ситуации (и только они):

(1) в одной клетке лежат три фишки;

(2) в каждой клетке ряда (строки или столбца) лежит по фишке;

(3) по фишке лежит в трех клетках, расположенных в трех разных строках и трех разных столбцах.

Пример. Можно положить 8 фишек: по 2 в ячейки левого нижнего квадрата 2×2. Нетрудно проверить, что запреты не нарушаются. Приведем конкретное расположение точек на плоскости, дабы убедиться, что их действительно можно расставить так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой (рис.9).

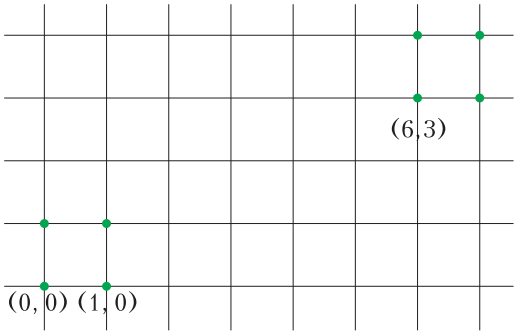

Рис. 9

Оценка. Покажем, что 9 фишек в таком наборе быть не может (а тогда, очевидно, не может быть и больше 9 фишек). Докажем от противного: предположим, что существует набор, подходящий под условие задачи, в котором точек хотя бы 9.

Обратимся к списку запретов. Заметим, что если в таблице менять местами строки или столбцы, то тройка фишек, нарушающая запрет, продолжает нарушать тот же запрет. Это наблюдение позволит нам рассуждать о расположении фишек в квадрате, не проводя перебор.

Мы раскладываем не менее 9 фишек, поэтому из запрета (1) следует, что всего занято хотя бы 5 клеток. Поэтому найдется строчка, в которой занято фишками хотя бы 2 клетки; при этом из запрета (2) следует, что в ней занято ровно 2 клетки. Переставим строки так, чтобы эта строка стала первой, а столбцы переставим так, чтобы пустая клетка в ней была справа (на рисунке 10 занятые клетки обозначены плюсом, пустые – минусом).

+	+	–

Рис. 10

Так как во всем квадрате 3×3 занято не меньше 5 клеток, то в левом нижнем квадрате 2×2 занята хотя бы одна клетка. Поменяем, если нужно, между собой вторую и третью строки, а также первый и второй столбцы так, чтобы эта клетка попала в левую клетку второй строки (рис.11).

a +	b +	c –
d +	e	f
g	h	i

Рис. 11

Обозначим клетки буквами. Из запретов (2) и (3) следует, что раз клетки a, b и d заняты, то клетки g и i пустые. Так

как всего занято хотя бы 5 клеток, то среди оставшихся клеток e, f и h хотя бы две заняты. Тогда одна из троек фишек в клетках $b-e-h$, $d-e-f$ или $a-f-h$ нарушает запрет.

28. 2^{49}.

Рассмотрим хорошую последовательность. Поставим между соседними числами запятые. Представим каждое число в виде суммы единиц – например, вместо 3 напишем $1+1+1$. Получим строчку из ста единиц, между соседними единицами стоит плюс или запятая. Например, из последовательности 3, 1, 4 получится

$$1+1+1,\ 1,\ 1+1+1+1$$

Всего знаков (плюсов и запятых) 99, из них 49 запятых. Пронумеруем эти знаки от 1 до 99. Разобьем их на пары 1–51, 2–52, 3–53, …, 49–99; без пары останется знак с номером 50. Знак с номером 50 не запятая, так как тогда можно было бы выбрать до этой запятой все числа, их сумма как раз равна 50. В парах не могут оба знака быть запятыми – иначе можно выбрать все числа между ними, их сумма равна 50. Всего запятых ровно 49, значит, в каждой паре ровно одна запятая. Заметим, что если это условие выполняется, то нет двух запятых, между которыми ровно 50 единиц. Поэтому количество хороших последовательностей равно количеству способов выбрать из этих 49 пар по одному знаку, который будет запятой, так что ответ 2^{49}.

XLII Турнир городов

Задачи весеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. Может.

Например, $(8!-4)+(8!-3)+\ldots+8!+\ldots+(8!+4)=$ $=9\cdot 8!=9!$. См. также задачу М2650 «Задачника «Кванта».

2. Не обязательно.

Например, нетрудно проверить, что в треугольнике с углами $\angle A=30°$, $\angle B=90°$, $\angle C=60°$ оба указанных угла равны 15°.

Замечание. Годится любой треугольник с углом C, равным 60°.

3. Может.

Первые три взвешивания такие: разбиваем гири на две пары способом, который еще не встречался, и сравниваем их. Разных способов как раз три. Мы получим равенство для пар 1001, 1005 и 1002, 1004. При этом только гиря 1001 в двух других взвешиваниях была в «легкой» паре и только гиря 1005 в двух других взвешиваниях была в «тяжелой» паре – так находим их. Оставшиеся две гири 1002 и 1004 различаем четвертым взвешиванием.

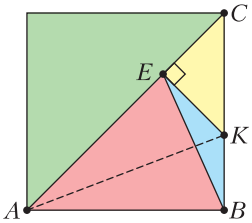

Рис. 12

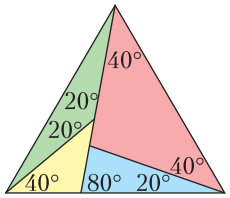

Рис. 13

4. Можно в обоих пунктах, см. рисунки 12 и 13. На рисунке 12 сначала проводим биссектрису AK угла BAC, а затем отражаем точку B относительно AK и получаем точку E.

5. а) Не всегда.

На рисунке 14 показано расположение доминошек на доске 6×7, которое не позволяет пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю: имеется единственный путь по доске, идущий из нижней левой клетки, и он в итоге упирается в последнюю вертикальную доминошку. Эта конструкция обобщается на любую доску размера $2n\times(2n+1)$.

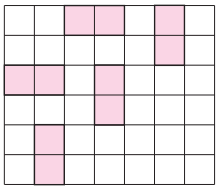
Рис. 14

б) Всегда.

Начальная и конечная клетки лежат на главной диагонали доски и имеют «координаты» $(1,1)$ и $(100,100)$. Докажем, что в любую свободную клетку этой диагонали можно попасть.

Действительно, пусть мы дошли до клетки (n,n). Если клетка $(n+1,n+1)$ свободна, то хоть одна из клеток $(n,n+1)$ и $(n+1,n)$ не занята и через нее можно пройти на клетку $(n+1,n+1)$.

Если же клетка $(n+1,n+1)$ занята, то из ее соседей занята ровно одна клетка, причем по стороне, поэтому один из двух путей из (n,n) в $(n+2,n+2)$ не закрыт.

10–11 классы

1. а) Не могут; б) могут.

Ясно, что проведено ровно две диагонали, причем они выходят из одной вершины, пусть из A. Тогда указанные точки пересечения медиан получаются гомотетией с центром A и коэффициентом 2/3 из середин сторон BC, CD и DE.

а) Эти середины сторон не могут лежать на одной прямой, так как прямая, не содержащая сторону выпуклого многоугольника, может пересечь его границу не более чем в двух точках.

б) Эти середины сторон могут лежать на одной прямой, как показано на рисунке 15.

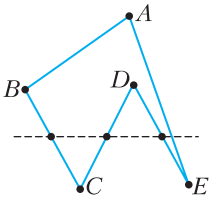

Рис. 15