S. V. Astashkin, Martingale transforms of a Rademacher sequence in symmetric spaces,
*Algebra i Analiz*, 2015, Volume 27, Issue 2, 20–41

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №2

# МАРТИНГАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАДЕМАХЕРА В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© С. В. АСТАШКИН

Предположим, что $v_k = c_k \chi_{\{\tau \geqslant k\}}$, где $\tau$ — момент остановки относительно системы Радемахера $\{r_k\}$ и $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда эквивалентность $\| \sum_{k=1}^n v_k r_k \|_X \asymp \| (\sum_{k=1}^n v_k^2)^{1/2} \|_X$ выполнена в симметричном пространстве $X$ (с константой, зависящей только от $X$) тогда и только тогда, когда индексы Бойда пространства $X$ нетривиальны. В случае, когда $v_k$ — всевозможные линейные комбинации $\sum_{i=0}^{k-1} a_k^i r_i$, $k = 1, 2, \ldots$, это соотношение имеет место, если и только если $X$ содержит замыкание $L_\infty$ в пространстве Орлича $\exp L_1$. Во второй части работы в терминах декаплинг-версии преобразований $f_n = \sum_{k=1}^n v_k r_k$, $n = 1, 2, \ldots$, получен новый критерий безусловности системы Хаара в симметричном пространстве.

## §1. Введение

В 1966 г. Буркхольдер доказал, что для каждого $1 < p < \infty$ существует константа $C_p > 0$ такая, что неравенство

$$C_p^{-1} \| f_\infty \|_p \leqslant \| P(f) \|_p \leqslant C_p \| f_\infty \|_p \tag{1}$$

справедливо для всех равномерно интегрируемых мартингалов $f = \{f_n\}_{n=0}^\infty$, где $f_\infty = \lim_{n \to \infty} f_n$ п.в. и $P(f) := \left( f_0^2 + \sum_{n=1}^\infty (f_n - f_{n-1})^2 \right)^{1/2}$ (см. [11]). В то же время соотношение (1) не имеет места, если $p = 1$ или $p = \infty$. Рассматривая аналогичный вопрос в общем симметричном пространстве (с.п.) $X$, Кикучи [17] установил, что неравенства

$$C^{-1} \| f_\infty \|_X \leqslant \| P(f) \|_X \leqslant C \| f_\infty \|_X \tag{2}$$

---

*Ключевые слова:* симметричное пространство, пространство Орлича, мартингальное преобразование, функции Радемахера, функции Хаара, функция Пэли, индексы Бойда, момент остановки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания.

выполнены для всех равномерно интегрируемых мартингалов $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ тогда и только тогда, когда индексы Бойда с.п. $X$ нетривиальны, т.е.

$$0 < \alpha_X \leqslant \beta_X < 1. \tag{3}$$

Данная работа посвящена изучению мартингалов вида

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} v_k r_k, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где $r_k$ — функции Радемахера, т.е. $r_k(t) = \operatorname{sign}\left[\sin(2^k \pi t)\right]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, а $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность, предсказуемая относительно потока $\sigma$-алгебр $\{\Sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$, порожденного системой $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $r_0 \equiv 1$. В самом простом случае, когда $v_k$ — константы, согласно классической теореме Родина–Семенова [25] неравенства

$$C^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k\right\|_X \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{1/2}$$

выполнены для произвольных $c_k \in \mathbb{R}$, если и только если с.п. $X \supset G$, где $G$ — замыкание $L_\infty$ в пространстве Орлича $\exp L_2$. Если речь идет о последовательностях независимых функций (в том числе независимых относительно системы Радемахера), результат будет иным: для того, чтобы неравенства

$$C^{-1}\left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^2\right)^{1/2}\right\|_X \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty} v_k(s) r_k(t)\right\|_{X([0,1]\times[0,1])} \leqslant C\left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^2\right)^{1/2}\right\|_X$$

были справедливы для произвольной последовательности независимых функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы пространство $X$ имело так называемое свойство Круглова ($X \in \mathbb{K}$) [2, теорема 2]. Здесь $X([0,1]\times[0,1])$ — с.п. функций на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ с нормой $\|f\|_{X([0,1]\times[0,1])} = \|f^*\|_X$, где $f^*$ — невозрастающая перестановка функции $|f|$ (определения см. в следующем параграфе). Подробнее о свойстве Круглова см. [10, 8, 9]; отметим здесь только, что из условия $\alpha_X > 0$ следует: $X \in \mathbb{K}$, а также то, что пространство Орлича $\exp L_p \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда $p \geqslant 1$.

В первой части работы поведение мартингальных преобразований (4) изучается для некоторых других классов $\{\Sigma_k\}$-предсказуемых последовательностей. Уточняя ранее приведенный результат Кикучи [17], мы доказываем, что неравенства (3) имеют место уже в том случае, когда соотношения (2) выполнены для мартингалов (4) с коэффициентами $v_k$ вида: $v_k = c_k \chi_{\{\tau \geqslant k\}}$, $k = 1, 2, \ldots$, где момент остановки $\tau$ относительно потока

$\{\Sigma_k\}$ и $c_k \in \mathbb{R}$ произвольны (теорема 1). Более того, показано, что два момента остановки

$$\tau_1 := \inf\big\{k = 2,3,\cdots : r_k \neq r_{k-1}\big\} \quad \text{и} \quad \tau_2 := \inf\big\{k = 2,3,\cdots : r_k = r_{k-1}\big\}$$

являются „критическими“: если для некоторого $C > 0$, $j = 1,2$, и всех $c_i \in \mathbb{R}$

$$C^{-1}\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\chi_{\{\tau_j \geqslant i\}}r_i\Big\|_X \leqslant \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2\chi_{\{\tau_j \geqslant i\}}\Big)^{1/2}\Big\|_X \leqslant C\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\chi_{\{\tau_j \geqslant i\}}r_i\Big\|_X,$$

то индексы Бойда с.п. $X$ удовлетворяют неравенствам (3).

В то же время если $v_k$ — всевозможные линейные комбинации $\sum_{i=0}^{k-1} a_k^i r_i$, $k = 1,2,\dots$, неравенства (2) имеют место тогда и только тогда, когда $X$ содержит замыкание $L_\infty$ в пространстве Орлича $\exp L_1$ (теорема 2).

Естественной декаплинг-версией преобразований (4) являются мартингалы

$$g_n(s,t) := \sum_{k=1}^{n} v_k(s)r_k(t), \quad 0 \leqslant s,\ \ t \leqslant 1.$$

Основываясь на результатах Хитченко [13] о сравнении их с преобразованиями (4) в $L_p$-пространствах, а также на пример Талаграна, приведенный там же, во второй части работы мы обсуждаем аналогичный вопрос в случае общих с.п. Здесь же в терминах преобразований $g_n$, $n = 1,2,\dots$, получен новый критерий безусловности системы Хаара в с.п. (теорема 3).

## §2. Определения и предварительные сведения

(a) *Симметричные пространства.* Банахово пространство $X$ измеримых на $[0,1]$ функций называется *симметричным* (с.п.) или *перестановочно-инвариантным*, если 1) оно идеально, т.е. из $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ для п.в. $t \in [0,1]$ и $y \in X$ следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant \|y\|_X$; 2) из *равноизмеримости* функций $x$ и $y$, т.е. равенства

$$m\{t \in [0,1] : |y(t)| > u\} = m\{t \in [0,1] : |x(t)| > u\} \quad (u > 0),$$

где $m(a)$ — мера Лебега множества $a \subset \mathbb{R}$, и $y \in X$ вытекает: $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$. В частности, любая измеримая на $[0,1]$ функция $x(t)$ равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{u \geqslant 0 \ : \ m\{s \in [0,1] : |x(s)| > u\} < t\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Если $X$ — с.п. на $[0,1]$, то *двойственное* пространство $X'$ состоит из всех $y$, для которых $\|y\|_{X'} = \sup\left\{\int_0^1 x(t)y(t)\,dt : \quad \|x\|_X \ \leqslant 1\right\} < \infty$. Пространство $X'$ также симметрично; оно изометрически вложено в сопряженное $X^*$; при этом $X' = X^*$ тогда и только тогда, когда $X$ сепарабельно. С.п. $X$ называется *максимальным*, если $X = X''$. Последнее эквивалентно следующему: из того, что $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \dots)$, $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_X < \infty$ и $x_n \to x$ п.в. на $[0,1]$, вытекает: $x \in X$ и $||x||_X \leqslant \liminf_{n\to\infty} ||x_n||_X$. Всюду в дальнейшем будет предполагаться, что с.п. либо сепарабельно, либо максимально. Напомним [18, теоремы 2.4.9 и 2.4.10], что любое такое с.п. $X$ имеет следующее свойство: если $x \in X$ и

$$\int_0^t y^*(s)\,ds \leqslant \int_0^t x^*(s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

то $y \in X$ и $\|y\|_X \leqslant \|x\|_X$. Кроме того, норма в каждом таком с.п. $X$ *порядково полунепрерывна*, т.е. $X$ изометрически вложено в $X''$. Будем также считать выполненным условие нормировки: $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$, где $\chi_e(t)$ — характеристическая функция измеримого подмножества $e \subset [0,1]$. Тогда $L_\infty \subset X \subset L_1$ и $\|x\|_{L_1} \leqslant \|x\|_X \leqslant \|x\|_{L_\infty}$ для любого $x \in L_\infty$. Если $X \neq L_\infty$, то замыкание $L_\infty$ в $X$, называемое *сепарабельной частью* пространства $X$ и обозначаемое через $X_0$, является сепарабельным с.п. В частности, норма любой функции из $X_0$ абсолютно непрерывна. Последнее означает, что для каждой функции $x \in X_0$ и для произвольной монотонно убывающей последовательности множеств $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, $e_k \subset [0,1]$, таких, что $\lim_{k\to\infty} m(e_k) = 0$, имеем $\lim_{k\to\infty} \|x\chi_{e_k}\|_X = 0$.

В каждом с.п. $X$ ограниченно действует оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau)\chi_{[0,1]}(t/\tau)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, где $\tau > 0$. При этом $\|\sigma_\tau\|_{X\to X} \leqslant \max(1,\tau)$ [18, теоремы 2.4.4 и 2.4.5]. Числа

$$\alpha_X = \lim_{\tau\to 0} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_X}{\ln\tau} \quad \text{и} \quad \beta_X = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_X}{\ln\tau}$$

называются *индексами Бойда* с.п. $X$. Всегда $0 \leqslant \alpha_X \leqslant \beta_X \leqslant 1$. Например, $\alpha_{L_p} = \beta_{L_p} = 1/p$ для всех $p \in [1,\infty]$.

Важный класс с.п. образуют *пространства Орлича*, являющиеся естественным обобщением $L_p$-пространств. Пусть $M(u)$ — *функция Орлича*, т.е. строго возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, $M(0) = 0$. Тогда пространство Орлича $L_M$ состоит из всех измеримых функций $x(t)$ на $[0,1]$ таких, что

$$\int_0^1 M\left(|x(t)|/\lambda\right)\,dt \leqslant 1$$

для достаточно большого $\lambda > 0$. В качестве нормы в $L_M$ рассматривается функционал $\|x\|_{L_M} = \inf \lambda$, где точная нижняя грань берется по всем $\lambda > 0$, для которых выполнено предыдущее неравенство. Классическим является пространство Орлича, построенное по функции Орлича, эквивалентной функции $e^{u^p} - 1$, $p > 0$. Оно обозначается обычно через $\exp L_p$. Хорошо известна (см. [21] или [3, лемма 3.2]) следующая характеризация сепарабельной части этого пространства: $x \in (\exp L_p)_0$, если и только если

$$\lim_{t\to+0} \frac{x^*(t)}{\log_2^{1/p}(2/t)} = 0.$$

(б) *Мартингальные преобразования и система Хаара.* Пусть $\{\mathcal{A}_k\}_{k=0}^\infty$ — поток $\sigma$-алгебр на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, т.е. $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_k \subset \dots \subset \mathcal{A}$. Последовательность случайных величин (с.в.) $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ будем называть *предсказуемой относительно этого потока* (или $\{\mathcal{A}_k\}$-*предсказуемой*), если для каждого $k = 0, 1, \dots$ с.в. $v_k$ $\mathcal{A}_{k-1}$-измерима.

Предположим, что $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$ — последовательность независимых с.в. на пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\int_\Omega \xi_k \, d\mathbb{P} = 0$ и $\mathcal{A}_k$ — $\sigma$-алгебра, порожденная набором с.в. $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k\}$, $k = 0, 1, \dots$ Тогда для произвольной $\{\mathcal{A}_k\}$-предсказуемой последовательности $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ случайные величины

$$\eta_n := \sum_{k=1}^n v_k \xi_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

образуют мартингал (определение мартингала и его свойства см. в [23, 26] или [28]). По этой причине последовательность $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ называют *мартингальным преобразованием* последовательности $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$. Напомним, что с.в. $\tau = \tau(\omega)$ со значениями во множестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$ называется *моментом остановки* относительно потока $\sigma$-алгебр $\{\mathcal{A}_k\}_{k=0}^\infty$, если $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant k\} \in \mathcal{A}_k$ $(k = 0, 1, \dots)$.

В работе изучаются мартингальные преобразования простейшей и в то же время наиболее важной последовательности независимых функций — системы Радемахера $\{r_k\}_{k=0}^\infty$, где $r_0 \equiv 1$. Роль $\mathcal{A}_k$ в этом случае играет $\sigma$-алгебра $\Sigma_k$, порожденная двоичными интервалами порядка $k$, т.е. интервалами $\Delta_k^i = ((i-1)2^{-k}, i2^{-k})$, $i = 1, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, \dots$ Согласно теореме Радемахера–Колмогорова, ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty a_k r_k(t)$ сходится п.в., если и только если $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ (см. [16, §4.5] или [3, теоремы 1.1 и 1.2]).

Напомним, что функции $h_{0,0}(t) = 1$,

$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_{n+1}^{2k-1}, \\ -1, & t \in \Delta_{n+1}^{2k}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0,1], \end{cases}$$

где $n = 0, 1, \ldots$, $k = 1, \ldots, 2^n$, образуют *систему Хаара* (подробнее см. монографии [15, 12, 24], [22, гл. 1]). Полная ортонормированная система $\{2^{n/2} h_n^k\}$ является монотонным базисом в любом сепарабельном с.п. Для того, чтобы система Хаара была безусловным базисом в сепарабельном с.п. $X$, необходимо и достаточно, чтобы $0 < \alpha_X \leqslant \beta_X < 1$ (см. [20, 2.c.6] или [18, 2.9.6]). Еще одно эквивалентное этому условие: $\|x\|_X \asymp \|Px\|_X$, где

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i} h_{k-1,i} \quad \text{и} \quad Px = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i}^2 h_{k-1,i}^2 \right)^{1/2} \tag{5}$$

[15, теорема 1.11]. Выражение $f \asymp g$ всюду означает, что $C^{-1} \leqslant g/f \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех значений аргумента неотрицательных функций или квазинорм $f$ и $g$. Функция $Px(t)$ называется *функцией Пэли*. *Коэффициенты Фурье–Хаара* $c_{n,k} = c_{n,k}(x)$ функции $x \in L_1 = L_1[0,1]$ определяются соотношением

$$c_{n,k} = 2^n \int_0^1 x(s) h_{n,k}(s)\, ds, \quad n = 0, 1, \ldots, \ k = 1, \ldots, 2^n.$$

Пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — $\{\Sigma_k\}$-предсказуемая последовательность. Согласно классической теореме Дуба (см. [28, теорема 3.14] или [26, теорема 7.4.1]) при условии, что $\sup_{n=1,2,\ldots} \int_0^1 |\sum_{k=1}^n v_k(t) r_k(t)|\, dt < \infty$, ряд

$$Rv := \sum_{k=1}^{\infty} v_k r_k \tag{6}$$

сходится п.в. на $[0,1]$ к суммируемой функции. Заметим, что функции $v_k$, $k = 1, 2, \ldots$, любой $\{\Sigma_k\}$-предсказуемой последовательности могут быть представлены в виде

$$v_k := \sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i} \chi_{\Delta_{k-1}^i}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

для некоторых $c_{k,i} \in \mathbb{R}$. Следовательно, так как

$$r_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{2^n} h_{n,k}(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то справедливо равенство

$$Rv = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i} h_{k-1,i}, \tag{8}$$

показывающее, что $c_{k,i}$ — коэффициенты Фурье–Хаара функции $Rv$. В тех же терминах функция Пэли (5) выражается следующим образом:

$$Pv = \left( \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2 \right)^{1/2}. \tag{9}$$

Ввиду последних соотношений, а также теоремы 2 из [7] о рядах Хаара в с.п. получаем следующий результат.

**Предложение 1.** *Пусть $X$ — с.п. на $[0,1]$.*

1. *Для того, чтобы для некоторого $C > 0$ и произвольной $\{\Sigma_k\}$-предсказуемой последовательности $\{v_k\}$ выполнялось неравенство*

$$\|Rv\|_X \leqslant C \|Pv\|_X,$$

*необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_X > 0$.*

2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *для некоторого $C > 0$ и произвольной $\{\Sigma_k\}$-предсказуемой последовательности $\{v_k\}$*

$$\|Pv\|_X \leqslant C \|Rv\|_X;$$

(b) $0 < \alpha_X \leqslant \beta_X < 1$.

Далее мы будем рассматривать также декаплинг-версию ряда $Rv$, представляющую собой (формальный) ряд

$$R'v(s,t) := \sum_{k=1}^{\infty} v_k(s) r_k(t), \quad 0 \leqslant s, \ t \leqslant 1.$$

Если коэффициенты $v_k$ определяются соотношением (7), то

$$R'v(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_k^i \chi_{\Delta_{k-1}^i}(s) r_k(t). \tag{10}$$

В отличие от $\{v_k r_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность $\{v_k(s) r_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ безусловна с константой 1 в любом с.п. на $[0,1] \times [0,1]$. Справедливо даже следующее несколько более сильное утверждение, доказательство которого приводится ради полноты изложения.

**Лемма 1.** *Семейство функций*

$$\{\chi_{\Delta^i_{k-1}}(s)r_k(t) : k = 1, 2, \ldots ;\ i = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}\},$$

*где* $\Delta^i_j$ *— двоичные интервалы из отрезка* $[0,1]$*, безусловно с константой* 1 *в каждом с.п.* $X([0,1]\times[0,1])$.

**Доказательство.** Для произвольных $c_{k,i} \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_{k,i} = \pm 1$ и $\tau > 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} m\Big\{(s,t) \in [0,1]\times[0,1] : \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} \varepsilon_{k,i}c_{k,i}\chi_{\Delta^i_{k-1}}(s)r_k(t)\Big| > \tau\Big\} \\ = \int_0^1 m\Big\{t \in [0,1] : \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} \varepsilon_{k,i}c_{k,i}\chi_{\Delta^i_{k-1}}(s)r_k(t)\Big| > \tau\Big\}\,ds \\ = \int_0^1 m\Big\{t \in [0,1] : \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k,i_k(s)}c_{k,i_k(s)}r_k(t)\Big| > \tau\Big\}\,ds, \end{aligned}$$

где числа $i_k(s) = 1, \ldots, 2^{k-1}$ выбираются так, что $s \in \Delta^{i_k(s)}_{k-1}$ для всех $s \in [0,1]$ и $k = 1, 2, \ldots$ Тем самым ввиду элементарных свойств системы Радемахера последняя величина равна

$$\begin{aligned} \int_0^1 m\Big\{t \in [0,1] : \Big|\sum_{k=1}^{\infty} c_{k,i_k(s)}r_k(t)\Big| > \tau\Big\}\,ds \\ = m\Big\{(s,t) \in [0,1]\times[0,1] : \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i}\chi_{\Delta^i_{k-1}}(s)r_k(t)\Big| > \tau\Big\}, \end{aligned}$$

и, значит, из определения с.п. следует, что для произвольных $\varepsilon_{k,i} = \pm 1$

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} \varepsilon_{k,i}c_{k,i}\chi_{\Delta^i_{k-1}}(s)r_k(t)\Big\|_{X([0,1]\times[0,1])} \\ = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i}\chi_{\Delta^i_{k-1}}(s)r_k(t)\Big\|_{X([0,1]\times[0,1])}. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, ввиду [15, теорема 1.10] утверждение доказано. □

## §3. Мартингальные преобразования, порожденные моментом остановки

В этом параграфе мы рассмотрим мартингальные преобразования (4) в случае, когда $v_k = c_k\chi_{\{\tau\geqslant k\}}$, где $\tau$ — момент остановки относительно потока $\sigma$-алгебр $\{\Sigma_k\}$, а $c_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Усиливая предложение 1, покажем, что нетривиальность индексов Бойда с.п. является следствием выполнения соотношений (2) для этого специального класса $\{\Sigma_k\}$-предсказуемых последовательностей.

**Теорема 1.** *Для каждого с.п. $X$ на $[0,1]$ следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *с константами, не зависящими от момента остановки $\tau$ и $c_i \in \mathbb{R}$,*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\chi_{\{\tau\geqslant i\}}r_i\Big\|_X \asymp \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2\chi_{\{\tau\geqslant i\}}\Big)^{1/2}\Big\|_X; \tag{12}$$

(b) $0 < \alpha_X \leqslant \beta_X < 1$.

**Доказательство.** Ввиду предложения 1 достаточно доказать импликацию $(a) \Rightarrow (b)$. Рассмотрим момент остановки

$$\tau_1 := \inf\{k = 2, 3, \dots : r_k \neq r_{k-1}\}.$$

Тогда, если

$$R_1 = R_1(c) := \sum_{i=1}^{\infty} c_i\chi_{\{\tau_1\geqslant i\}}r_i,$$

где $c_i \geqslant 0$, $c_{2i} = c_{2i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, то

$$\begin{aligned}|R_1| &= \sum_{k=2}^{\infty}\Big|\sum_{i=1}^{k} c_ir_i\Big|\chi_{\{\tau_1=k\}} = |c_1 + c_2 - c_3|\chi_{\{\tau_1=3\}} + (c_1+c_2)\chi_{\{\tau_1=4\}} \\ &+ \dots\Big|\sum_{i=1}^{2k-2} c_i - c_{2k-1}\Big|\chi_{\{\tau_1=2k-1\}} + \Big(\sum_{i=1}^{2k-2} c_i\Big)\chi_{\{\tau_1=2k\}} \\ &+ \dots \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} c_{2i}\Big)\chi_{\{\tau_1=2k+2\}}.\end{aligned}$$

Множества $\{\tau_1 = 2k+2\}$, $k = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются и $m\{\tau_1 = 2k+2\} = 2^{-2k-1}$. Поэтому из последнего соотношения следует, что

$$R_1^*(t) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i\Big)\chi_{[2^{-2k-1}, 2^{-2k})}(t), \quad 0 < t \leqslant 1,$$

где $a_k = c_{2k}$. Обозначив правую часть в этом неравенстве через $x_a$, заметим, что

$$x_a + \sigma_{1/2} x_a = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{k} a_i \right) \chi_{[2^{-2k-2}, 2^{-2k})}.$$

Тем самым, так как $\|\sigma_{1/2}\|_{X \to X} \leqslant 1$, из предыдущего неравенства получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{k} a_i \right) \chi_{[4^{-k-1}, 4^{-k})} \right\|_X \leqslant 2 \|R_1\|_X. \tag{13}$$

С другой стороны, если

$$\tau_2 := \inf\{k = 2, 3, \dots : r_k = r_{k-1}\}, \quad R_2 = R_2(c) := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{\{\tau_2 \geqslant i\}} r_i$$

и по-прежнему $c_i \geqslant 0$, $c_{2i} = c_{2i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, то

$$\begin{aligned} |R_2| &= \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{k} c_i r_i \right| \chi_{\{\tau_2 = k\}} = (c_1 + c_2) \chi_{\{\tau_2 = 2\}} + c_3 \chi_{\{\tau_2 = 3\}} \\ &\quad + \dots (c_{2k-1} + c_{2k}) \chi_{\{\tau_2 = 2k\}} + c_{2k+1} \chi_{\{\tau_2 = 2k+1\}} + \dots \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \chi_{\{\tau_2 = 2k\}} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k} \chi_{\{\tau_2 = 2k-1\}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Так как множества $\{\tau_2 = j\}$, $j = 2, 3, \dots$, попарно не пересекаются и $m\{\tau_2 = j\} = 2^{-j+1}$, получаем

$$\left( \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k} \chi_{\{\tau_2 = 2k-1\}} \right)^*(t) = \sigma_2 \left( \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k} \chi_{\{\tau_2 = 2k\}} \right)^*(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Поэтому ввиду того, что $\|\sigma_2\|_{X \to X} \leqslant 2$,

$$\begin{aligned} \left\| 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \chi_{\{\tau_2 = 2k\}} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k} \chi_{\{\tau_2 = 2k-1\}} \right\|_X &\leqslant 4 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \chi_{[4^{-k}, 4^{-k+1})} \right\|_X \\ = 4 \left\| \sigma_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \chi_{[4^{-k-1}, 4^{-k})} \right) \right\|_X &\leqslant 8 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \chi_{[4^{-k-1}, 4^{-k})} \right\|_X. \end{aligned}$$

Отсюда и из (14) получаем, что

$$\|R_2\|_X \leqslant 8 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{[4^{-k-1}, 4^{-k})} \right\|_X, \tag{15}$$

где $a_k = c_{2k}$.

Далее, так как $m\{\tau_1 = k\} = m\{\tau_2 = k\}$, $k = 1, 2, \dots$, то по условию

$$\begin{aligned}\|R_1(c)\|_X &\asymp \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \chi_{\{\tau_1 \geqslant i\}}\Big)^{1/2}\Big\|_X = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i^2 \chi_{\{\tau_1 = k\}}\Big)^{1/2}\Big\|_X \\ &= \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i^2 \chi_{\{\tau_2 = k\}}\Big)^{1/2}\Big\|_X = \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \chi_{\{\tau_2 \geqslant i\}}\Big)^{1/2}\Big\|_X \\ &\asymp \|R_2(c)\|_X.\end{aligned}$$

В итоге отсюда, а также из (13) и (15) для некоторого $K > 0$ и произвольной последовательности неотрицательных чисел $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ получаем

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i\Big)\chi_{[4^{-k-1},4^{-k})}\Big\|_X \leqslant K\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{[4^{-k-1},4^{-k})}\Big\|_X. \tag{16}$$

Покажем, что для произвольной функции $y \in L_1[0,1]$, $y = y^*$, и для каждого $m \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\int_0^t \sigma_{4^{-m}} y(s)\,ds \leqslant \frac{1}{m}\int_0^t \sum_{k=0}^{m} \sigma_{4^{-k}} y(s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{17}$$

Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что $0 \leqslant t \leqslant 4^{-m}$, и тогда, так как функция $\frac{1}{t}\int_0^t y(s)\,ds$ убывает, получаем

$$\begin{aligned}\int_0^t \sum_{k=0}^{m} \sigma_{4^{-k}} y(s)\,ds &= \sum_{k=0}^{m}\int_0^t y(4^k s)\,ds \\ &= \sum_{k=0}^{m} 4^{-k}\int_0^{4^k t} y(s)\,ds \geqslant m4^{-m}\int_0^{4^m t} y(s)\,ds = m\int_0^t \sigma_{4^{-m}} y(s)\,ds,\end{aligned}$$

откуда вытекает (17). Тем самым ввиду ранее сделанного предположения относительно с.п. $X$ (см. §2)

$$\|\sigma_{4^{-m}} y\|_X \leqslant \frac{1}{m}\Big\|\sum_{k=0}^{m} \sigma_{4^{-k}} y\Big\|_X, \tag{18}$$

если функция $y \in X$ неотрицательна и не возрастает.

Пусть

$$v_a := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{[4^{-k-1},4^{-k})}, \tag{19}$$

где $a_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ не убывает. Тогда ввиду того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Bigl( \sum_{i=1}^{k} a_i \Bigr) \chi_{[4^{-k-1}, 4^{-k})} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{4^{-k}} v_a,$$

неравенство (16) может быть переписано следующим образом:

$$\Bigl\| \sum_{k=0}^{m} \sigma_{4^{-k}} v_a \Bigr\|_X \leqslant K \|v_a\|_X, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как $v_a$ не возрастает, то отсюда и из (18) следует

$$\|\sigma_{4^{-m}} v_a\|_X \leqslant \frac{K}{m} \|v_a\|_X, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Предположим теперь, что функция $x \in X$ произвольна. Тогда если

$$v := \sum_{k=1}^{\infty} x^*(4^{-k}) \chi_{[4^{-k-1}, 4^{-k})}, \tag{21}$$

то

$$\sigma_{1/4} x^*(t) \leqslant v(t) \leqslant x^*(t), \quad 0 < t \leqslant 1.$$

Заметим, что $v = v_a$, если $a_k = x^*(4^{-k})$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому из предыдущих неравенств и (20) следует

$$\|\sigma_{4^{-m}} \left( \sigma_{1/4} x^* \right) \|_X \leqslant \|\sigma_{4^{-m}} v\|_X \leqslant \frac{K}{m} \|v\|_X \leqslant \frac{K}{m} \|x\|_X, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$\|\sigma_{4^{-m-1}} x\|_X \leqslant \frac{K}{m} \|x\|_X,$$

и, значит, $\lim_{s \to +0} \|\sigma_s\|_{X \to X} = 0$, т.е. $\alpha_X > 0$.

Для доказательства неравенства $\beta_X < 1$ достаточно проверить, что оператор $Q$, сопряженный к оператору Харди, определяемый соотношением

$$Qx(t) := \int_t^1 \frac{x(s)}{s} \, ds, \quad 0 < t \leqslant 1,$$

ограничен в $X$ [18, теорема 2.6.8].

Пусть $x \in X$ такая, что $x = x^*$, а функция $v$ определена соотношением (21). Так как $\operatorname{supp} v \subset [0, 1/4]$, то

$$Q(\sigma_4 v)(t) = \int_t^1 \frac{v(s/4)}{s} \, ds = \int_{t/4}^1 \frac{v(s)}{s} \, ds = \sigma_4 (Qv)(t).$$

Следовательно, учитывая, что

$$v(t) \leqslant x(t) \leqslant \sigma_4 v(t), \;\; 0 < t \leqslant 1,$$

получаем
$$\|Qx\|_X \leqslant \|Q(\sigma_4 v)\|_X = \|\sigma_4(Qv)\|_X \leqslant 4\|Qv\|_X.$$
Нетрудно показать, что норма $Q$ достигается на множестве неотрицательных невозрастающих функций (см. также [19, доказательство теоремы 1]). Поэтому из приведенных соотношений следует, что
$$\|Q\|_{X\to X} \leqslant 4 \sup \|Qv_a\|_X, \tag{22}$$
где супремум берется по всем функциям $v_a$, $\|v_a\|_X \leqslant 1$, вида (19), где $a_k \geqslant 0$ и не убывают. Для оценки супремума в (22) заметим, что для всех $k \in \mathbb{N}$
$$Qv_a(4^{-k-1}) = \ln 4 \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i,$$
откуда ввиду убывания $Qv_a$
$$Qv_a(t) \leqslant \ln 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \chi_{[4^{-k-1},4^{-k})}(t).$$
Отсюда и из (16) следует, что $\|Qv_a\|_X \leqslant K \ln 4 \|v_a\|_X \leqslant K \ln 4$, и, значит, ввиду (22) оператор $Q$ ограничен в $X$. Тем самым доказательство закончено. $\square$

## §4. Мартингальные преобразования, порожденные линейными комбинациями функций Радемахера

В случае, когда $v_k$ — линейные комбинации функций Радемахера, свойства мартингальных преобразований последовательности Радемахера становятся иными, нежели в теореме 1.

Напомним, что через $X_0$ обозначается замыкание $L_\infty$ в с.п. $X$.

**Теорема 2.** *Пусть $X$ — с.п. на $[0,1]$ и $v_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_k^i r_i$, $k = 1, 2, \dots$, где $r_0(t) = 1$. Тогда для того, чтобы неравенства*
$$C^{-1}\|Pv\|_X \leqslant \|Rv\|_X \leqslant C\|Pv\|_X \tag{23}$$
*выполнялись с константой $C > 0$, не зависящей от коэффициентов $a_k^i \in \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы $X \supset (\exp L_1)_0$.*

**Доказательство.** Прежде всего, ввиду того, что всякое с.п. на $[0,1]$ вложено в пространство $L_1$ с константой 1 (см. §2), применяя неравенства

Минковского и Хинчина [27], получим

$$\begin{aligned}\|Pv\|_X &= \Bigg\|\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{k-1}a_k^i r_i\Big)^2\Bigg)^{1/2}\Bigg\|_X \geqslant \Bigg\|\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{k-1}a_k^i r_i\Big)^2\Bigg)^{1/2}\Bigg\|_{L_1} \\ &\geqslant \Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\Big\|\sum_{i=0}^{k-1}a_k^i r_i\Big\|_{L_1}^2\Bigg)^{1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\big(a_k^i\big)^2\Bigg)^{1/2}.\end{aligned} \tag{24}$$

Покажем, что из вложения $X \supset (\exp L_1)_0$ вытекает противоположное неравенство. Так как после возведения в квадрат

$$\begin{aligned}\|Pv\|_X &= \Bigg\|\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{k-1}a_k^i r_i\Big)^2\Bigg)^{1/2}\Bigg\|_X \\ &= \Bigg\|\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\big(a_k^i\big)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{0\leqslant i<j<k}a_k^i a_k^j r_i r_j\Bigg)^{1/2}\Bigg\|_X,\end{aligned}$$

то, полагая

$$A^2 := \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\big(a_k^i\big)^2 \quad \text{и} \quad U := \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{0\leqslant i<j<k}a_k^i a_k^j r_i r_j,$$

получим, что

$$\|Pv\|_X = \Big\|\big(A^2+2U\big)^{1/2}\Big\|_X \leqslant \|A^2+2U\|_X^{1/2} \leqslant \big(A^2+2\|U\|_X\big)^{1/2}. \tag{25}$$

В работе [1] доказано, что система $\{r_i r_k\}_{1\leqslant i<k<\infty}$ эквивалентна в с.п. $X$ стандартному базису $\ell_2$ тогда и только тогда, когда $X \supset (\exp L_1)_0$. Поэтому если последнее вложение имеет место, то ввиду равенства

$$U = \sum_{0\leqslant i<j<\infty}\Bigg(\sum_{k=j+1}^{\infty}a_k^i a_k^j\Bigg) r_i r_j$$

и неравенства Минковского

$$\begin{aligned}\|U\|_X &\asymp \Bigg(\sum_{0\leqslant i<j<\infty}\Bigg(\sum_{k=j+1}^{\infty}a_k^i a_k^j\Bigg)^2\Bigg)^{1/2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{0\leqslant i<j<k}\Big(a_k^i a_k^j\Big)^2\Bigg)^{1/2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=1}^{k-1}\Big(a_k^j\Big)^2\sum_{i=0}^{j-1}\big(a_k^i\big)^2\Bigg)^{1/2} \leqslant A^2.\end{aligned}$$

Отсюда и из (25) следует, что

$$\|Pv\|_X \leqslant \sqrt{3}A = \sqrt{3}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\big(a_k^i\big)^2\Bigg)^{1/2}. \tag{26}$$

С другой стороны, так как $X \supset (\exp L_1)_0$ и

$$Rv = \sum_{k=1}^{\infty} v_k r_k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} a_k^i r_i r_k,$$

то, еще раз применяя уже использовавшийся результат из [1], заключаем, что

$$\|Rv\|_X \asymp \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} \left(a_k^i\right)^2\right)^{1/2}. \tag{27}$$

Отсюда и из соотношений (24) и (26) получаем неравенства (23).

Пусть теперь, наоборот, выполнено (23). Тогда, в частности, с константами, не зависящими от $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\right\|_X \asymp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2},$$

и, значит, $X \supset G$, где $G$ — замыкание $L_\infty$ в пространстве Орлича $\exp L_2$ (см. [25], а также §1). Следовательно, так как пространство $G$ 2-выпукло (см., например, [14]), получим

$$\|Pv\|_X \leqslant \|Pv\|_G \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=0}^{k-1} a_k^i r_i\right\|_G^2\right)^{1/2} \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\left(a_k^i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда, а также из (24) и (23) вытекает (27), т.е. система $\{r_i r_k\}_{1 \leqslant i < k < \infty}$ эквивалентна в с.п. $X$ стандартному базису $\ell_2$. Но тогда опять ввиду результатов [1] $X \supset (\exp L_1)_0$, и теорема доказана. □

## §5. Безусловность системы Хаара в с.п.

Как уже ранее отмечалось, система Хаара — безусловный базис в сепарабельном с.п. $X$, если и только если $\|x\|_X \asymp \|Px\|_X$, где $Px$ — функция Пэли (см. (5)) [15, теорема 1.11]. Докажем аналогичный критерий безусловности системы Хаара в терминах декаплинг-суммы (10).

Начнем с представляющего самостоятельный интерес утверждения о сравнении функции Пэли $Pv = \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^2\right)^{1/2}$ и суммы

$$R'v(s,t) := \sum_{k=1}^{\infty} v_k(s) r_k(t).$$

**Предложение 2.** *Для каждого с.п. $X$ на $I = [0,1]$ следующие условия эквивалентны:*

(a) *существует* $M > 0$ *такое, что для произвольной* $\{\Sigma_k\}$*-предсказуемой последовательности* $\{v_k\}$ *имеет место неравенство*

$$\|R'v\|_{X(I\times I)} \leqslant M\|Pv\|_X; \tag{28}$$

(b) *нижний индекс Бойда* $\alpha_X > 0$.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма (см. [4] или [3, лемма 7.2(a)]) об ограниченности оператора тензорного произведения в с.п.

**Лемма 2.** *Пусть* $\varphi$ *— неограниченная измеримая функция на* $I$. *Если оператор* $T_\varphi x(s,t) = x(s)\varphi(t)$ *ограничен из* $X$ *в* $X(I\times I)$, *то* $\alpha_X > 0$.

**Доказательство предложения 2.** Прежде всего, заметим, что импликация $(b) \Rightarrow (a)$ хорошо известна (см., например, [20, предложение 2.d.1]); поэтому нужно доказать лишь, что из $(a)$ следует $(b)$.

Итак, предположим, что в $X$ выполнено неравенство (28). Пусть $\varphi$ — функция, обратная к функции

$$\Psi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv, \quad 0 \leqslant u < \infty.$$

Так как $\Psi(0) = 1$, то $\varphi$ — убывающая функция на $[0,1]$, $\lim_{t\to+0}\varphi(t) = +\infty$. Пусть $z_n := n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^n r_i$. Ввиду центральной предельной теоремы [26, теорема 3.3.3]

$$\lim_{n\to\infty} m\{t\in[0,1] : |z_n(t)| > u\} = \Psi(u), \quad u \geqslant 0,$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^*(t) = \varphi(t)$ $(0 < t \leqslant 1)$ [3, лемма 3.1].

Для фиксированных $k, l \in \mathbb{N}$, $l > k$, а также произвольной $\Sigma_k$-измеримой функции $v$ положим $v_i = 0$, если $1 \leqslant i \leqslant k$ или $i > l$, и $v_i = \frac{1}{\sqrt{l-k}}v$, если $i = k+1, \dots, l$. Очевидно, что последовательность $\{v_i\}$ $\{\Sigma_i\}$-предсказуема, и, кроме того,

$$\sum_{i=1}^\infty v_i(s)r_i(t) = v(s)z_{k,l}(t), \quad \text{где} \quad z_{k,l} := \frac{1}{\sqrt{l-k}}\sum_{i=k+1}^l r_i.$$

В силу неравенства (28)

$$\|v(s)z_{k,l}(t)\|_{X(I\times I)} \leqslant M\|v\|_X, \tag{29}$$

где $M$ не зависит ни от $v$, ни от $k$ и $l$. Кроме того, так как $z_{k,l}^* = z_{l-k}^*$, то, как отмечалось выше, $\lim\limits_{l\to\infty} z_{k,l}^*(t) = \varphi(t)$ $(0 < t \leqslant 1)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Поэтому ввиду порядковой полунепрерывности нормы в $X$ и свойств $X''$ из (29) следует, что

$$\|T_\varphi v\|_{X''(I\times I)} = \|v(s)\varphi(t)\|_{X''(I\times I)} \leqslant M\|v\|_{X''}. \tag{30}$$

Так как последнее неравенство выполнено для каждой функции $v$, которая $\Sigma_k$-измерима при некотором $k\in\mathbb{N}$, то из него, в частности, следует, что $X\neq L_\infty$. Поэтому норма $X''$ абсолютно непрерывна на $L_\infty$.

Пусть $x\in L_\infty$. Легко видеть, что существует последовательность $\Sigma_k$-измеримых функций $\{v_k\}$, $v_k\geqslant 0$, такая, что $v_k\leqslant\|x\|_\infty$ и $v_k\to|x|$ п.в. на $[0,1]$. Тогда $\|v_k\|_{X''}\to\|x\|_{X''}$ и ввиду (30)

$$\|v_k(s)\varphi(t)\|_{X''(I\times I)} \leqslant M\|v_k\|_{X''}, \quad k=1,2,\dots$$

Следовательно, переходя в последнем неравенстве к пределу при $k\to\infty$ и учитывая, что пространство $X''$ максимально, получим

$$\|T_\varphi x\|_{X''(I\times I)} = \|x(s)\varphi(t)\|_{X''(I\times I)} \leqslant M\|x\|_{X''}$$

для всех $x\in L_\infty$. Если $x\in X''$ произвольна, то найдется возрастающая последовательность функций $\{x_k\}\subset L_\infty$, $x_k\geqslant 0$, такая, что $x_k\to|x|$ п.в. на $[0,1]$. Поэтому точно таким же образом предыдущее неравенство может быть продолжено на все $X''$, и в результате

$$\|T_\varphi x\|_{X''(I\times I)} \leqslant M\|x\|_{X''},$$

откуда следует ограниченность оператора $T_\varphi$ из $X''$ в $X''(I\times I)$. Тогда $\alpha_{X''}>0$ по лемме 2. Так как $\alpha_X=\alpha_{X''}$ [18, теорема 2.4.11], предложение доказано. □

**Замечание 1.** Соотношение, противоположное к (28), точнее, неравенство

$$\|Pv\|_X \leqslant \sqrt{2}\|R'v\|_{X(I\times I)}$$

выполнено в любом с.п. $X$ и для произвольных $v_k\in X$, $k=1,2,\dots$ (см., например, [20, предложение 2.d.1]).

**Теорема 3.** *Для произвольного с.п. $X$ следующие условия эквивалентны*:

(i) *система Хаара безусловна в $X$*;

(ii) *с константами, не зависящими от $c_{k,i}\in\mathbb{R}$,*

$$\Big\|\sum_{k=1}^\infty\sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i}h_{k-1,i}\Big\|_X \asymp \Big\|\sum_{k=1}^\infty\sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i}\chi_{\Delta_{k-1}^i}(s)r_k(t)\Big\|_{X(I\times I)}. \tag{31}$$

**Доказательство.** Если выполнено (i), то $0 < \alpha_X \leqslant \beta_X < 1$ (см. [20, 2.c.6] или [18, 2.9.6]). Но тогда ввиду [15, теорема 1.11] и предложения 2 и левая, и правая части из (31) эквивалентны норме в $X$ функции Пэли, т.е. величине

$$\Big\| \Big( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \big(c_k^i h_{k-1}^i\big)^2 \Big)^{1/2} \Big\|_X,$$

и, таким образом, получаем (31).

Обратное утверждение — непосредственное следствие того, что ввиду леммы 1 семейство функций $\{\chi_{\Delta_{k-1}^i}(s) r_k(t) : k = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}\}$ безусловно в произвольном с.п. □

## §6. Декаплинг-неравенство для мартингальных преобразований в с.п.

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда в с.п. $X$ справедливо неравенство

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i} h_{k-1,i} \Big\|_X \leqslant C \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} c_{k,i} \chi_{\Delta_{k-1}^i}(s) r_k(t) \Big\|_{X(I \times I)} \tag{32}$$

с некоторой константой $C > 0$, зависящей только от $X$, или эквивалентно, когда для произвольной $\{\Sigma_k\}$-предсказуемой последовательности $\{v_k\}$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} v_k r_k \Big\|_X \leqslant C \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} v_k(s) r_k(t) \Big\|_{X(I \times I)}. \tag{33}$$

Ввиду первого из утверждений предложения 1, предложения 2, а также замечания 1 эти неравенства имеют место, если $\alpha_X > 0$. Однако (33) справедливо и во многих с.п. с нулевым нижним индексом Бойда. Действительно, главный результат работы [13] состоит в доказательстве этого неравенства в случае $X = L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, с константой $C$, не зависящей от $p$. Тем самым (33) имеет место в любом с.п., экстраполяционном относительно $L_p$-шкалы (см. [5, 6]), в частности, во всех экспоненциальных пространствах Орлича $\exp L_p$, $p > 0$. В то же время, как показывает пример Талаграна [13], соответствующая оценка для распределений сумм из соотношения (33) не верна. Точнее, не существует константы $C$, для которой неравенство

$$m\left\{u \in I : \left|\sum_{k=1}^{\infty} v_k(u) r_k(u)\right| > C\tau\right\}$$
$$\leqslant Cm\left\{(s,t) \in I \times I : \left|\sum_{k=1}^{\infty} v_k(s) r_k(t)\right| > \tau\right\}$$

справедливо для каждой $\{\Sigma_k\}$-предсказуемой последовательности $\{v_k\}$ и всех $\tau > 0$. Используя этот пример, можно доказать и несколько более сильное утверждение.

**Предложение 3.** *Не существует константы $C > 0$, для которой неравенство*

$$\int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k r_k\right)^*(u)\,du \leqslant C \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k(s) r_k(t)\right)^*(u)\,du$$

*справедливо для каждой $\{\Sigma_k\}$-предсказуемой последовательности $\{v_k\}$ и всех $0 < t \leqslant 1$.*

**Доказательство.** Как и в примере Талаграна [13, теорема 6.1], для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 4$, положим $N_1 = 2^{2k}$ и

$$N_i - N_{i-1} = 2^{1-i} N_1, \quad i = 2, \dots, k.$$

Кроме того, определим множества

$$A_1 = \{t \in [0,1] : r_1(t) = \dots = r_{N_1}(t) = 1\},$$
$$A_i = A_{i-1} \cap \{t \in [0,1] : r_{N_{i-1}+1}(t) = \dots = r_{N_i}(t)\}, \quad i = 2, \dots, k,$$

а также $\{\Sigma_k\}$-предсказуемую последовательность $\{v_k\}$ следующим образом:

$$v_1 = \dots = v_{N_1} = 1,$$
$$v_{N_1+1} = \dots = v_{N_2} = 2\chi_{A_1},$$
$$v_{N_{k-1}+1} = \dots = v_{N_k} = 2^{k-1}\chi_{A_{k-1}}.$$

Тогда из определений следует, что

$$\left|\sum_{j=1}^{N_k} v_j(u) r_j(u)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} |v_j(u) r_j(u)|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} 2^{1-i} N_1 = kN_1, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

и аналогично

$$\left|\sum_{j=1}^{N_k} v_j(s)r_j(t)\right| \leqslant kN_1, \quad 0 \leqslant s,\ \ t \leqslant 1. \tag{34}$$

Следовательно,

$$m\left\{u \in I : \left|\sum_{j=1}^{N_k} v_j(u)r_j(u)\right| \geqslant kN_1\right\} = m\left\{u \in I : \left|\sum_{j=1}^{N_k} v_j(u)r_j(u)\right| = kN_1\right\}$$
$$= 2m\{r_j = 1, j = 1, 2, \ldots, N_k\} = 2 \cdot 2^{-N_1(1+2+\cdots+2^{1-k})} = 2^{-2N_1(1-2^{-k})},$$

откуда для $\alpha_k := 2^{-2N_1(1-2^{-k})}$ получим

$$\int_0^{\alpha_k} \left(\sum_{j=1}^{N_k} v_j r_j\right)^*(u)\,du = kN_1\alpha_k. \tag{35}$$

С другой стороны, как показано в доказательстве теоремы 6.1 в [13],

$$m\left\{(s,t) \in I \times I : \left|\sum_{j=1}^{N_k} v_j(s)r_j(t)\right| \geqslant 4N_1\right\} \leqslant k \cdot 2^{-N_1 2^{2-k}} \cdot \alpha_k,$$

и, значит, ввиду (34) и (35)

$$\int_0^{\alpha_k} \left(\sum_{j=1}^{N_k} v_j(s)r_j(t)\right)^*(u)\,du \leqslant kN_1 \cdot k \cdot 2^{-N_1 2^{2-k}} \cdot \alpha_k + 4N_1 \cdot \alpha_k$$
$$= kN_1\alpha_k \cdot \left(k2^{-2^{k+2}} + \frac{4}{k}\right) = \left(k2^{-2^{k+2}} + \frac{4}{k}\right)\int_0^{\alpha_k} \left(\sum_{j=1}^{N_k} v_j r_j\right)^*(u)\,du.$$

Так как $k \in \mathbb{N}$ может быть взято сколь угодно большим, утверждение доказано. □

## Список литературы

[1] Astashkin S. V., *Rademacher chaos in symmetric spaces*, East J. Approx. **4** (1998), no. 3, 311–336.

[2] Асташкин С. В., *Независимые функции в симметричных пространствах и свойство Круглова*, Мат. сб. **199** (2008), №7, 3–20.

[3] Асташкин С. В., *Функции Радемахера в симметричных пространствах*, Соврем. мат. Фундам. направл. **32** (2009), 3–161.

[4] Асташкин С. В., Браверман М. Ш., *О подпространстве симметричного пространства, порожденном системой Радемахера с векторными коэффициентами*, Операторные уравнения в функц. пространствах, Воронеж. гос. ун-т, Воронеж, 1986, с. 3–10.

[5] Асташкин С. В., Лыков К. В., *Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, ,,близких" к* $L_\infty$, Сиб. мат. ж. **47** (2006), №5, 974–992.

[6] Асташкин С. В., Лыков К. В., *Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция*, Сиб. мат. ж. **50** (2009), №2, 250–266.

[7] Асташкин С. В., Семенов Е. М., *Пространства, определяемые функцией Пэли*, Мат. сб. **204** (2013), №7, 3–23.

[8] Astashkin S. V., Sukochev F. A., *Series of independent random variables in rearrangement invariant spaces: an operator approach*, Israel J. Math. **145** (2005), 125-156.

[9] Асташкин С. В., Сукочев Ф. А., *Независимые функции и геометрия банаховых пространств*, Успехи мат. наук **65** (2010), №6, 3–86.

[10] Braverman M. Sh., *Independent random variables and rearrangement invariant spaces*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 194, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[11] Burkholder D. L., *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1494–1504.

[12] Голубов Б. И., *Ряды Фурье по системе Хаара*, Итоги науки. Сер. Мат. анал., 1970, ВИНИТИ, М., 1971, с. 109–146.

[13] Hitczenko P., *Domination inequality for martingale transforms of a Rademacher sequence*, Israel J. Math. **84** (1993), no. 1–2, 161–178.

[14] Kamińska A., Maligranda L., Persson L.-E., *Type, cotype and convexity properties of Orlicz spaces*, Publ. Depart. Anal. Matem., No. 42, Fac. Mat., Univ. Madrid, 1996-97, pp. 113–126.

[15] Кашин Б. С., Саакян А. А., *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.

[16] Качмаж С., Штейнгауз Г., *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958.

[17] Kikuchi M., *Characterization of Banach function spaces that preserve the Burkholder square-function inequality*, Illinois J. Math. **47** (2003), no. 3, 867–882.

[18] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.

[19] Лелонд О. В., Семенов Е. М., Уксусов С. Н., *Пространство мультипликаторов Фурье–Хаара*, Сиб. мат. ж. **46** (2005), №1, 130–138.

[20] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces* II. *Function spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb.(3), vol. 97, Springer-Verlag, Berlin etc., 1979.

[21] Lorentz G. G., *Relations between function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 127–132.
[22] Müller P. F., *Isomorphisms between $H^1$ spaces*, Math. Monogr., vol. 66, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
[23] Neveu J., *Discrete Parameter Martingales*, North-Holland. Math. Library, vol. 10, North.-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1975.
[24] Novikov I., Semenov E., *Haar series and linear operators*, Math. Appl., vol. 367, Kluwer Acad. Publ. Group, Dordrecht, 1997.
[25] Rodin V. A., Semenov E. M., *Rademacher seriesin symmetric spaces*, Anal. Math. **1** (1975), no. 3, 207–222.
[26] Ширяев А. Н., *Вероятность*, Наука, М., 1980.
[27] Szarek S. J., *On the best constant in the Khintchine inequality*, Stud. Math. **58** (1976), no. 2, 197–208.
[28] Эллиотт Р., *Стохастический анализ и его приложения*, Мир, М., 1986.

Самарский
государственный университет
443011, Самара
ул. Академика Павлова, 1
Россия
*E-mail:* astash@samsu.ru

Поступило 23 мая 2014 г.