П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, Доказательство Х. Тверберга теоремы о замкнутой жордановой кривой, *Алгебра и анализ*, 2015, том 27, выпуск 5, 207–220

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №5

ЛЕГКОЕ ЧТЕНИЕ ДЛЯ ПРОФЕССИОНАЛА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Х. ТВЕРБЕРГА ТЕОРЕМЫ О ЗАМКНУТОЙ ЖОРДАНОВОЙ КРИВОЙ

© П. В. ПАРАМОНОВ, К. Ю. ФЕДОРОВСКИЙ

Обсуждается малоизвестное специалистам доказательство классической теоремы о замкнутой жордановой кривой (теоремы Жордана), полученное норвежским математиком Х. Твербергом. Это доказательство носит метрический характер и позволяет получить одно важное метрическое уточнение теоремы Жордана, представляющее самостоятельный интерес.

§1. Введение

Следующий фундаментальный топологический факт известен как *теорема о замкнутой жордановой кривой* или как *теорема Жордана* [1].

Теорема Жордана. *Пусть* $\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ *— единичная окружность в* $\mathbb{R}^2$ *и пусть* $\gamma\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ *— непрерывное инъективное отображение, т.е.* $\Gamma = \gamma(\mathbb{T})$ *— замкнутая жорданова кривая на плоскости. Тогда множество* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *состоит в точности из двух компонент связности (непересекающихся областей).*

Эта теорема играет особую роль и в анализе. Авторы настоящей заметки, читающие общие и специальные курсы комплексного анализа на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и на факультете фундаментальных наук МГТУ им. Н. Э. Баумана, в течение многих лет искали адекватное по простоте и полноте доказательство теоремы Жордана. Такое доказательство было найдено в работе [2] известного норвежского математика Х. Тверберга. Существенно переработанное и детализированное авторами оно неоднократно включалось в наши специальные курсы. Считаем, что оно доступно также школьникам старших классов, знакомых с начальным курсом математического анализа (предел и непрерывность, теорема Вейерштрасса, принцип вложенных отрезков). Отметим, что данное доказательство позволяет получить важное *метрическое* уточнение теоремы Жордана, представляющее самостоятельный интерес (см. следствие 1).

Второй автор поддержан Фондом Дмитрия Зимина „Династия“ и фондом Саймонса (Simons–IUM fellowship).

§2. Вводные замечания и вспомогательные леммы

Приведем некоторые элементарные факты из анализа, которые будут использованы в дальнейшем. Во-первых, заметим, что в указанных выше обозначениях отображение γ равномерно непрерывно на $\mathbb{T}$, причем обратное отображение $\gamma^{-1}\colon \Gamma \to \mathbb{T}$ также непрерывно. Во-вторых, если A и B — непустые непересекающиеся компакты в $\mathbb{R}^2$, то величина

$$\mathrm{d}(A,B) := \inf\{|a-b|\colon a \in A,\ b \in B\}$$

положительна. Доказательство этих утверждений основывается на теореме Вейерштрасса, которая гласит, что всякая ограниченная последовательность вещественных чисел имеет сходящуюся подпоследовательность.

Напомним также, что *областью* в $\mathbb{R}^2$ называется всякое непустое открытое множество, любые две точки которого можно соединить ломаной, не выходящей за его пределы.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что единичная окружность $\mathbb{T}$ ориентирована против часовой стрелки согласно с натуральной параметризацией $t(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Предлагаемое доказательство теоремы Жордана основано на специальной аппроксимации кривой Γ замкнутыми *жордановыми* ломаными и последующем переходе к пределу. Этот естественный подход хорошо известен, так что приведенные ниже леммы 1 и 2 не новы. А вот лемма 3 и лемма 4 являются новыми и представляют самостоятельный интерес. Их цель — получить определенное *метрическое* описание указанных замкнутых жордановых ломаных, с помощью которого удается перейти к пределу. Основная трудность состоит в том, чтобы избежать ситуации, которая возникает для (нежордановой) замкнутой кривой вида ∞, являющейся (при определенном обходе) пределом замкнутых жордановых ломаных.

Определение 1. Замкнутая жорданова кривая $\Sigma = \sigma(\mathbb{T})$, где $\sigma\colon \mathbb{T} \to \Sigma$ — гомеоморфизм, называется *замкнутой жордановой ломаной*, если существует разбиение $\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N\}$ отрезка $[0, 2\pi]$ (т.е. $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = 2\pi$), с условиями $\sigma((\cos\theta, \sin\theta)) = (a_n\theta + b_n, c_n\theta + d_n)$ на отрезке $[\theta_{n-1}, \theta_n]$ при $n = 1, \dots, N$, где a_n, b_n, c_n и d_n — вещественные постоянные.

Замечание. В соответствии с выбором разбиения Θ естественным образом определяются *вершины* и *ребра* ломаной Σ. Заметим также, что соседние ребра ломаной Σ могут лежать на одной прямой.

Пару (σ, Θ) назовем *реализацией* ломаной Σ.

Лемма 1. *Теорема Жордана справедлива для любой замкнутой жордановой ломаной.*

Доказательство. Пусть Σ — замкнутая жорданова ломаная и пусть Σ имеет вершины $v_n = \sigma((\cos\theta_n, \sin\theta_n))$ и ребра $\Sigma_n = [v_{n-1}, v_n]$, где $n = 1, \dots, N$. Пусть также $\Sigma_{N+1} = \Sigma_1$ и $v_0 = v_N$.

Докажем вначале, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ имеет *не более двух* компонент связности. Остановимся на случае $N \geqslant 4$. При $n = 1, \dots, N$ рассмотрим множества $U_n = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(z, \Sigma_n) < \delta\}$, где

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\mathrm{d}(\Sigma_j, \Sigma_k)\},$$

а min берется по всем *несоседним* ребрам ломаной Σ. Если обозначить $\Sigma_0 = \Sigma_N$, то ясно, что

$$U_n \cap \Sigma \subset \Sigma_{n-1} \cup \Sigma_n \cup \Sigma_{n+1},$$

причем $U_n \setminus \Sigma$ состоит из двух компонент U_n' и U_n'', где для определенности можно предположить, что $U_n' \cap U_{n+1}' \neq \varnothing$ и $U_n'' \cap U_{n+1}'' \neq \varnothing$ при $n = 1, \dots, N-1$. Тогда множества $U' := \bigcup_{n=1}^{N} U_n'$ и $U'' := \bigcup_{n=1}^{N} U_n''$ являются областями, причем любую точку $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ можно соединить отрезком с U' или U'' вне Σ.

Докажем теперь, что имеется *не менее двух* компонент связности у множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Выберем систему координат в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы все вершины $v_n = (x_n, y_n)$ ломаной Σ имели различные абсциссы x_n.

При $z \notin \Sigma$ положим $\eta(z) = 1$, если луч L_z с вершиной в точке z, направленный вертикально вверх, пересекает Σ *нечетное* число раз. В случае четного числа пересечений L_z и Σ, положим $\eta(z) = 0$. Отметим, что если L_z содержит (ровно одну) вершину, скажем, v_k, ломаной Σ, причем ребра Σ_{k-1} и Σ_k (пересекающиеся в вершине v_k) лежат по одну сторону от L_z, то мы считаем, что L_z (вблизи точки z) имеет два (или ни одного) пересечения с Σ (см. рис. 1). Нетрудно доказать, что $\eta(z)$ непрерывна в каждой точке вне Σ и, следовательно (будучи целочисленной), является локально постоянной функцией от z вне Σ. Следовательно, $\eta(z)$ постоянна в каждой связной компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$.

Если бы у множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ была бы только одна (неограниченная) компонента связности, то, очевидно, $\eta(z)$ была бы тождественным нулем. Пусть теперь $v_m = (x_m, y_m)$ такая вершина Σ, для которой $y_m = \max\{y_n : n = 1, \dots, N\}$. Тогда ясно, что вблизи точки v_m найдется точка z такая, что $\eta(z) = 1$. $\square$

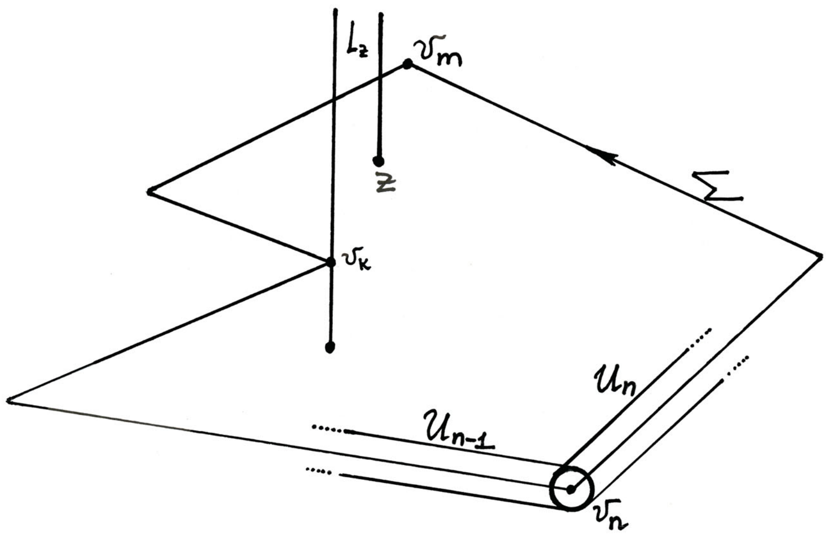

Рис. 1. К доказательству леммы 1.

Лемма 2. *Всякий замкнутый жорданов путь γ (напомним, что $\gamma\colon \mathbb{T} \to \varGamma$ — гомеоморфизм) можно с любой точностью равномерно на $\mathbb{T}$ приблизить замкнутым жордановым путем σ, задающим замкнутую жорданову ломаную $\varSigma$ в смысле определения* 1. *При этом $\varSigma$ „вписана“ в $\varGamma$ в том смысле, что все ее вершины лежат на $\varGamma$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы при всех $t \in \mathbb{T}$ и $t' \in \mathbb{T}$ были верны следующие высказывания:

(1) если $|t - t'| \leqslant \varepsilon_1$, то $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \frac{\varepsilon}{2}$,

(2) если $|\gamma(t) - \gamma(t')| \leqslant \varepsilon_2$, то $|t - t'| < \min\left(\varepsilon_1, \sqrt{3}\right)$.

Положим теперь $\delta = \min\{\varepsilon/2, \varepsilon_2\}$.

Рассмотрим стандартную решетку (замкнутых) квадратов диаметра δ:

$$Q_{jk} = \left\{(x,y)\colon \left|x - j\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right| \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{2}},\ \left|y - k\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right| \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right\}, \quad j,k,\in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\{Q_s\}_{s=1}^{S}$ — те из квадратов решетки, которые пересекают $\varGamma$ более, чем по одной точке. Легко видеть, что всегда $2 \leqslant S < +\infty$. Так как $\delta \leqslant \varepsilon_2$, то множество $\gamma^{-1}(Q_1)$ имеет диаметр менее $\sqrt{3}$, т.е. $\gamma^{-1}(Q_1)$ содержится в (однозначно определенной) минимальной замкнутой дуге $T_1 \subset \mathbb{T}$ длины

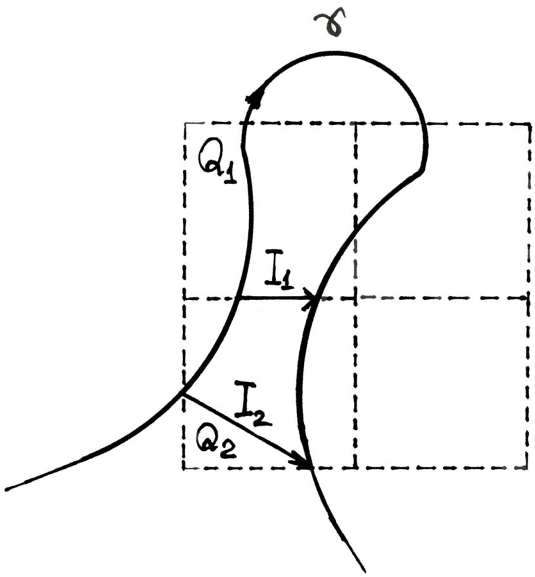

Рис. 2. К доказательству леммы 2: Q_1 — случай (i), Q_2 — случай (ii).

менее $2\pi/3$. Пусть $[\tau_1, \tau_1'] \subset \mathbb{R}$ такой интервал, что отображение $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ есть гомеоморфизм $[\tau_1, \tau_1']$ на T_1. Рассмотрим новый путь γ_1 на $\mathbb{T}$, который совпадает с γ на $\mathbb{T} \setminus T_1$, а при $t = (\cos\theta, \sin\theta) \in T_1$ (при $\theta \in [\tau_1, \tau_1']$) положим $\gamma_1(t) = (a_1\theta + b_1, c_1\theta + d_1)$, где постоянные a_1, b_1, c_1, d_1 выбраны так, чтобы γ_1 было непрерывно на $\mathbb{T}$. Таким образом, $\mathit{\Gamma}_1 = \gamma_1(\mathbb{T})$ пересекает Q_1 по отрезку $[\gamma(t_1), \gamma(t_1')]$, где $t_1 = (\cos\tau_1, \sin\tau_1)$ и $t_1' = (\cos\tau_1', \sin\tau_1')$ — начало и конец дуги T_1 соответственно. Ясно, что $\gamma_1(t_1) = \gamma(t_1)$ и $\gamma_1(t_1') = \gamma(t_1')$.

Возможны два случая.

В первом случае (i) пусть отрезок $I_1 = [\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_1')]$ лежит на одной из *сторон* квадрата Q_1. Тогда перенумеруем остальные квадраты Q_s так, чтобы I_1 лежал также на стороне квадрата Q_2. Во втором случае (ii) отрезок I_1, за исключением своих концов, лежит строго внутри Q_1 (см. рис. 2). В этом случае никакой перенумерации остальных квадратов не делаем. Таким образом, в случае (ii) для всех $s \geqslant 2$ (а в случае (i) для всех $s \geqslant 3$) имеем $\gamma_1^{-1}(Q_s) \subseteq \gamma^{-1}(Q_s)$, и для всех $s \geqslant 1$ выполнено $\operatorname{diam}\gamma_1^{-1}(Q_s) < \sqrt{3}$.

Если $\mathit{\Gamma}_1$ пересекает Q_2 не более, чем по одной точке (что возможно только в случае (ii)), то полагаем $\gamma_2 = \gamma_1$. Иначе найдется такая минимальная замкнутая дуга T_2 длиной менее $2\pi/3$, которая содержит

$\gamma_1^{-1}(Q_2)$. Отметим, что T_1 и T_2 либо не пересекаются по своим внутренностям (случай (ii)), либо $T_1 \subseteq T_2$ (случай (i)). В обоих случаях найдется гомеоморфизм $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ некоторого отрезка $[\tau_2, \tau_2']$ на T_2 и постоянные a_2, b_2, c_2 и d_2 такие, что путь $\gamma_2(t)$, равный $\gamma_1(t)$ на $\mathbb{T}\setminus T_2$, и равный $\gamma_2(t) = (a_2\theta + b_2, c_2\theta + d_2)$ при $t = (\cos\theta, \sin\theta) \in T_2$ (при $\theta \in [\tau_2, \tau_2'])$ является замкнутым жордановым путем, совпадающим с γ в начале $t_2 = (\cos\tau_2, \sin\tau_2)$ и в конце $t_2' = (\cos\tau_2', \sin\tau_2')$ дуги T_2, поскольку t_2 и t_2' не могут лежать внутри T_1.

Продолжая аналогичным образом, мы в результате получим замкнутые жордановы пути γ_s, $s = 1, \dots, S$. Пусть $t \in \mathbb{T}$, оценим $|\gamma_S(t) - \gamma(t)|$. Если $\gamma_S(t) \neq \gamma(t)$, то найдется такое $s \in \{1, \dots, S\}$, что $\gamma_S(t) = \gamma_s(t) \neq \gamma_{s-1}(t)$ (считаем, что $\gamma_0 = \gamma$). По построению t лежит на дуге T_s с началом t_s и концом t_s', $\gamma_s(T_s) \subset Q_s$, $\gamma_s(t_s) = \gamma(t_s)$, $\gamma_s(t_s') = \gamma(t_s')$. Тогда

$$|\gamma_S(t) - \gamma(t)| = |\gamma_s(t) - \gamma_s(t_s) + \gamma(t_s) - \gamma(t)| \leqslant \delta + |\gamma(t) - \gamma(t_s)|\,.$$

Но $|t - t_s| \leqslant |t_s' - t_s| \leqslant \varepsilon_1$ ввиду $|\gamma(t_s') - \gamma(t_s)| \leqslant \delta \leqslant \varepsilon_2$. Таким образом,

$$\delta + |\gamma(t) - \gamma(t_s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откуда, окончательно, $|\gamma_S(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$.

Поскольку $\Gamma_S = \gamma_S(\mathbb{T})$ пересекает каждый квадрат решетки либо по пустому множеству, либо по одной точке, либо по „равномерно“ проходимому отрезку, нетрудно видеть, что $\sigma = \gamma_S$ — искомая аппроксимация. $\square$

§3. Две основные леммы

Лемма 3. *Пусть Σ — замкнутая жорданова ломаная с реализацией (σ, Θ). Тогда найдется открытый круг B, лежащий в ограниченной компоненте D множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, с границей C, пересекающей ломаную Σ в точках $\sigma(t)$ и $\sigma(t')$, где $t, t' \in \mathbb{T}$ такие, что $|t - t'| \geqslant \sqrt{3}$.*

Доказательство. Пусть при движении вдоль Σ, соответствующем ориентации на $\mathbb{T}$ и отображению σ, область D остается слева (иначе сделаем симметрию относительно одной из осей координат). Пользуясь упомянутой выше теоремой Вейерштрасса, нетрудно показать, что найдется открытый круг B, лежащий в D, с границей C, пересекающей ломаную Σ в точках $\sigma(t)$ и $\sigma(t')$, где $t, t' \in \mathbb{T}$, для которого значение $|t-t'|$ является максимально возможным (см. рис. 3; отметим, что C может пересекать Σ и в других точках). Покажем, что этот круг является искомым. Предположим, что $|t - t'| < \sqrt{3}$. Пусть T — дуга на $\mathbb{T}$, соединяющая точки t и t', имеющая длину, большую $4\pi/3$, направленная (как и $\mathbb{T}$) против часовой

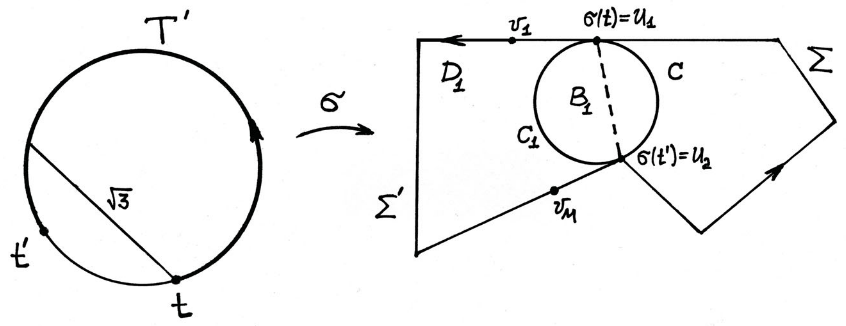

Рис. 3. К доказательству леммы 3.

стрелки. Будем считать точку t — началом, а t' — концом T. Очевидно, что граница C круга B не имеет общих точек с частью $\Sigma' = \sigma(T')$ ломаной Σ, где $T' = T \setminus \{t, t'\}$. Без ограничения общности будем считать, что $v_1 = \sigma((\cos\theta_1, \sin\theta_1)), \ldots, v_M = \sigma((\cos\theta_M, \sin\theta_M))$ — все (последовательные) вершины ломаной Σ, которые принадлежат Σ', $1 \leqslant M \leqslant N$. Положим $u_1 = \sigma(t)$ и $u_2 = \sigma(t')$. Ясно (см. лемму 1), что $\Sigma' = \sigma(T')$ и отрезок $[u_1, u_2]$ (хорда ломаной Σ) ограничивают некоторую область D_1. Положим $B_1 = B \cap D_1$, $C_1 = C \cap D_1$.

Пусть, для начала, известно, что дуга C_1 касается Σ' в обеих ее точках u_1 и u_2 (т.е. окружность C касается прямых u_1v_1 и v_Mu_2). При этом вектор $\overrightarrow{u_1v_1}$ (соответственно $\overrightarrow{v_Mu_2}$) должен с касанием „выходить“ из C (соответственно „входить“ в C), оставляя B слева, а отрезки $[u_1, v_1]$ и $[v_M, u_2]$ должны лежать по одну сторону от прямой u_1u_2.

Поскольку C_1 не пересекает Σ', мы можем найти круг B', принадлежащий области $D_1 \cup B \subset D$, который касается ломаной Σ в точках u_1' и u_2', лежащих *внутри* отрезков $[u_1, v_1]$ и $[v_M, u_2]$ соответственно, причем точки u_1' и u_1 (а также u_2' и u_2) можно сделать сколь угодно близкими друг к другу. Последнее противоречит выбору B, так как $|\sigma^{-1}(u_1') - \sigma^{-1}(u_2')| > |t - t'|$.

Во втором случае пусть известно, что C_1 касается ломаной Σ' ровно в одной точке, например, u_1 (случай касания в точке u_2 аналогичен). В этом случае $u_2 = v_{M+1}$ — вершина. Так как ребро $[v_M, v_{M+1}]$ не касается C_1, мы снова можем найти круг $B' \subset D_1 \cup B$, который касается Σ' в некоторой точке u_1' внутри $[u_1, v_1]$ (близкой к u_1) и граница которого проходит через u_2. Возникает противоречие, аналогичное предыдущему случаю.

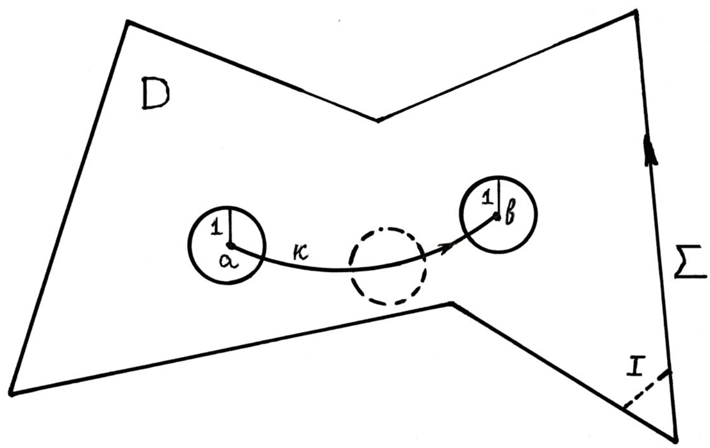

Рис. 4.

Пусть, наконец, обе точки $u_1 = v_N$ и $u_2 = v_{M+1}$ — вершины Σ и касания C_1 и Σ' нет. Будем непрерывно „раздувать“ диск B в сторону области D_1, оставляя его в области D, а его границу C, проходящей через точки u_1 и u_2. Тогда в некоторый момент дуга C_1 коснется ребра $[u_1, v_1]$, или ребра $[v_M, u_2]$, или пересечет Σ'. Все эти случаи уже рассмотрены как приводящие к противоречию. $\square$

Рассмотрим теперь замкнутую жорданову ломаную Σ и выберем одну из компонент D множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Для любой хорды I в D (т.е. отрезка, соединяющего две разные точки на Σ и целиком лежащего в D за исключением концевых точек) множество $D \setminus I$ состоит из двух компонент связности (см. лемму 1). *Фиксируем* точки $a \in D$ и $b \in D$ с условием $\mathrm{d}(\Sigma, \{a, b\}) \geqslant 1$. *Пусть известно*, что для всякой хорды I в D длины $\ell(I) < 2$ точки a и b лежат в одной и той же компоненте множества $D \setminus I$.

Лемма 4. *В указанных условиях найдется путь (непрерывное отображение)* $\kappa\colon [0,1] \to D$, *соединяющий точки* a *и* b *(т.е.* $\kappa(0) = a$, $\kappa(1) = b$*) с условием* $\mathrm{d}(\Sigma, K) \geqslant 1$, *где* $K = \kappa([0,1])$; *см. рис.* 4.

Доказательство. Пусть A_a — совокупность точек из D, которые можно соединить с точкой a путями κ_a (определенными на $[0,1]$) с условием $\mathrm{d}(\Sigma, K_a) \geqslant 1$, где $K_a = \kappa_a([0,1])$. Положим

$$\Sigma_a = \{z \in \Sigma\colon \exists\, a_z \in A_a \text{ такая, что } |z - a_z| = 1\}.$$

Аналогично определяются множества A_b и Σ_b для точки b. Требуется доказать, что $A_a \cap A_b \neq \varnothing$ (откуда сразу следует, что $A_a = A_b$). Будем считать, что при движении по Σ (согласно ориентации) область D остается слева.

Нам необходимо доказать следующее утверждение.

Лемма 5. *В указанных условиях имеет место равенство $\Sigma_a = \Sigma_b$. При этом Σ_a состоит из конечного числа связных компонент (конечного числа замкнутых промежутков и точек на Σ).*

Доказательство. Пусть $\overline{E}$ — замыкание (непустого) множества $E \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $z \in \Sigma_a$ и B_z — единичный круг с центром $a_z \in A_a$, граница C_z которого содержит точку z. Обозначим через C_z^+ открытую полуокружность на C_z с началом в точке z и проходимую против часовой стрелки.

Предположим вначале, что точка z не является вершиной ломаной Σ. Тогда B_z касается некоторого ребра в Σ, содержащего точку z. При условии $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$ точку z (а вместе с ней и круг B_z) можно „двигать“ вдоль по Σ (в направлении, соответствующем ориентации Σ) до того момента, когда z впервые достигнет следующей вершины, или когда впервые появится точка пересечения C_z^+ и Σ. В первом случае продолжим непрерывное „качение“ круга B_z вокруг достигнутой вершины z (по часовой стрелке) до его первого положения, когда $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$, или до того момента, когда C_z станет касательной к следующему после вершины z ребру. Продолжая этот процесс, мы обязательно придем к ситуации, когда впервые $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$ (в общей ситуации исходная точка $z \in \Sigma_a$ может оказаться где-то посередине описанного выше процесса). Это последнее положение точки z (обозначим его z_1) и будет „крайней“ точкой компоненты из Σ_a, содержащей исходное положение точки z (см. рис. 5).

Действительно, пусть z_2 — ближайшая (при движении от z_1 вдоль Σ) точка на Σ с условием $z_2 \in C_{z_1}^+ \cap \Sigma$. Докажем, что на (открытом) промежутке Σ_{12}° ломаной Σ с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 не может быть точек из Σ_a (см. рис. 6). Более того, мы сразу докажем, что на Σ_{12}° не может быть и точек из Σ_b (откуда следует, что $\Sigma_b \subset \Sigma_a$ и, по симметрии, $\Sigma_a \subset \Sigma_b$, что дает $\Sigma_a = \Sigma_b$), так что лемма 5 будет доказана.

Пусть, от противного, найдутся точки $w \in \Sigma_{12}^\circ$ и $a_w \in A_a \cup A_b$ с условием $|a_w - w| = 1$. Тогда единичный круг B_w (с границей C_w и центром a_w) лежит целиком в области D. Пусть $I = [z_1, z_2]$ — хорда в D. Поскольку $|z_1 - z_2| < 2$, множество $A_a \cup A_b$ (и соответственно точка a_w) лежит в одной компоненте D_1, ограниченной ломаной $(\Sigma \setminus \Sigma_{12}^\circ) \cup [z_1, z_2]$. Так как $a_w \in D_1$, а $w \notin \overline{D}_1$, радиус $[a_w, w)$ круга B_w (не пересекая множества $\Sigma \setminus \Sigma_{12}^\circ$) обязан пересекать хорду I. Далее, B_w не содержит z_1 и z_2, поэтому C_w пересекает I в двух точках. Поскольку a_w и $a_{z_1} \in A_a$ (a_{z_1} — центр круга

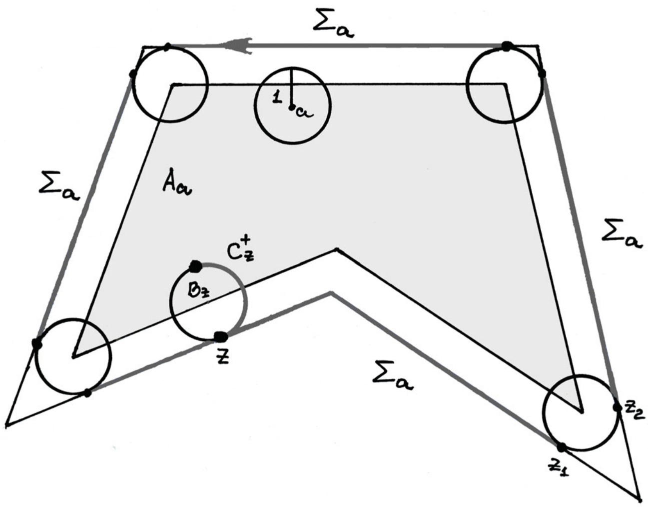

Рис. 5. К доказательству леммы 5.

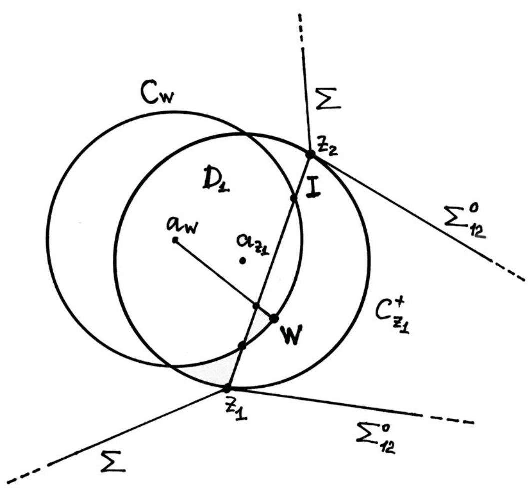

Рис. 6. К доказательству леммы 5, $w \in \Sigma_{12}^{\circ}$.

B_{z_1} полуокружность $C_{z_1}^{+}$ которого содержит z_2) лежат по одну сторону от прямой $z_1 z_2$, мы видим, что либо $a_w = a_{z_1}$ (и точка $w \in C_{z_1}^{+}$ предшествует z_2), либо $w \in B_{z_1}$, что невозможно. $\square$

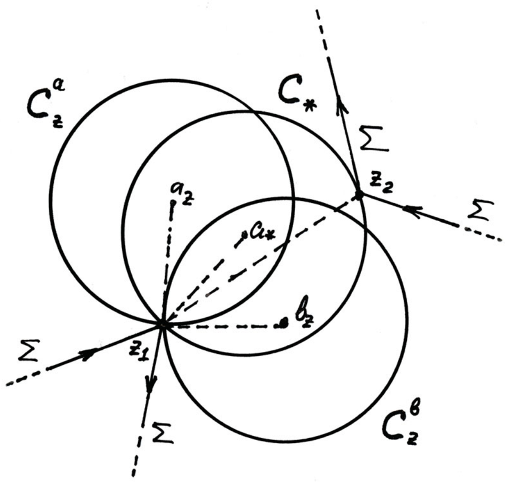

Рис. 7. К завершению доказательства леммы 4.

Завершим теперь доказательство леммы 4. Итак, $\Sigma_a = \Sigma_b$. Докажем теперь, что $A_a = A_b$. Пусть $z \in \Sigma_a = \Sigma_b$, $a_z \in A_a$, $b_z \in A_b$ и пусть B_z^a и B_z^b — единичные круги с центрами a_z и b_z соответственно, границы C_z^a и C_z^b которых содержат точку z. Если $a_z = b_z$, то все ясно. В противном случае угол $\angle(a_z z b_z)$ — ненулевой, так что точка z — вершина ломаной Σ и, следовательно, круги B_z^a и B_z^b имеют непустое пересечение. Без ограничения общности будем считать, что непрерывное вращение круга B_z^a вокруг точки z, совмещающее B_z^a с B_z^b и осуществляемое в „ближайшую сторону", есть вращение по часовой стрелке. При таком непрерывном вращении мы или придем в положение B_z^b без пересечения B_z^a с ломаной Σ (откуда $b_z \in A_a$ и все доказано), или $z = z_1$ будет крайней точкой компоненты Σ_a, содержащей z_1 (см. рис. 7). В последнем случае пусть z_2 — следующая за z_1 точка Σ_a (как в лемме 5), $a_* \in A_a$ — центр единичного круга B_*, граница C_* которого проходит через точки z_1 и z_2, причем $a_* \neq b_z$. Таким образом, B_* — предельное положение, до которого можно вращать B_z^a без пересечения с Σ. Если луч zb_z (с вершиной в точке z) лежит между лучами za_* и z_1z_2, то круг B_z^b содержит z_2 — противоречие. Если же луч z_1z_2 лежит между лучами za_* и zb_z, то точки a_* и b_z лежат в разных компонентах $D \setminus [z_1, z_2]$, поскольку отрезок $[a_*, b_z]$, лежащий в $B_* \cup B_z^b \subset D$, пересекает отрезок $[z_1, z_2]$ один раз. Снова приходим к противоречию и, таким образом, лемма 4 доказана. $\square$

§4. Доказательство теоремы Жордана

Докажем сначала, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ имеет не менее двух компонент. Достаточно установить наличие *ограниченной* компоненты у этого множества. Для этого рассмотрим достаточно большой круг B_0 с центром в нуле и границей C_0, содержащий Γ. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, \dots$ — замкнутые жордановы ломаные, сходящиеся к Γ в смысле леммы 2 и пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_m \dots$ — пути (сходящиеся к γ), реализующие $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \dots$ соответственно. По лемме 3 для каждого m найдется круг B_m (с центром b_m и границей C_m), лежащий в области D_m, ограниченной ломаной Γ_m, с условием, что существуют точки $t_m \in \mathbb{T}$ и $t'_m \in \mathbb{T}$ такие, что $|t_m - t'_m| \geqslant \sqrt{3}$, а $\gamma_m(t_m) \in C_m$ и $\gamma_m(t'_m) \in C_m$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем дополнительно считать, что все Γ_m лежат в B_0 и что последовательность $\{b_m\}$ сходится к некоторой точке b при $m \to +\infty$.

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $t, t' \in \mathbb{T}$ и $|t - t'| \geqslant \sqrt{3}$ вытекает, что $|\gamma(t) - \gamma(t')| \geqslant \varepsilon$. Тогда $|\gamma(t_m) - \gamma(t'_m)| \geqslant \varepsilon$, откуда $|\gamma_m(t_m) - \gamma_m(t'_m)| > \varepsilon/2$ для всех достаточно больших m. Следовательно, $\operatorname{diam} B_m > \varepsilon/2$ и $\mathrm{d}(b_m, \Gamma_m) > \varepsilon/4$ при больших m. Таким образом, при больших m точки b_m и b лежат в одной (ограниченной) компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_m$ и, следовательно, b_m и b лежат в одной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Если b_m и b лежат в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, то найдется путь $\kappa\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, соединяющий b и C_0. Пусть $\mathrm{d}(K, \Gamma) = \delta > 0$, где $K = \kappa([0,1])$. Поскольку при больших m имеет место неравенство $|\gamma(t) - \gamma_m(t)| < \delta/2$ при всех $t \in \mathbb{T}$, мы получаем, что $\mathrm{d}(K, \Gamma_m) > \delta/2$, так что для больших m точки b_m и b должны лежать в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_m$, а это дает противоречие.

Докажем теперь, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ имеет не более двух компонент связности. Пусть, от противного, точки w_1, w_2 и w_3 лежат в различных компонентах множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Положим $\mathrm{d}(\Gamma, \{w_1, w_2, w_3\}) = \varepsilon$, и пусть жордановы ломаные $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, \dots$ сходятся к Γ, т.е. соответственно $|\gamma(t) - \gamma_m(t)| \to 0$ при $m \to +\infty$ равномерно на $\mathbb{T}$. Тогда можно считать, что $\mathrm{d}(\Gamma_m, \{w_1, w_2, w_3\}) \geqslant \varepsilon/2$ (при всех m), так что две из трех точек w_1, w_2 и w_3 лежат в одной компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_m$. Будем считать, что точки w_1 и w_2 лежат в одной компоненте D_m множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_m$ при всех m. Предположим, что существуют $\delta \in (0, \varepsilon)$ и бесконечно много значений m такие, что w_1 и w_2 можно соединить путем $\kappa_m\colon [0,1] \to D_m$ с условием $\mathrm{d}(K_m, \Gamma_m) \geqslant \delta$, где $K_m = \kappa_m([0,1])$. Но тогда w_1 и w_2 должны лежать в одной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Однако в силу сделанного ранее предположения это не так, и мы получаем, что такого δ не существует. Применим теперь (от противного) лемму 4. Еще раз переходя к подпоследовательности, мы можем утверждать, что для каждого m найдутся точки $z_m = \gamma_m(t_m)$, $t_m \in \mathbb{T}$, и $z'_m = \gamma_m(t'_m)$, $t'_m \in \mathbb{T}$, такие, что точки w_1 и w_2 лежат в разных компонентах множества $D_m \setminus I_m$, где $I_m = [z_m, z'_m]$, причем $z_m - z'_m = \gamma_m(t_m) - \gamma_m(t'_m) \to 0$ при $m \to +\infty$. Следовательно, $t_m - t'_m \to 0$ при $m \to +\infty$. Без ограничения общности предположим, что для бесконечно многих значений m точка w_1 лежит в компоненте D'_m множества $D_m \setminus I_m$, ограниченной I_m и $\gamma(T'_m)$, где T'_m — минимальная дуга на $\mathbb{T}$, соединяющая t_m и t'_m. Ясно, что $\operatorname{diam} D'_m \to 0$ при $m \to +\infty$, так что точка w_1 обязана лежать на $\mathit{\Gamma}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Жордана. □

Использованные при доказательстве теоремы Жордана аргументы и конструкции позволяют установить ряд интересных полезных следствий.

Следствие 1. *В условиях теоремы Жордана пусть* $\delta := \min\{|\gamma(t) - \gamma(t')| \colon t, t' \in \mathbb{T},\ |t-t'| \geqslant \sqrt{3}\}$. *Тогда ограниченная компонента множества* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ *содержит круг с диаметром* δ.

Естественным образом модифицируя леммы 1, 2 и 4 и вторую часть доказательства теоремы Жордана, получаем следующий важный результат.

Теорема Жордана для жордановых кривых. *Пусть* $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — *непрерывное инъективное отображение, т.е.* $\mathit{\Gamma} = \gamma([0,1])$ — *жорданова кривая. Тогда* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ — *связно.*

Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *В условиях теоремы Жордана граница каждой из компонент связности множества* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ *совпадает с* $\mathit{\Gamma}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай ограниченной компоненты D множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$. Пусть, от противного, граница ∂D множества D не совпадает с $\mathit{\Gamma}$. Ясно, что $\partial D \subset \mathit{\Gamma}$, поэтому при некотором $t_0 \in \mathbb{T}$ имеем $\gamma(t_0) \notin \partial D$. Тогда найдется такая связная окрестность T_0 точки t_0 в $\mathbb{T}$, что $\partial D \cap \gamma(T_0) = \varnothing$. При этом жорданова кривая $\mathit{\Gamma}_1 = \gamma(T_1)$, где $T_1 = \mathbb{T} \setminus T_0$, содержит ∂D и не разделяет плоскость в силу теоремы Жордана для жордановой кривой. Противоречие легко получается применением принципа вложенных отрезков. □

Список литературы

[1] Jordan C., *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Gauthier-Villars, Paris, 1887, vol. 3, 587–594.

[2] Tverberg H., *A proof of the Jordan curve theorem*, Bull London Math. Soc. **12** (1980), 34–38.

Поступило 14 апреля 2015 г.

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
119991, ГСП-1, Москва
Россия
E-mail: petr.paramonov@list.ru

Московский
государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана
С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия
E-mail: kfedorovs@yandex.ru