Л. П. Шильников, К работам А. Г. Майера о центральных движениях,
Матем. заметки, 1969, том 5, выпуск 3, 335–339

https://www.mathnet.ru/mzm6853

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 3 (1969), 335—339

УДК 517.9

К РАБОТАМ А. Г. МАЙЕРА О ЦЕНТРАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ

Л. П. Шильников

Построена динамическая система в трехмерном евклидовом пространстве, описываемая системой дифференциальных уравнений с бесконечно дифференцируемыми правыми частями, порядковое число центральных траекторий которой превышает любой наперед заданный трансфинит 2-го класса. Библ. 9 назв.

Будем рассматривать динамические системы, определенные на компактных метрических пространствах. Как известно, такие динамические системы могут иметь только устойчивые по Пуассону и асимптотические траектории. Замыкание множества точек, принадлежащих траекториям, устойчивым по Пуассону, называется *центром* динамической системы, а входящие в него траектории — *центральными*. Для указанных систем центр всегда отличен от пустого множества. Оставшееся множество называется *оболочкой*. Оболочка может быть пуста, что, например, имеет место для консервативных систем с компактным фазовым пространством.

Как указано Биркгофом, одним из основных инвариантов, характеризующих топологическую структуру динамической системы, является порядковое число центральных траекторий, которое, однако, зависит от метода анализа. В настоящее время известно три таких метода. Два из них даны Биркгофом, а третий А. Г. Майером.

А. Удаление блуждающих точек*). Порядковое число центральных будем обозначать через β_A.

*) Подробное описание этого процесса см. [8], стр. 374 .

B. Удаление всех траекторий, которые не являются предельными для какой-либо траектории, и замыкание оставшегося множества. Для этого процесса порядковое число будем обозначать через β_B.

C. Удаление всех траекторий, не являющихся предельными для какой-либо траектории, но без замыкания оставшегося множества. Порядковое число в этом случае будем обозначать через β_C.

Заметим [5], что

$$\beta_A \geqslant \beta_B \geqslant \beta_C.$$

Как известно, А. Г. Майером [3, 4] были решены проблемы, поставленные Биркгофом в 1928 и 1941 гг. (см. [1], стр. 269, [2]):

1. Построить динамическую задачу с трехмерным многообразием состояний таким образом, чтобы порядковое число β_A центральных движений было больше трех.

2. Показать на примере, что может быть построен непрерывный поток в R_n, $n \geqslant 3$ *), для которого порядковое число центральных траекторий превышает n.

Более того, А. Г. Майером было установлено [5], что, каков бы ни был трансфинит второго класса, можно указать динамическую систему

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, x_3), \qquad i = 1, 2, 3,$$

для которой порядковое число центральных траекторий превышает указанный трансфинит, при этом R_3 есть заполненный тор в трехмерном евклидовом пространстве R^3, а функции X_i непрерывны и удовлетворяют условию Липшица.

Майер также показал [6], что существуют бесконечно дифференцируемые динамические системы, определенные на трехмерном многообразии M_3, для которых β_C может быть больше любого наперед заданного трансфинита второго класса. Однако эта система не может быть вложена в R^3.

Здесь приводится пример динамической системы, вкладываемой в трехмерное евклидово пространство с бесконечно дифференцируемыми правыми частями, порядковое

---

*) Для $n = 2$ известно, что $\beta_A \leqslant 2$.

число β_C которой превышает любой наперед заданный трансфинит 2-го класса.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{1}$$

где правые части есть бесконечно дифференцируемые функции, определенные в области

$$D\colon x^2 + y^2 \leqslant 1$$

и равные нулю на границе:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Относительно системы (1) предположим, что она имеет сепаратрису $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, идущую из грубого седла $O(0, 0)$ в него же. Докажем следующее утверждение: можно указать такое ω, что при достаточно малых $\mu \neq 0$ периодическое движение

$$L_0\colon x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = \omega t + c$$

системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= P(x_1, x_2) - \mu Q^{2k-1}(x_1, x_2)\sin x_3 \equiv X_1(x_1, x_2, x_3),\\ \frac{dx_2}{dt} &= Q(x_1, x_2) + \mu P^{2k-1}(x_1, x_2)\cos x_3 \equiv X_2(x_1, x_2, x_3),\\ \frac{dx_3}{dt} &= \omega \equiv X_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

при некотором целом k будет иметь грубую гомоклиническую кривую.

Согласно результату В. К. Мельникова [9] для существования грубой гомоклинической кривой при $\mu \neq 0$ у системы (2) достаточно, чтобы функция

$$\Delta_1(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ [Q^{2k-1}(\varphi(t-\tau), \psi(t-\tau))\sin\omega t\, \dot\psi(t-\tau) +$$
$$+ P^{2k-1}(\varphi(t-\tau), \psi(t-\tau))\cos\omega t\, \dot\varphi(t-\tau)] \times$$
$$\times \exp\Big(-\int_0^{t-\tau} (P_x(\varphi(\xi), \psi(\xi)) - Q_y(\varphi(\xi), \psi(\xi)))\,d\xi\Big)\Big\}\,dt$$

имела простой нуль. Легко видеть, что $\Delta_1(\tau, \omega)$ можно записать в виде

$$\Delta_1(\tau, \omega) = A(\omega)\sin\omega\tau + B(\omega)\cos\omega\tau.$$

где

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{[-P^{2k}(\varphi(t),\psi(t))\sin\omega t+Q^{2k}(\varphi(t),\psi(t))\cos\omega t]\times$$

$$\times\exp\Big(-\int_0^t P_x(\varphi(\xi),\psi(\xi))+Q_y(\varphi(\xi),\psi(\xi))\,d\xi\Big)\Big\}\,dt,$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{(P^{2k}\cos\omega t+Q^{2k}\sin\omega t)\times$$

$$\times\exp\Big[-\int_0^t(P_x+Q_y)\,d\xi\Big]\Big\}\,dt.$$

Таким образом, получаем, что $A(\omega)+iB(\omega)$ есть преобразование Фурье функции

$$f(t)=(Q^{2k}+iP^{2k})\exp\Big[-\int_0^t(P_x+Q_y)\,d\xi\Big].$$

Легко видеть, что $e^{\gamma t}|f(t)|\to 0$ при $t\to\pm\infty$ и некотором целом $k>0$, где γ — некоторая положительная постоянная. Поэтому $A(\omega)+iB(\omega)$ — аналитическая функция и, как следует из равенства Парсеваля, отличная от нуля. Следовательно, найдется ω такое, что $A^2(\omega)+B^2(\omega)\neq 0$. Утверждение доказано.

Как известно [7], динамическая система, порожденная траекториями, целиком лежащими в достаточно малой окрестности грубой гомоклинической кривой и не являющимися асимптотическими к периодическому движению L_0, может быть описана с помощью символической системы со счетным множеством символов. Поэтому [6] в такой подсистеме можно указать трансфинитную цепочку $L_1,\ldots, L_\omega, L_{\omega+1}, \ldots, L_\beta$, где β превышает любой наперед заданный трансфинит 2-го класса ν, такую, что:

1) ни одна из траекторий L_δ, $\delta<\beta$, не содержит себя среди своих ω-или α-предельных точек;

2) если $\rho<\delta$, то L_δ входит в состав α-и ω-предельных точек L_ρ.

Оставшаяся часть доказательства состоит в дословном повторении процесса Майера [6] «перерезания» траекторий с помощью бесконечно дифференцируемой функции $\chi(x_1, x_2, x_3)$, равной нулю в точках множества F, где F — оставшаяся часть круга $x_3=0$ после удаления из него некоторого счетного множества кругов, и положительной в $D\times S\setminus F$.

Теперь при трансфинитном повторении процесса C) удаления траекторий системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \chi$$

получим, что процесс нахождения центра будет содержать не менее β шагов.

Как в примерах А. Г. Майера, так и в нашем динамические системы имели континуум состояний равновесия. Поэтому естественным является рассмотрение проблем Биркгофа в классе динамических систем, содержащих только конечное число состояний равновесия. При этом наибольший интерес представляет построение примеров с трехмерным фазовым пространством.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном
университете им. Н. И. Лобачевского

Поступило
14.V.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Биркгоф Д., Динамические сустемы, М.— Л., 1941.
[2] Birkhoff G. D., Some unsolved problems of theoretical dynamics, Science, **94** (1941), 598.
[3] Майер А. Г., Об одной задаче Биркгофа, Докл. АН СССР, **55**, № 6 (1947), 477—479.
[4] Майер А. Г., О траекториях в трехмерном пространстве, Докл. АН СССР, **55**, № 7 (1946), 583—585.
[5] Майер А. Г., О центральных траекториях и проблеме Биркгофа, Матем. сб., **26**, № 2 (1950), 265—290.
[6] Майер А. Г., О порядковом числе центральных траекторий, Докл. АН СССР, **59**, № 8 (1948), 1393—1396.
[7] Шильников Л. П., Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа, Матем. сб., **74**, № 3 (1967), 378—397.
[8] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.— Л., 1949.
[9] Мельников В. К., Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях, Труды Моск. матем. о-ва, **12** (1963), 3—52.